УДК 627.15

Кіяшко І.В., канд. техн. наук, **Євсейчик Ю.Б.**

ЗМІНА ШВИДКОСТІ РУСЛОВОГО ПОТОКУ В ЗОНІ ВПЛИВУ МОСТОВИХ ПЕРЕХОДІВ У ПРОЦЕСІ РОЗВИТКУ ЗАГАЛЬНИХ РУСЛОВИХ ДЕФОРМАЦІЙ

Анотація. У роботі на основі математичної моделі загального розмиву, яка базується на рівнянні балансу наносів, отримано диференціальне рівняння для швидкості руслового потоку в зоні впливу мостового переходу. В результаті розв'язку задачі Коші, диференціальне рівняння швидкості потоку зводиться до класу однорідних квазілінійних рівнянь І порядку і може бути зведено до рівняння переносу.

Аннотация. В работе на основе математической модели общего размыва, которая базируется на уравнении баланса наносов, получено дифференциальное уравнение для скорости руслового потока в зоне влияния мостового перехода. В результате решения задачи Коши, дифференциальное уравнение скорости потока сводится к классу однородных квазилинейных уравнений І порядка и может быть сведено к уравнению переноса.

Annotation. In this paper, based on a mathematical model of the total erosion, which is based on the equation of sediment balance, the differential equation for the rate of streamflow in the zone of the bridge. The solution of the Cauchy problem, differential equation of the flow rate is reduced to a class of homogeneous quasilinear equations of I order and can be reduced to the transport equation.

Визначення швидкості потоку у зоні впливу мостового переходу є важливим питанням, як з точки зору укріплення мостових дамб, так і з точки зору навігації, де існують певні обмеження для руху суден під мостами.

Математична модель руслових деформацій, які відбуваються при стисненні ріки мостовим переходом, відома [2] і складається із чотирьох рівнянь

$$\frac{\partial G}{\partial l} - B \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$G = A \cdot B \cdot V^4 \quad (2)$$

$$Q_p = V \cdot B \cdot h \quad (3)$$

$$\beta = (1 - \frac{l}{R})^{-1} \quad (4)$$

де G і Q – витрати наносів і води; h і B- глибина і ширина русла; V – швидкість руслового потоку; A – коефіцієнт, що враховують фізичні властивості наносів; β – коефіцієнт трансформації руслової витрати; l – відстань від початку стиснення; R - параметр центральної струмини.

Коефіцієнт трансформації руслової витрати $\beta = \frac{Q_p}{Q_{np}}$ у створі початку стиснення потоку $l = 0$ змінюється від $\beta = 1$ до свого максимального значення у створі під мостом $\beta = \beta_{\grave{ì}}$. Будемо вважати, що повінь (вихід води на заплави) починається у момент часу $t = 0$ і відбувається з постійною у часі загальною Q_{np}, а значить і русловою витратою $Q_p = \beta \cdot Q_{np}$. Вважається, що ширина русла B у зоні впливу мостового переходу теж постійна і від часу не залежить. З урахуванням останнього зауваження із рівняння (3) отримаємо зв'язок між швидкістю потоку у стиснутому підмостовому руслі з її природним значенням

$$V \cdot h = \beta \cdot V_{np} \cdot h_{np} \quad (5)$$

З метою отримання диференційного рівняння відносно швидкості потоку $V(\beta, t)$ у зоні впливу мостового переходу визначимо частинні похідні $\frac{\partial G}{\partial l}$ і $\frac{\partial h}{\partial t}$ як функції від V

$$\frac{\partial G}{\partial l} = \frac{\partial G}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial l} = \frac{4 \cdot A \cdot B}{R} \cdot \beta^2 \cdot V^3 \cdot \frac{\partial V}{\partial \beta} \quad (6)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\beta \cdot Q_{np}}{B} \cdot \frac{1}{V^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial t} \tag{7}$$

Підставляючи вирази (6), (7) у рівняння (1) отримуємо

$$a \cdot \beta \cdot V^5 \cdot \frac{\partial V}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \tag{8}$$

$$a = \frac{4 \cdot A \cdot B}{R \cdot Q_{np}}$$

Диференційне рівняння (8) треба доповнити відповідними початковими умовами. Оскільки у початковий момент розвитку руслових деформацій глибина природна (русло ще не розмито), то очевидно, що

$$h(\beta, t)_{|t=0} = h_{np}$$

Тоді з урахуванням рівності (5) отримуємо початкові умови для швидкості

$$V(\beta, t)_{|t=0} = \beta \cdot V_{np} \tag{9}$$

Рівняння (8) разом з початковими умовами (9) визначає відповідну задачу Коші, механізм рішення якої детально розглянутий у [2] при визначенні глибини у розмиваємому руслі. Застосуємо його і в даному випадку. Для цього запишемо рівняння (8) у симетричній формі

$$\frac{d\beta}{a \cdot \beta \cdot V^5} = \frac{dt}{1} = \frac{dV}{0}$$

Рішення цієї системи зводиться до розв'язку будь яких двох рівнянь, які складаються шляхом сполучення складових. Поєднаємо перший член спочатку з третім, а потім з другим. Отримуємо систему двох звичайних рівнянь

$$\begin{cases} dV = 0 \\ \dfrac{d\beta}{\beta} = a \cdot V^5 \cdot dt \end{cases}$$

Вони легко інтегруються, після чого маємо

$$V = \Psi_1,$$
$$\ln\beta = a \cdot V^5 \cdot t + \Psi_2 \qquad (10)$$

де Ψ_1, Ψ_2 сталі інтегрування. Загальне рішення (8) представляє собою довільну диференційовану функцію від отриманих інтегралів

$$\hat{O}\,(V, \ln\beta - a \cdot V^5 \cdot t) = 0$$

Для здобуття частинного рішення рівняння (8) згідно початковим умовам (9) запишемо інтеграли Ψ_1 і Ψ_2 відносно початкового моменту часу $t = 0$

$$\Psi_1 = V_{|t=0}$$
$$\Psi_2 = \ln\beta$$

Тоді з урахуванням (9) можемо записати

$$\Psi_1 = V_{np} \cdot e^{\overline{\Psi}_2}$$

Заміняючи $\overline{\Psi}_1$ і $\overline{\Psi}_2$ їх виразами (10) отримуємо залежність, яка визначає швидкість потоку у розмиваємому руслі у довільний момент часу

$$V(\beta, t) = \beta \cdot V_{np} \cdot e^{-a \cdot V^5 \cdot t} \qquad (11)$$

Безпосередньою підстановкою із застосуванням формул для визначення похідної від неявної функції [1] неважко впевнитись, що функція (11) дійсно задовольняє рівняння (8) і початковим умовам (9) і згідно теореми Коші-Ковалевської представляє єдиний розв'язок відповідної задачі Коші (8), (9).

Залежність (11) відносно $V(\beta,t)$ є неявною , але її легко можна розв'язати відносно часу t і отримати явну залежність

$$t = \frac{1}{a \cdot V^5} \cdot \ln \frac{V_{np} \cdot \beta}{V} \qquad (12)$$

яка очевидно є більш зручна для досліджень.

Якщо у рівнянні (8) перейти від змінної β до змінної $\beta_1 = \ln \beta$, то з урахуванням рівності

$$\frac{\partial V}{\partial \beta} = \frac{\partial V}{\partial \beta_1} \cdot \frac{\partial \beta_1}{\partial \beta} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{\partial V}{\partial \beta_1}$$

рівняння (8) у змінних β_1, t приймає вигляд

$$a \cdot V^5 \cdot \frac{\partial V}{\partial \beta_1} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \qquad (13)$$

Рівняння (13) відноситься до спеціального класу квазілінійних рівнянь першого порядку і називається рівнянням переносу. До рівняння переносу, яке у загальному має вигляд

$$\frac{\partial y}{\partial t} + c(y) \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

зводиться багато задач механіки і газодинаміки [3], тому його дослідження, особливо у випадку постановки змішаної крайової задачі, є достатньо актуальною проблемою.

Література

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – М, 1968. – 556 с.

2. Ткачук С.Г. Теорія розмивів на мостових переходах. – Донецьк, 2009. – 200 с.

3. Уизем Д. Линейные и нелинейные волны. –М.: Мир, 1977. – 622 с.