Applied problems of information systems operation

УДК 519.668:319.66 **doi:** https://doi.org/10.20998/2522-9052.2022.3.11

В. Ю. Дубницький[1], А. М. Кобилін[1], О. А. Кобилін[2], Ю. І. Кушнерук[3], Ю. І. Шевяков[3]

[1] ННІ “Каразінський банківський інститут” ХНУ імені В. Н. Каразіна, Харків, Україна
[2] Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна
[3] Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, Україна

ОБЧИСЛЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ З ІНТЕРВАЛЬНИМ АРГУМЕНТОМ, ВИЗНАЧЕНИМ В ГІПЕРБОЛІЧНІЙ ФОРМІ

Анотація. Наведено відомості про інтервальні числа, представлені в класичному вигляді, системі ЦЕНТР – РАДІУС та в гіперболічному вигляді. Запропоновано правила переходу від однієї із форм подання інтервальних чисел до інших. Наведено відомості про комплексні інтервальні числа, дійсна і уявна частина яких представлені в гіперболічному вигляді. Описано правила виконання основних арифметичних дій з цими числами та обчислення інтервальних значень показникової, логарифмічної функції, прямих та обернених тригонометричних функцій, прямих та обернених гіперболічних функцій. Для функцій комплексного змінного наведено відомості про їхню дійсну та уявну частину. Перелік функцій відповідає функціям комплексного змінного, що входять до системи EXCEL. Отримано співвідношення для визначення дійсної та уявної частини функцій секансу, косекансу, тангенсу та котангенсу для кругових тригонометричних та гіперболічних функцій, які були відсутні у найбільш поширеній довідковій літературі. Наведено приклади, що ілюструють застосування запропонованої методики.

Ключові слова: інтервальні обчислення; функції комплексної змінної; комплексні інтервальні числа.

Вступ

На даний час для обчислень, в яких вхідні дані обтяжено невизначеністю, що виникає в процесі їх отримання, загальноприйняте розрізняти невизначеності типу А і типу В. Відповідно до роботи [1] розрізняють невизначеність типу А, яку оцінюють статистичними методами, та невизначеність типу В, яка має ознаки, що притаманні для нестохастичної невизначеності. У цьому випадку використовують методи інтервального аналізу [2, 3]. Приклади його застосування для розв’язання різноманітних задач та відомості про програми, які призначені для цього, описано у роботах [4-8]. Особливо слід зазначити застосування інтервальних методів для розв’язання деяких задач електротехніки [9, 10]. У зв'язку з цим в роботі [11] викладено досвід застосування інтервальних чисел для виконання основних арифметичних дій із комплексними числами. Авторам даного повідомлення не вдалося знайти в доступній їм літературі опис способів застосування інтервальних обчислень для визначення чисельних значень функцій комплексного змінного.

Аналіз літератури. Відповідно до [2, 3, 12, 13] в даній роботі дійсне інтервальне число [A] буде визначено у вигляді пари дійсних чисел:

$$[A] = (a_1, a_2) \quad 0 < a_1 \le a_2 . \tag{1}$$

Будемо говорити, що умова (1) визначає інтервальне число в класичній формі. Основні арифметичні дії з інтервальними числами в цьому випадку виконують за правилами:

$$\begin{aligned}[A]+[B] &= (a_1,a_2)+(b_1,b_2) = \\ &= [(a_1+b_1),(a_2+b_2)];\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}[A]-[B] &= (a_1,a_2)-(b_1,b_2) = \\ &= [(a_1-b_2),(a_2-b_1)];\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}[A]\cdot[B] &= (\min(U),\max(U)), \\ U &= (a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2b_2);\end{aligned} \tag{4}$$

$$[A]/[B] = (a_1,a_2)\cdot(1/b_2, 1/b_1), \quad 0 \notin [b_1,b_2] . \tag{5}$$

В роботі [3] запропоновано представлення інтервального числа $\langle A\rangle$ у системі ЦЕНТР-РАДІУС як упорядкованої пари дійсних чисел:

$$\langle A\rangle = \langle a, r_a\rangle, \tag{6}$$

де

$$a = \frac{a_1+a_2}{2}, \; r_a = \frac{a_2-a_1}{2} . \tag{7}$$

У подальшому будемо приймати, що $|r_a| < |a|$. Інші випадки в роботі не розглянуто, тому що вони не відповідали фізичному змісту задач, які розв’язували автори даного повідомлення. Основні арифметичні дії з інтервальними числами в системі ЦЕНТР-РАДІУС виконують за правилами, наведеними в [9]:

$$A+B = \langle a+b, r_a+r_b\rangle; \tag{8}$$

$$A-B = \langle a-b, r_a+r_b\rangle. \tag{9}$$

У роботі [14] прийнята умова, що межі інтервалів, які визначають дані числа, утворені обчислювальними помилками, похибками вимірювань або неповним знанням області зміни деякої фізичної величини. Тому повинні виконуватися нерівності:

$$a \ge r_a \ge 0, \; b \ge r_b \ge 0 . \tag{10}$$

У протилежному випадку будемо вважати, що задача, в межах наших уявлень про об'єкт дослідження, фізичного змісту не має.

В роботі [3] запропоновано формули для виконання в системі ЦЕНТР-РАДІУС операцій ділення та множення в такому вигляді:

$$\langle a,r_a\rangle\langle b,r_b\rangle=\langle ab+r_ar_b,ar_b+br_a\rangle; \qquad (11)$$

$$\frac{\langle a,r_a\rangle}{\langle b,r_b\rangle}=\left\langle\frac{ab+r_ar_b}{b^2-r_b^2},\frac{ar_b+br_a}{b^2-r_b^2}\right\rangle. \qquad (12)$$

В роботі [3] запропоновано піднесення в цілий додатний степінь інтервального числа [A]=(a_1,a_2), яке визначено в класичній формі, виконувати за правилом:

$$[A]^n=\begin{cases}\left[a_1^n,a_2^n\right], & \text{якщо } a_1>0;\\ \left[0,\max\left\{a_1^n,a_2^n\right\}\right], & \text{якщо}\\ \qquad 0\in\left[a_1,a_2\right], n=2k, k=1,2,...;\\ \left[a_1^n,a_2^n\right], & \text{якщо}\\ \qquad 0\in\left[a_1,a_2\right], n=2k+1, k=0,1,...;\\ \left[a_2^n,a_1^n\right], & \text{якщо } a_2<0, n=2k, k=1,2,...;\\ \left[a_1^n,a_2^n\right], & \text{якщо } a_2<0, n=2k+1.\end{cases} \qquad (13)$$

Для тієї ж операції, яку виконують в системі ЦЕНТР-РАДІУС, в роботі [9] наведено співвідношення:

$$A^n=\langle a,r_a\rangle^n=\langle G,R\rangle; \qquad (14)$$

за умови, що $n\in Z$. Тоді:

$$G=\sum_{k=0}^{n}C_n^{2k}r_a^{2k}a^{n-2k};$$
$$R=\sum_{k=0}^{n}C_n^{2k+1}r_a^{2k+1}|a|^{n-(2k+1)}. \qquad (15)$$

Для $n=2$ отримаємо:

$$\langle A\rangle^2=\left\langle a^2+r_a^2,2\cdot|a|\cdot r_a\right\rangle. \qquad (16)$$

В роботах [14, 15] запропоновано гіперболічну форму подання інтервального числа. У цьому варіанті інтервальне число x записують у вигляді:

$$x=\rho(ch\phi+\theta\cdot sh\phi). \qquad (17)$$

У співвідношенні (17) прийнято, що θ – спеціальний символ. За замовченням вважають, що $\theta^2=1$. Величину ρ в роботах [14, 15] названо гіпермодулем, величину ϕ – аргументом гіперболічного інтервального числа (гіперболічного числа, згідно з термінологією, яка прийнята в роботі [14]). Величини ρ і ϕ визначають за співвідношеннями:

$$\rho=\sqrt{a_1a_2},\ \phi=\frac{1}{2}\ln\frac{a+r_a}{a-r_a}=\frac{1}{2}\ln\frac{a_2}{a_1}. \qquad (18)$$

Із співвідношення (18) виходить, що гіпермодуль – це середньо геометрична величина меж інтервалу. Відповідно до роботи [5] в табл. 1 наведено зв'язки між різними формами подання інтервальних чисел, які буде розглянуто в даній роботі.

Основні арифметичні дії для пари гіперболічних чисел $x=\rho(ch\phi+\theta\cdot sh\phi)$ та $y=\delta(ch\psi+\theta\cdot sh\psi)$ відповідно до [14,15], виконують за правилами:

$$x+y=(\rho\cdot ch\phi+\delta\cdot ch\psi)+\theta(\rho\cdot sh\phi+\delta\cdot sh\psi). \qquad (19)$$

$$x-y=(\rho\cdot ch\phi-\delta\cdot ch\psi)+\theta(\rho\cdot sh\phi-\delta\cdot sh\psi). \qquad (20)$$

$$x\cdot y=\rho\delta(ch(\phi+\psi)+\theta\cdot sh(\phi+\psi)) \qquad (21)$$

$$x^{-1}=(\rho(ch\phi+\theta\cdot sh\phi))^{-1}= =\left(ch(-\phi)+\theta\cdot sh(-\phi)\right)/\rho. \qquad (22)$$

$$\frac{x}{y}=\frac{\rho}{\delta}(ch(\phi-\psi)+\theta\cdot(sh(\phi-\psi)). \qquad (23)$$

$$x^n=(\rho(ch\phi+\theta\cdot sh\phi))^n= =\rho^n\left(ch(n\phi)+\theta\cdot sh(n\phi)\right). \qquad (24)$$

Також в роботі [14] розглянуто випадки, в яких одна з величин стала. Тоді отримаємо:

$$c\pm x=(c\pm\rho\cdot ch(\phi))\pm\theta\cdot sh(\phi). \qquad (25)$$

Для множення сталої величини c на гіперболічне число x отримаємо:

$$cx=c\rho(ch\phi+\theta\cdot sh\phi). \qquad (26)$$

Таблиця 1 – **Зв'язки між різними формами подання інтервальних чисел**

Форми подання інтервальних чисел	Форми подання інтервальних чисел		
	Класична, $[A]=(a_1,a_2)$	Система ЦЕНТР-РАДІУС, $\langle A\rangle=\langle a,r_a\rangle$	Гіперболічна, $x=f(\rho,\phi)$
Класична, $[A]=(a_1,a_2)$	$[A]=(a_1,a_2)$	$[A]=(a-r_a,a+r_a)$	$[A]=(\rho[ch\phi-sh\phi]$; $\rho[ch\phi+sh\phi])$
Система ЦЕНТР-РАДІУС, $\langle A\rangle=\langle a,r_a\rangle$	$\langle A\rangle=\left\langle\frac{a_1+a_2}{2},\frac{a_2-a_1}{2}\right\rangle$	$\langle A\rangle=\langle a,r_a\rangle$	$\rho=\sqrt{a_1a_2}$; $\phi=\frac{1}{2}\ln\frac{a_2}{a_1}$
Гіперболічна, $x=f(\rho,\phi)$	$[A]=\left(\sqrt{a_1a_2}ch(\phi),\sqrt{a_1a_2}sh(\phi)\right)$; $\phi=\frac{1}{2}\ln\frac{a_2}{a_1}$	$\langle A\rangle=\sqrt{a^2-r_a^2}\cdot(ch\phi+\theta\cdot sh\phi)$; $\phi=\frac{1}{2}\ln\frac{a+r_a}{a-r_a}$	$x=\rho(ch\phi+\theta\cdot sh\phi)$

Для операції ділення у вказаній роботі наведено два варіанти операції. У першому варіанті:

$$\frac{x}{c} = \frac{\rho}{c}(ch\phi + \theta \cdot sh\phi) . \quad (27)$$

У другому варіанті:

$$\frac{c}{x} = \frac{c}{\rho}(ch\phi - \theta \cdot sh\phi). \quad (28)$$

Визначимо, використовуючи співвідношення (24) та (19) часткову суму ряду виду:

$$T = \sum_{j-1}^{k} \alpha_j x^j = \sum_{j=1}^{k} \left[a_j \rho \left(ch\phi + \theta \cdot sh\phi \right) \right]^j = = \sum_{j-1}^{k} a_j \rho^j \left(ch(j\phi) + \theta \cdot sh(j\phi) \right). \quad (29)$$

У роботах [11-13] та [16-18] описано застосування інтервальних чисел при діях з комплексними числами. Відповідно до цих робіт комплексне інтервальне число визначимо таким чином:

$$\left[\overset{\bullet}{Z}\right] = [X] + i[Y] = (x_1, x_2) + i(y_1, y_2) \quad i = \sqrt{-1} . \quad (30)$$

Тобто, геометричним образом комплексного інтервального числа буде прямокутник, визначений на комплексній площині, геометричним образом дійсного інтервального числа буде відрізок числової осі. Відповідно до [19] для зручності подальших обчислень представимо комплексне інтервальне число у вигляді впорядкованої пари $\left[\overset{\bullet}{Z}\right] = \langle [X],[Y] \rangle$ і розглянемо основні арифметичні дії за правилами:

$$\left[\overset{\bullet}{Z}\right]_1 + \left[\overset{\bullet}{Z}\right]_2 = \left\langle [X]_1 + [X]_2 ; [Y]_1 + [Y]_2 \right\rangle ; \quad (31)$$

$$\left[\overset{\bullet}{Z}\right]_1 - \left[\overset{\bullet}{Z}\right]_2 = \left\langle [X]_1 - [X]_2 ; [Y]_1 - [Y]_2 \right\rangle ; \quad (32)$$

$$\left[\overset{\bullet}{Z}\right]_1 \left[\overset{\bullet}{Z}\right]_2 = = \left\langle [X]_1 [X]_2 - [Y]_1 [Y]_2 ; [X]_1 [Y]_2 + [X]_2 [Y]_1 \right\rangle ; \quad (33)$$

$$\left[\overset{\bullet}{Z}\right]_1 \Big/ \left[\overset{\bullet}{Z}\right]_2 = = \left\langle \frac{[X]_1 [X]_2 + [Y]_1 [Y]_2}{[X]_1^2 + [X]_2^2} ; \frac{[X]_2 [Y]_1 - [X]_1 [Y]_2}{[X]_1^2 + [X]_2^2} \right\rangle . \quad (34)$$

Для визначення модуля дійсного інтервального числа вигляду (1) в роботах [2, 12, 13] наведено співвідношення:

$$\|[A]\| = \max\left\{ |a_1|, |a_2| \right\} . \quad (35)$$

Для модуля комплексного інтервального числа вигляду (29) в роботах [16, 18] є співвідношення:

$$\left\|\left[\overset{\bullet}{Z}\right]\right\| = \sqrt{\|[X]\|^2 + \|[Y]\|^2} = = \sqrt{|\max(x_1, x_2)|^2 + |\max(y_1, y_2)|^2} . \quad (36)$$

Виконання арифметичних дій з інтервальними комплексними числами, які представлено в гіперболічній формі, розглянуто в роботі [11]. Розглянемо пару комплексних інтервальних чисел, в яких дійсну і уявну частини представлено в гіперболічній формі відповідно до співвідношення (17):

$$\left[\overset{\bullet}{Z}\right]_1 = x_1 + iy_1 = = \left\{ \rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi) \right\} + i\left\{ \delta(ch\psi + \theta \cdot sh\psi) \right\} ; \quad (37)$$

$$\left[\overset{\bullet}{Z}\right]_2 = x_2 + iy_2 = = \left\{ \gamma(ch\omega + \theta \cdot sh\omega) \right\} + i\left\{ \lambda(ch\eta + \theta \cdot sh\eta) \right\} . \quad (38)$$

Використовуючи (19)…(23) і (30)…(33), отримаємо наступні співвідношення для основних арифметичних дій з комплексними інтервальними числами, представленими в гіперболічній формі. Суму двох інтервальних комплексних чисел у цьому випадку можна представити у вигляді:

$$T_1 = \left[\overset{\bullet}{Z}\right]_1 + \left[\overset{\bullet}{Z}\right]_2 = R_1 + iE_1 , \quad (39)$$

де $$R_1 = (\rho ch\phi + \gamma ch\omega) + \theta\left(\rho sh\phi + \lambda sh\omega\right) ; \quad (40)$$

$$E_1 = (\delta ch\psi + \lambda ch\eta) + \theta\left(\rho sh\psi + \lambda sh\eta\right) . \quad (41)$$

Різницю двох інтервальних комплексних чисел у цьому випадку можна представити у вигляді:

$$T_2 = \left[\overset{\bullet}{Z}\right]_1 - \left[\overset{\bullet}{Z}\right]_2 = R_2 + iE_2 , \quad (42)$$

де $$R_2 = (\rho ch\phi - \lambda ch\omega) + \theta\left(\rho sh\phi - \lambda sh\omega\right) ; \quad (43)$$

$$E_2 = (\delta ch\psi - \lambda ch\eta) + \theta\left(\rho sh\psi - \lambda sh\eta\right) . \quad (44)$$

Добуток двох інтервальних комплексних чисел у цьому випадку можна представити у вигляді:

$$T_3 = \left[\overset{\bullet}{Z}\right]_1 \times \left[\overset{\bullet}{Z}\right]_2 = R_3 + iE_3 , \quad (45)$$

де $$R_3 = \rho\gamma\left[ch(\phi + \omega) + \theta sh(\phi + \omega)\right] - -\lambda\delta\left[ch(\psi + \eta) + \theta sh(\psi + \eta)\right] ; \quad (46)$$

$$E_3 = \rho\lambda\left[ch(\phi + \eta) + \theta sh(\phi + \eta)\right] + +\gamma\delta\left[ch(\omega + \psi) + \theta sh(\omega + \psi)\right] . \quad (47)$$

Результат ділення двох інтервальних комплексних чисел у цьому випадку можна представити у вигляді:

$$T_4 = \left[\overset{\bullet}{Z}\right]_1 \Big/ \left[\overset{\bullet}{Z}\right]_2 = R_4 + iE_4 , \quad (48)$$

де
$$R_4 = \frac{\left[\rho\gamma\left(ch(\phi+\omega)+\theta\cdot sh(\phi+\omega)\right)\right]+ +\left[\delta\lambda\left(ch(\psi+\eta)+\theta\cdot sh(\psi+\eta)\right)\right]}{\left[\gamma^2\left(ch(2\omega)+\theta\cdot sh(2\omega)\right)\right]+ +\left[\lambda^2\left(ch(2\eta)+\theta\cdot sh(2\eta)\right)\right]}; \quad (49)$$

$$E_4 = \frac{\left[\gamma\delta\left(ch(\omega+\psi)+\theta\cdot sh(\omega+\psi)\right)\right]- -\left[\rho\lambda\left(ch(\phi+\eta)+\theta\cdot sh(\phi+\eta)\right)\right]}{\left[\gamma^2\left(ch(2\omega)+\theta\cdot sh(2\omega)\right)\right]+ +\left[\lambda^2\left(ch(2\eta)+\theta\cdot sh(2\eta)\right)\right]}. \quad (50)$$

Піднесення комплексного інтервального числа $\left[\dot{Z}\right]$, яке представлено в гіперболічній формі у вигляді співвідношення

$$\left[\dot{Z}\right] = \left\{\rho(ch\phi+\theta\cdot sh\phi)\right\} + i\left\{\delta(ch\psi+\theta\cdot sh\psi)\right\} \quad (51)$$

у цілий додатний степінь n, виконуємо згідно з співвідношенням:

$$\left[\dot{Z}\right]^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot i^k \rho^{n-k}\left[\begin{array}{c} ch((n-k)\phi)+ \\ +\theta\cdot sh((n-k)\phi)\end{array}\right]\times \times\delta^k\left[ch(k\psi)+\theta\cdot sh(k\psi)\right].$$

Величину i^k визначимо за співвідношенням:

$$i^k = \begin{cases} 1, & якщо \quad k \equiv 4\,\mathrm{mod}(0); \\ i, & якщо \quad k \equiv 4\,\mathrm{mod}(1); \\ -1, & якщо \quad k \equiv 4\,\mathrm{mod}(2); \\ -i, & якщо \quad k \equiv 4\,\mathrm{mod}(3). \end{cases} \quad (52)$$

Для визначення аргументу комплексного інтервального числа, яке представлено в гіперболічній формі, слід виконати наступні перетворення:

$$d = \frac{\delta(ch\psi+\theta\cdot sh\psi)}{\rho(ch\phi+\theta\cdot sh\phi)} = \frac{\delta}{\rho}\times \times\left[ch(\psi-\phi)+\theta\cdot sh(\psi-\phi\right]. \quad (53)$$

Приймемо, що

$$\delta/\rho = \chi\ ;\psi-\phi=\tau\,. \quad (54)$$

Тоді співвідношення (53) прийме вигляд:

$$d = \chi(ch\tau+\theta\cdot sh\tau)\,. \quad (55)$$

Отже:

$$\arg\left[\dot{Z}\right] = \begin{cases} arctg(d), & якщо \quad R>0, \\ \pi + arctg(d), & якщо \quad R<0, E\ge 0, \\ -\pi + arctg(d), & якщо \quad R<0, E<0, \\ \pi/2, & якщо \quad R=0, E>0, \\ -\pi/2, & якщо \quad R=0, E<0. \end{cases} \quad (56)$$

В умову (56) входять інтервальні числа і відносини між ними: <, >, $\ge$. Застосування цих відносин для порівняння інтервальних величин розглянуто в роботах [4, 20, 21]

Обчислення функції $\left[U\right] = arctg\left[X\right]$ для інтервального числа, заданого в гіперболічній формі, слід виконувати згідно з співвідношенням (57):

$$arctg(d) = = \sum_{k=0}^{5} a_{2k+1}\left\{\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{2k+1}\left[\begin{array}{c} ch((2k+1)\cdot(\psi-\phi))+ \\ +\theta\cdot sh((2k+1)\cdot(\psi-\phi))\end{array}\right]\right\}. \quad (57)$$

Чисельні значення коефіцієнтів наведено в роботі [11]. Визначення модуля інтервального комплексного числа, представленого в гіперболічній формі, слід виконувати згідно з співвідношенням, наведеним в роботі [11].

$$\left\|\left[\dot{Z}\right]\right\| = \sqrt{\left(\dot{z}\right)^2 - r_z^2}\times \times\left(ch\left(\frac{1}{2}\ln\frac{\dot{z}+r_z}{\dot{z}-r_z}\right)+\theta\cdot sh\left(\frac{1}{2}\ln\frac{\dot{z}+r_z}{\dot{z}-r_z}\right)\right). \quad (58)$$

Оскільки результат розрахунку, який наведено в (58), отримано в системі ЦЕНТР-РАДІУС, то для переходу до гіперболічної форми інтервального числа використаємо співвідношення, які наведені в табл. 1. Обчислення кореня цілочисельного ступеня *n* для комплексного інтервального числа, заданого в гіперболічній формі, слід виконувати згідно з співвідношенням:

$$\left[\dot{Z}\right]^{1/n} = \left[H\right]^{1/(2n)}\left[T\right]; \quad (59)$$

де

$$\left[H\right]^{1/(2n)} = \sqrt{h^2 - r_h^2}\times \times\left(ch\left(\frac{1}{2}\ln\frac{h+r_z}{h-r_h}\right)+\theta\cdot sh\left(\frac{1}{2}\ln\frac{h+r_z}{h-r_h}\right)\right); \quad (60)$$

$$\left[T\right] = \left[\cos\frac{arctg(d)+2s\pi}{n} + i\sin\frac{arctg(d)+2s\pi}{n}\right]. \quad (61)$$

В співвідношеннях (59), (60) величини h та r_h – центр та радіус, визначений для відповідного інтервального гіперболічного числа згідно з табл. 1.

З зробленого аналізу літератури приходимо до висновку, що операції множення, ділення та піднесення в цілочисельній степінь найбільш доцільно виконувати з комплексними інтервальними числами, які визначено в гіперболічній формі. Операцію обчислення кореня ступеня *n* з інтервального комплексного числа, представленого в гіперболічній формі, найбільш доцільно виконувати з сумісним використанням системи ЦЕНТР-РАДІУС та в гіперболічної формі подання інтервального числа.

Постановка задачі. Пропозиції до методики обчислення значень найбільш поширених елементарних функцій комплексної змінної з інтервальним аргументом.

Отримані результати. Розглянемо функцію

$$f\left[\overset{\bullet}{Z}\right]=u([X],[Y]+iv([X],[Y]) \qquad (62)$$

інтервального комплексного змінного $\left[\overset{\bullet}{Z}\right]$, вид якого визначено співвідношенням (30). Тобто потрібно для кожної обраної функції виду (62) отримати співвідношення виду:

$$f(z_1,z_2)= \\ =u\left[(x_1,x_2);(y_1,y_2)\right]+iv\left[(x_1,x_2);(y_1,y_2)\right]. \qquad (63)$$

При виборі функцій, розглянутих у даному повідомленні, використано перелік функцій комплексного змінного, які прийняті у системі EXCEL [20]. У тому випадку, коли у співвідношенні (63) використані вироджені інтервальні числа, воно набуде такого вигляду:

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y). \qquad (64)$$

Розв'язання цього завдання для функцій, наведених у табл. 2 від № 1до № 14 розглянуто, наприклад, [19, 21, 22] і наведено в табл. 2. Для функцій від №15 до №21 цієї таблиці рішення отримано авторами даного повідомлення.

Для функції $\sec(z)$ співвідношення (64) буде таким:

$$\sec(z)=\frac{1}{cos\,z}=\frac{1}{cos(x+iy)}=\frac{1}{cos(x)cos(iy)-sin(x)sin(iy)}=\frac{1}{cos(x)ch(y)-isin(x)sh(y)}= \\ =\frac{cos(x)ch(y)}{cos^2(x)ch^2(y)+sin^2(x)sh^2(y)}+i\frac{sin(x)sh(y)}{cos^2(x)ch^2(y)+sin^2(x)sh^2(y)}=\frac{2cos(x)ch(y)}{cos(2x)+ch(2y)}+i\frac{2sin(x)sh(y)}{cos(2x)+ch(2y)}, \qquad (65)$$

оскільки

$$cos^2(x)ch^2(y)+sin^2(x)sh^2(y)=\frac{1+cos(2x)}{2}ch^2(y)+\frac{1-cos(2x)}{2}sh^2(y)= \\ =\frac{1}{2}\left(ch^2(y)+sh^2(y)\right)+\frac{cos(2x)}{2}\left(ch^2(y)-sh^2(y)\right)=\frac{1}{2}\left(cos(2x)+ch(2y)\right). \qquad (66)$$

У подальшому в подібних співвідношеннях будемо використовувати формули зниження ступеня для $cos^2(x)$ та $sin^2(x)$, як в (66). Для функції *cosec(z)* співвідношення (64) буде таким:

$$cosec(z)=\frac{1}{sin\,z}=\frac{1}{sin(x+iy)}=\frac{1}{sin(x)cos(iy)+cos(x)sin(iy)}=\frac{1}{sin(x)ch(y)+icos(x)sh(y)}= \\ =\frac{sin(x)ch(y)}{sin^2(x)ch^2(y)+cos^2(x)sh^2(y)}-i\frac{cos(x)sh(y)}{sin^2(x)ch^2(y)+cos^2(x)sh^2(y)}=\frac{2sin(x)ch(y)}{ch(2y)-cos(2x)}-i\frac{2cos(x)sh(y)}{ch(2y)-cos(2x)}. \qquad (67)$$

Для функції $cosech(z)$ співвідношення (64) буде таким:

$$cosech(z)=\frac{1}{sh\,z}=\frac{1}{sh(x+iy)}=\frac{1}{sh(x)ch(iy)+ch(x)sh(iy)}=\frac{1}{sh(x)cos(y)+ich(x)sin(y)}= \\ =\frac{sh(x)cos(y)}{sh^2(x)cos^2(y)+ch^2(x)sin^2(y)}-i\frac{ch(x)sin(y)}{sh^2(x)cos^2(y)+ch^2(x)sin^2(y)}=\frac{2sh(x)cos(y)}{ch(2x)-cos(2y)}-i\frac{2ch(x)sin(y)}{ch(2x)-cos(2y)}. \qquad (68)$$

Для функції $th(z)$ співвідношення (64) буде таким:

$$th(z)=sh(z)/ch(z)=sh(x+iy)/ch(x+iy)= \\ =\frac{sh(x)ch(iy)+ch(x)sh(iy)}{ch(x)ch(iy)+sh(x)sh(iy)}=\frac{sh(x)cos(y)+ich(x)sin(y)}{ch(x)cos(y)+ish(x)sin(y)}=\frac{sh(2x)}{2\left(ch^2(x)cos^2(y)+sh^2(x)sin^2(y)\right)}+ \\ +i\frac{sin(2y)}{2\left(ch^2(x)cos^2(y)+sh^2(x)sin^2(y)\right)}=\frac{sh(2x)}{ch(2x)+cos(2y)}-i\frac{sin(2y)}{ch(2x)+cos(2y)}. \qquad (69)$$

Для функції $cth(z)$ співвідношення (64) буде таким:

$$cth(z)=ch(z)/sh(z)=ch(x+iy)/sh(x+iy)= \\ =\frac{ch(x)ch(iy)+sh(x)sh(iy)}{sh(x)ch(iy)+ch(x)sh(iy)}=\frac{ch(x)cos(y)+ish(x)sin(y)}{sh(x)cos(y)+ich(x)sin(y)}=\frac{sh(2x)}{2\left(sh^2(x)cos^2(y)+ch^2(x)sin^2(y)\right)}- \\ -i\frac{sin(2y)}{2\left(sh^2(x)cos^2(y)+ch^2(x)sin^2(y)\right)}=\frac{2sh(x)}{ch(2x)-cos(2y)}-i\frac{sin(2y)}{ch(2x)-cos(2y)}. \qquad (70)$$

Для функції ctg (z) співвідношення (64) буде таким:

$$ctg(z) = cos(z)/sin(z) = cos(x+iy)/sin(x+iy) =$$

$$= \frac{cos(x)cos(iy) - sin(x)sin(iy)}{sin(x)cos(iy) + cos(x)sin(iy)} = \frac{cos(x)ch(y) - isin(x)sh(y)}{sin(x)ch(y) + icos(x)sh(y)} = \frac{sin(2x)}{2\left(sin^2(x)ch^2(y) + cos^2(x)sh^2(y)\right)} - \quad (71)$$

$$-i\frac{sh(2y)}{2\left(sin^2(x)ch^2(y) + cos^2(x)sh^2(y)\right)} = \frac{sin(2x)}{ch(2x) - cos(2y)} - i\frac{sh(2y)}{ch(2x) - cos(2y)}.$$

Дійсна та уявна частини функцій комплексного змінного $z = x + iy$, включених до системи EXCEL, показані в табл. 2.

Таблиця 2 – **Дійсна та уявна частини функцій $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ комплексного змінного $z = x + iy$, включених до системи EXCEL**

№	Вид $f(z)$	$u(x,y)$	$v(x,y)$
1	z	x	y
2	z^2	$x^2 - y^2$	$2xy$
3	$\frac{1}{z}$	$\frac{x}{x^2+y^2}$	$-\frac{y}{x^2+y^2}$
4	$\frac{1}{z^2}$	$\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$	$-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$
5[1)]	$\frac{1}{z-(a+ib)}$	$\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2}$	$-\frac{2xy}{(x-a)^2+(y-b)^2}$
6	$\sqrt{z}$	$\pm\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}$	$\pm\sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}$
7	e^z	$e^x \cos y$	$e^x \sin y$
8	$\sin z$	$\sin xchy$	$\cos xshy$
9	$\cos z$	$\cos xchy$	$-\sin xshy$
10	shz	$shx\cos y$	$chx\sin y$
11	chz	$chx\cos y$	$shx\sin y$
12	tgz	$\frac{\sin 2x}{\cos 2x + ch2y}$	$\frac{sh2x}{\cos 2x + ch2y}$
13	thz	$\frac{sh2x}{ch2x + \cos 2y}$	$\frac{\sin 2y}{ch2x + \cos 2y}$
14	$\ln z$	$\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$	$arctg\frac{y}{x} + 2k\pi$
15	$\sec(z)$	$\frac{2\cos(x)ch(y)}{\cos(2x)+ch(2y)}$	$\frac{2\sin(x)sh(y)}{\cos(2x)+ch(2y)}$
16	$\mathrm{sech}(z)$	$\frac{2ch(x)\cos(y)}{ch(2x)+\cos(2y)}$	$-\frac{2sh(x)\sin(y)}{ch(2x)+\cos(2y)}$
17	$\cos ec(z)$	$\frac{2\sin(x)ch(y)}{ch(2y)-\cos(2x)}$	$-\frac{2\cos(x)sh(y)}{ch(2y)-\cos(2x)}$
18	$\cos eh(z)$	$\frac{2sh(x)\cos(y)}{ch(2x)-\cos(2y)}$	$-\frac{2ch(x)\sin(y)}{ch(2x)-\cos(2y)}$
19	$tg(z)$	$\frac{sh(2x)}{ch(2x)+\cos(2y)}$	$-\frac{\sin(2y)}{ch(2x)+\cos(2y)}$
20	$cth(z)$	$\frac{sh(2x)}{ch(2x)-\cos(2y)}$	$-\frac{\sin(2y)}{ch(2x)-\cos(2y)}$
21	$ctg(z)$	$\frac{\sin(2x)}{ch(2x)-\cos(2y)}$	$-\frac{sh(2x)}{ch(2x)-\cos(2y)}$

1) Числа a, b - дійсні.

При вирішенні цієї задачі для інтервальних комплексних чисел слід змінні x і y, зазначені в табл. 2, вважати інтервальними числами, представленими в гіперболічній формі і мають вигляд:

$$x = \rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi)\ ,\ y = \delta(ch\psi + \theta \cdot sh\psi). \quad (72)$$

Далі, за правилами, викладеними в [2, 3], виконати інтервальне розширення функцій $u(x,y)$ та $v(x,y)$. Для цього в табл. 3 описані способи виконання основних арифметичних процесів з інтервальними числами, представленими в гіперболічній формі.

Таблиця 3 – **Способи виконання основних арифметичних процесів з інтервальними числами, представленими в гіперболічній формі**

Вид операції	Співвідношення, що реалізує дану операцію	
	№	Вид
$x+y$	(19)	$(\rho \cdot ch\phi + \delta \cdot ch\psi) + \theta(\rho \cdot sh\phi + \delta \cdot sh\psi)$
$x-y$	(20)	$(\rho \cdot ch\phi - \delta \cdot ch\psi) + \theta(\rho \cdot sh\phi - \delta \cdot sh\psi)$
$x \cdot y$	(21)	$\rho\delta(ch(\phi+\psi) + \theta \cdot sh(\phi+\psi))$
$\frac{1}{x}$	(22)	$\frac{1}{\rho}(ch(-\phi) + \theta \cdot sh(-\phi)).$
$\frac{x}{y}$	(23)	$\frac{\rho}{\delta}(ch(\phi-\psi) + \theta \cdot (sh(\phi-\psi))$
x^n	(24)	$\rho^n(ch(n\phi) + \theta \cdot sh(n\phi))$
$c \pm x$	(25)	$(c \pm \rho \cdot ch(\phi)) \pm \theta \cdot sh(\phi)$
cx	(26)	$c\rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi).$
$\frac{x}{c}$	(27)	$\frac{\rho}{c}(ch\phi + \theta \cdot sh\phi)$
$\frac{c}{x}$	(28)	$\frac{c}{\rho}(ch\phi - \theta \cdot sh\phi).$

Розглянемо застосування запропонованої методики з прикладу функції комплексного змінного $f(z) = z^2$ в інтервальному вигляді з аргументом z, представленим у гіперболічному вигляді. Для цього виконаємо інтервальне розширення цієї функції використовуючи співвідношення (17), (30), (37), співвідношення, наведені в табл. 2, (№2) та табл. 3 (№ №20, 21) та співвідношення (72) представимо функцію $f(z) = z^2$ у вигляді:

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \left(x^2 - y^2\right) + 2ixy. \quad (73)$$

Подаємо дійсну частину співвідношення (73) у вигляді:

$$u(x,y) = \left[\rho^2 ch(2\phi) - \delta^2 ch(2\psi)\right] + \\ +\theta\left[\rho^2 sh(2\phi) - \delta^2 sh(2\psi\right]. \quad (74)$$

Представимо уявну частину співвідношення (73) у вигляді:

$$v(x,y) = 2\rho\delta\left[ch(\phi+\psi) + \theta\cdot sh(\phi+\psi)\right]. \quad (75)$$

Приймемо, що:

$$\begin{cases} \rho^2 ch(2\phi) - \delta^2 ch(2\psi) & = & a \\ \rho^2 sh(2\phi) - \delta^2 sh(2\psi & = & b \end{cases}. \quad (76)$$

Використовуючи (76) напишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \gamma\cdot ch\eta & = & a \\ \gamma\cdot sh\eta & = & b \end{cases}. \quad (77)$$

Розв'язуючи систему (77) відносно γ і η визначим корені системи (77), величини $\hat{\gamma}$ і $\hat{\eta}$.

Аналогічно перетворимо відношення (75):

$$\begin{cases} 2\rho\delta\cdot ch(\phi+\psi) & = & c \\ 2\rho\delta\cdot ch(\phi+\psi) & = & d \end{cases}. \quad (78)$$

Використовуючи (78), запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \mu\cdot ch(\omega) & = & c \\ \mu\cdot sh(\omega) & = & d \end{cases}. \quad (79)$$

Вирішуючи систему (79) щодо μ і ω визначимо її коріння: величини $\hat{\mu}$ та $\hat{\omega}$. Тоді співвідношення (73) набуде вигляду:

$$f(z) = \hat{\gamma}\left[ch(\hat{\eta}) + \theta\cdot sh(\hat{\eta})\right] + \\ +i\left[(\hat{\mu}(ch(\hat{\omega}) + \theta\cdot sh(\hat{\omega}))\right]. \quad (80)$$

Співвідношення (80) дозволяє отримати функцію інтервальної комплексної змінної, еквівалентну вихідної, та придатної для подальшої роботи з комплексними функціями та числами, представленими в гіперболічній формі.

Для отримання значень кругових та гіперболічних функцій, зазначених у табл. 3, можна використовувати калькулятор, описаний у [4], з урахуванням співвідношень (73), або розкладання цих функцій у степеневі ряди.

Розглянемо часткову суму ряду виду:

$$S = \sum_{k=1}^{n}\left[\beta_k(\rho^k(ch(k\phi) + \theta\cdot sh(k\phi))\right]. \quad (81)$$

та позначимо величини:

$$p = \sum_{1}^{k}\beta_k\rho^k ch(k\phi), \quad q = \sum_{1}^{k}\beta_k\rho^k sh(k\phi) \quad (82)$$

та отримаємо величину часткової суми цього ряду у вигляді інтервального числа, визначеного в гіперболічній формі:

$$w = \mu(ch\gamma + \theta\cdot sh\gamma), \quad (83)$$

де величини μ та γ корені системи:

$$\begin{cases} p = \mu\cdot ch(\gamma); \\ q = \mu\cdot sh(\lambda). \end{cases} \quad (84)$$

розв'язаної відносно μ та γ.

Детальний розгляд цих перетворень для функцій, зазначених в табл. 2, виходить за рамки даного повідомлення та має стати предметом подальших досліджень.

Висновки

1. Наведено відомості про інтервальні числа, представлені в класичному вигляді, системі ЦЕНТР - РАДІУС і в гіперболічному вигляді. Запропоновано правила переходу від однієї з форм подання інтервальних чисел до інших. Наведено відомості про комплексні інтервальні числа, дійсна і уявна частина яких представлені в гіперболічному вигляді.

2. Описано правила виконання основних арифметичних дій з цими числами та обчислення інтервальних значень показникової, логарифмічної, прямих та обернених тригонометричних, прямих та обернених гіперболічних функцій.

3. Для функцій комплексного змінного наведено відомості про їхню дійсну та уявну частину. Перелік функцій відповідає функціям комплексного змінного, що входять до системи EXCEL.

4. Отримані співвідношення для визначення дійсної та уявної частини функцій секансу, косекансу, тангенсу та котангенсу для кругових тригонометричних та гіперболічних функцій, які були відсутні у найбільш поширеній довідковій літературі.

5. Наведено приклади, що ілюструють застосування запропонованої методики.

References

1. Podzharenko, V.O, Vasilevskyi, O.M. and Kucheruk, V.Yu. (2008*), Opratsiuvannia rezultativ vymiriuvan na osnovi kontseptsii nevyznachenosti: navchalnyi posibnyk [Developing measurement results based on the concept of uncertainty: a textbook]*, VNTU, Vynnytsa, 158 p.
2. Alefeld G,. and Herzberger, Yu. (1987), *Vvedenie v interval'nye vychislenija."[Introduction to interval calculations*], Mir, Moscow, 360 p.
3. Zhukovska, O. A. (2009), *Osnovy intervalnoho analizu: navchalnyi, [Fundamentals of interval analysis*], Osvita Ukrainy, Kyiv, 136 p.
4. Dubnickij, V.Ju., Kobylin, A.M.,and Kobylin O.A. (2017), "Vychislenie znachenij jelementarnyh i special'nyh funkcij s interval'no zadannym argumentom, opredeljonnym v sisteme Centr–Radius" [Calculation of the values of elementary and special functions with an interval -set argument defined in the Center–Radius system], *Applied radio electronics*, No. 3, pp. 147 -155.
5. Dubnickij, V.Ju., Kobylin, A.M. and Kobylin, O.A. (2019), "Calculation of similarity indicators and numerical integration of the criteria of similarity intervally defined in the Center-Radius system", *Advanced Information Systems*, Vol. 3, No. 3, pp. 55-62, doi: https://doi.org/10.20998/2522-9052.2019.3.08.

6. Dubnitsky, V.Yu., Kobylin, A.M. and Kobylin, O.A (2010), “Intervalnoe ocenivanie parametrov dlja opredelenija nadjozhnosti programmnogo obespechenija” [Interval estimation of parameters to determine software reliability], *Bionics of intelligence,* No, 1 (72), pp. 43 -49.
7. Dubnytskyi, V.Yu., Kobylin, A.M. and Kobylin, O.A. (2020), *Software system for operational evaluation of the interval efficiency of bank conversion operations intended for mobile devices on the Android operating system*, computer program, Certificate of copyright registration for the work, No. 101306, December 17, 2020.
8. Kobylin, A.M., Dubnytskyi, V.Yu., Kobylin, O.A., Stiahlyk, N.I. and Vakulenko, N.O. (2021), *A software system for operational assessment of the interval efficiency of currency operations, designed for mobile devices,* Certificate of copyright registration for the work, No. 108729, October 20, 2021.
9. Svezhenceva, O. V. and Umnova, M. O. (2015), “Raschet ustanovivshihsja rezhimov radial'noj jelektricheskoj seti na naprjazhenii 0,4 kv interval'nym metodom” [Calculation of steady-state regimes of a radial electrical network at a voltage of 0.4 kV by the interval method], *Bulletin of the Irkutsk State Technical Universit,* No. 3 (98). pp. 215-222.
10. Kryukov, A V. and Litvintsev, A,I, (2013), “Interval'noe modelirovanie avarijnyh rezhimov jelektrojenergeticheskih system” [Interval simulation of emergency modes of electric power systems], *Systems Methods Technologies,* No. 4 (20), pp, 73-79.
11. Hadetska, S.V., Dubnytskyi, V.Yu., Kushneruk, Yu.I., and Khodyriev, O.I. (2022), Performing basic arithmetic operations with complex numbers, which are presented in interval hyperbolic form, *Advanced Information Systems*, Vol. 6, No. 1, pp. 104-113, doi: https://doi.org/10.20998/2522-9052.2022.1.17.
12. Kalmykov, S.A., Shokin, Ju.I. and Juldashev, 3.X. (1986), Metody interval'nogo analiza [Methods of interval analysis], Nauka, Novosibirsk, 1986. 223 p.
13. Sharyj, S.P. (2012), *Konechnomernyj interval'nyj analiz* [*Finite-Dimensional Interval Analysis*], XYZ, Novosibirsk, 606 p.
14. Dubnitsky, V.Yu., Kobilin, A.M., Kobilin, O.A. and Kushneruk, Yu.I.n(2021), “EXCEL-oriented procedure for calculating the values of special functions with an interval argument, given in hyperbolic form.”, *Advanced Information Systems*, Vol. 5, No. 4, pp. 116-123, doi: https://doi.org/10.20998/2522-9052.2021.4.
15. Molodtsov, D. A. and Kovkov, D. V. (2011), “Vvedenie v teoriju priblizhennyh chisel” [Introduction to the theory of approximate numbers], *Bulletin of the Tver State University. Series: Applied Mathematics*, No. 23, pp. 111-128.
16. Spivak, I. Ya. And Krepych, I. Ya. A, (2019), “Prykladni aspekty intervalnykh obchyslen: navchalnyi posibnyk” [Applied aspects of interval calculations: a study guide], Palanytsia FOP, Ternopil, 153 p.
17. Kononyuk, A. E. (2011), “Dyskretno-nepreryvnaia matematyka. Alhebry. K.4.Ch.2.“[Discrete-continuous mathematics. Algebras. K.4.Part 2], Education of Ukraine, Kyiv, 668 p.
18. Smirnova, E. N. and Maksimenko N. V. (2015), *Jelementy interval'nogo analiza: metodicheskie ukazanija [Elements of interval analysis: guidelines],* Orenburg State University, Orenburg, 62 p,
19. Verbitsky, I. L., and Fainberg, E. D. (1989), *Jelementy teorii funkcij kompleksnogo peremennogo [Elements of the theory of functions of a complex variable],* UZPI, Kharkiv,135 p.
20. Serogodsky, V. V., Finkov, M. V., Kozlov, D. A., Prokdi, R. G. et al. (2017), *Excel 2016. Polnoe rukovodstvo [Excel 2016, Complete guide],* Nauka i tehnika, 412 p.
21. Korn, G., and Korn, T. (1968), *“Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov”* [*Handbook of mathematics for scientists and engineers*], Science, Moscow, 720p,
22. Bronstein, I.N. and Semendyaev, K.A. (1981), *“Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchikhsya vtuzov”* [*Handbook of mathematics for engineers and students of higher educational institutions*], Nauka, TPH, Moscow, 719 p.

Список літератури

1. Поджаренко В.О, Васілевський О.М., Кучерук В.Ю. Опрацювання результатів вимірювань на основі концепції невизначеності: навчальний посібник. Винница: ВНТУ, 2008. 158 с.
2. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. Москва: Мир, 1987. 360 с.
3. Жуковська О. А. Основи інтервального аналізу: навчальний посіб. Київ: Освіта України, 2009. 136 с.
4. Дубницкий В. Ю., Кобылин А. М., Кобылин О. А. Вычисление значений элементарных и специальных функций с интервально заданным аргументом, определённым в системе ЦЕНТР – РАДИУС. *Прикладная радиоэлектроника*. 2017. Том 16, № 3, 4. С. 147-154.
5. Дубницкий В.Ю., Кобылин А.М., Кобылин О.А. Вычисление индикаторов подобия и численное интегрирование критериев подобия, интервально определённых в системе ЦЕНТР-РАДИУС. *Сучасні інформаційні системи*, 2019. Т. 3, № 3. С. 55 – 62. DOI: https://doi.org/10.20998/2522-9052.2019.3.08.
6. Дубницкий В.Ю., А.М. Кобылин А.М., О.А. Кобылин О.А. Интервальное оценивание параметров для определения надёжности программного обеспечения. *Бионика интеллекта*. 2010. № 1 (72). С. 43-49.
7. Дубницький В.Ю., Кобилін А.М., Кобилін О.А. Програмна система оперативної оцінки інтервальної ефективності банківських конвертаційних операцій, призначених для мобільних пристроїв на операційній системі Android : Комп'ютерна програма. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 101306 від 17 грудня 2020 р.
8. Кобилін, А.М., Дубницький, В.Ю., Кобилін, О.А., Стяглик, Н.І., Вакуленко, Н.О. Програмна система оперативної оцінки інтервальної ефективності валютних операцій, призначена для мобільних пристроїв : свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 108729 від 20 жовтня 2021 р.
9. Свеженцева О. В., Умнова М. О. Расчет установившихся режимов радиальной электрической сети на напряжении 0,4 кв интервальным методом. *Вестник Иркутского Государственного техн. университета*. 2015. №3 (98). С. 215-222.
10. Крюков А В., Литвинцев А И Интервальное моделирование аварийных режимов электроэнергетических систем. *Системы Методы Технологии*. 2013. № 4 (20). С. 73-79.
11. Гадецька С.В., Дубницький В.Ю., Ю. І. Кушнерук Ю.І., Ходирєв О.І. Виконання основних арифметичних дій з комплексними числами, які представлено в інтервальній гіперболічній формі. *Сучасні інформаційні системи*. 2022. Т. 6, № 1. С.104-113. DOI: https://doi.org/10.20998/2522-9052.2022.1.17.
12. Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев 3. Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986. 223 с.
13. Шарый С. П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: XYZ, 2012. 606 с.

14. Дубницький В. Ю., Кобилін А. М., Кобилін О. А., Кушнерук Ю. І. EXCEL-орієнтована процедура для обчислення значень спеціальних функцій з інтервальним аргументом, заданим в гіперболічній формі. *Сучасні інформаційні системи*. 2021. Т. 5, № 4. С. 116-123. doi: https://doi.org/10.20998/2522-9052.2021.4.
15. Молодцов Д. А., Ковков Д. В. Введение в теорию приближенных чисел. *Вестник Тверского Государственного Университета. Серия: Прикладная математика*. 2011. № 23) С. 111-128.
16. Співак І. Я., Крепич І. Я Прикладні аспекти інтервальних обчислень: навчальний посібник. Тернопіль: ФОП Паляниця В. А., 2019. 153 с.
17. Кононюк А. Е. Дискретно-непрерывная математика. Алгебры. К.4.Ч.2. К.4: Київ: Освіта України, 2011. 668 с.
18. Смирнова, Е. Н., Максименко Н. В. Элементы интервального анализа: методические указания. Оренбург: Оренбургский государственный университет. 2015. 62 с.
19. Вербицкий И. Л., Файнберг Е. Д. Элементы теории функций комплексного переменного. Методическое пособие. Харьков: УЗПИ. 1989. 135 с.
20. Excel 2016. Полное руководство / Серогодский В. В., Финков М. В., Козлов Д. А., Прокди Р. Г. и др. Санкт-Петербург: Наука и техника, 2017. 412 с.
21. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Москва: Наука.1968. 720 с.
22. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. Москва : Наука, Лейпциг: Тойбнер, 1981. 719 с.

Received (Надійшла) 18.05.2022
Accepted for publication (Прийнята до друку) 22.06.2022

Відомості про авторів / About the authors

Дубницький Валерій Юрійович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник ННІ “Каразінський банківський інститут” ХНУ ім. В.Н. Каразіна, Харків, Україна;
Valeriy Dubnitskiy – Candidate of Technical Sciences, Senior Research, Senior Research of “Karazin Banking Institute” of V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine;
e-mail: dubnitskiy@gmail.com; ORCID ID: http://orcid.org/0000-0003-1924-4104.

Кобилін Анатолій Михайлович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій та математичного моделювання, ННІ “Каразінський банківський інститут” ХНУ ім. В.Н. Каразіна, Харків, Україна;
Anatolii Kobylin – Candidate of Technical Sciences, Associate professor, Associate professor of “Karazin Banking Institute” of V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine;
e-mail: anatoliy_kam@ukr.net; ORCID ID: http://orcid.org/0000-0002-8083-0762.

Кобилін Олег Анатолійович – кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри інформатики, Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна;
Oleg Kobylin – Candidate of Technical Sciences, Associate professor, Head of the Department of Informatics, Kharkiv National University of RadioElectronics, Kharkiv, Ukraine;
e-mail: oleg.kobylin@gmail.com; ORCID ID: http://orcid.org/0000-0003-0834-0475.

Кушнерук Юрій Іонович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри Інституту цивільної авіації Харківського національного університету Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, Україна;
Yuriy Kushneruk – Candidate of Technical Sciences Associate Professor, Senior Lecturer of the Civil Aviation Institute of Ivan Kozhedub ,Kharkiv National Air Force University, Kharkiv, Ukraine
e-mail: yuriy_kushneruk@gmail.com; ORCID ID: http://orcid.org/0000-0001-5844-7137.

Шевяков Юрій Іванович – доктор технічних наук, профессор, директор Інституту цивільної авіації Харківського національного університету Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, Україна;
Iurii Sheviakov – Doctor of Technical Sciences, Professor Director of the Civil Aviation Institute of Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University, Kharkiv, Ukraine
e-mail: shieff59@gmail.com; ORCID ID: http://orcid.org/0000-0002-5322-6674.

Calculation of the value of the functions of the complex variable with by an interval argument, we will design in the hyperbolic form

Valeriy Dubnitskiy, Anatolii Kobylin, Oleg Kobylin, Yuriy Kushneruk, Iurii Sheviakov

Abstract. Information about the interval numbers presented in the classical form, the CENTER-RADIUS system and in the hyperbolic form is given. Rules for the transition from one of the forms of representation of interval numbers to others are proposed. Information is given on complex interval numbers, the real and imaginary parts of which are presented in hyperbolic form. The rules for performing basic arithmetic operations with these numbers and the calculation of interval values of power, exponential, logarithmic functions, direct and inverse trigonometric functions, direct and inverse hyperbolic functions are described. For functions of a complex variable, information about their real and imaginary parts is given. The list of functions corresponds to the functions of a complex variable included in the EXCEL system. Relationships are obtained for determining the real and imaginary parts of the secant, cosecant, tangent and cotangent functions for circular trigonometric and hyperbolic functions, which were absent in the most common reference literature. It is shown that the operations of multiplication, division and raising to an integer power are most appropriate to perform with complex interval numbers, which are defined in hyperbolic form. The operation of calculating the root of degree n from an interval complex number presented in hyperbolic form is most expediently performed using the CENTER-RADIUS system in combination with the hyperbolic form of representing the interval number. Relationships are obtained that make it possible to obtain a function of an interval complex variable equivalent to the original one and suitable for further work with complex functions and numbers presented in hyperbolic form and in the CENTER-RADIUS system. Examples illustrating the application of the proposed technique are given.

Keywords: interval calculations; functions of a complex variable; complex interval numbers.