

УДК 624.073

Я.С. КАРПОВ, В.Г. СТАВИЧЕНКО*Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина***ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПРОГИБОВ
ЗАКРЕПЛЕННЫХ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН**

Разработана методика определения малых остаточных прогибов, возникающих при монтаже слоистых панелей с поводкой. Получено решение в двойных тригонометрических рядах для прямоугольных ортотропных пластин. Рассмотрены возможности применения метода Ритца-Тимошенко для приближенного определения прогибов пластин с произвольным армированием, с различными условиями опирания краев, а также пластин, имеющих непрямоугольную форму. В качестве аппроксимирующей функции для реализации метода Ритца-Тимошенко использовался степенной многочлен с неизвестными коэффициентами. Приведены численные примеры использования предложенных методов.

композиционный материал, температурное воздействие, теория пластин, вариационные принципы механики, потенциальная энергия упругой системы, условия опирания

Введение

В связи с увеличением объема применения композиционных материалов (КМ) в авиационных конструкциях возрастает потребность во всесторонних исследованиях их поведения при самых различных условиях нагружения. Помимо объемных и поверхностных нагрузок, на конструкции из КМ воздействуют температурные поля, которые вызывают появление температурных напряжений и деформаций. Это необходимо учитывать как при проектировании, так и при выборе технологических процессов.

Известно, что после горячего формования форма композитных панелей может отклоняться от заданной. Это связано с наличием поля напряжений, неравномерного по толщине панели.

В фундаментальных работах О.С. Циплакова, А.Г. Савина, А.В. Клопоты, В.Е. Гайдачука, М.А. Сидоренковой и др. исследуются вопросы влияния технологических параметров формования на НДС. В то же время практически отсутствуют исследования поведения панелей обшивки с поводкой при их установке на каркас летательного аппарата.

В статье рассмотрены вопросы прогнозирования остаточных прогибов закрепленных слоистых пластин.

Постановка задачи

К авиационным панелям, которые непосредственно соприкасаются с воздушным потоком, предъявляются жесткие требования к сохранению аэродинамического качества поверхности, что накладывает определенные ограничения на прогибы таких панелей.

В связи с этим, актуальной является оценка остаточных (монтажных) прогибов панелей с поводкой после закрепления их на каркас летательного аппарата.

Исходными данными являются: физико-механические свойства материалов слоев, структура укладки, геометрия панели, приращение температуры и условия опирания.

В статье принимается, что панель была сначала закреплена по контуру, а затем подвергнута температурному воздействию. В связи с этим, условия закрепления должны позволять свободные перемещения в плоскости панели.

Для иллюстрации полученных решений рассмотрен случай, когда неравномерное поле напряжений возникает при однородном температурном поле вследствие несимметричности укладки слоев панели относительно срединной поверхности.

Вывод функционала энергии деформации слоистой пластины с учетом температуры

Для решения широкого класса задач строительной механики могут быть применены энергетические методы, базирующиеся на различных вариационных принципах. В статье используется вариационный принцип Лагранжа [1], согласно которому, из всех возможных систем перемещений, истинные доставляют минимум функционалу полной потенциальной энергии упругой системы

$$\Pi = U - A, \quad (1)$$

где U – энергия деформации системы;

A – работа внешних сил.

В случае чисто температурной задачи $A = 0$.

С учетом классических допущений теории пластин

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0,$$

функционал энергии деформации имеет вид:

$$U = \frac{1}{2} \iint_S \int_{-e}^{h-e} (\sigma_x(\varepsilon_x - \alpha_x \Delta T) + \sigma_y(\varepsilon_y - \alpha_y \Delta T) + \tau_{xy}(\gamma_{xy} - \alpha_{xy} \Delta T)) dz dS = \iint_S \bar{U} dS, \quad (2)$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ – напряжения и деформации в плоскости пластины;

$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_{xy}$ – коэффициенты линейного температурного расширения материала (КЛТР);

ΔT – приращение температуры;

e – расстояние от нижней поверхности пластины до начальной поверхности [2] (рис. 1);

h – толщина пластины;

\bar{U} – удельная энергия деформации.

Выражение для удельной энергии деформации можно представить в виде двух слагаемых

$$\bar{U} = \bar{U}_0 + \bar{U}_T, \quad (3)$$

где

$$\bar{U}_0 = \frac{1}{2} \int_{-e}^{h-e} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dz; \quad (4)$$

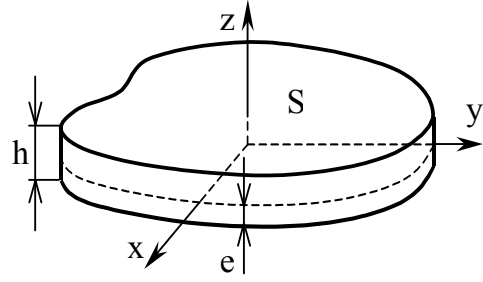


Рис. 1. Схема пластины

$$\bar{U}_T = -\frac{1}{2} \int_{-e}^{h-e} (\sigma_x \alpha_x + \sigma_y \alpha_y + \tau_{xy} \alpha_{xy}) \Delta T dz. \quad (5)$$

Для тонких пластин, согласно гипотезе плоских сечений, распределение деформаций по толщине задается в виде

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + \kappa_x z; \varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + \kappa_y z; \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + \chi_{xy} z, \quad (6)$$

где $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0, \kappa_x, \kappa_y, \chi_{xy}$ – обобщенные деформационные характеристики [2].

Напряжения приводятся к усилиям и моментам по формулам:

$$N_x = \int_{-e}^{h-e} \sigma_x dz; N_y = \int_{-e}^{h-e} \sigma_y dz; N_{xy} = \int_{-e}^{h-e} \tau_{xy} dz; \quad (7)$$

$$M_x = \int_{-e}^{h-e} \sigma_x z dz; M_y = \int_{-e}^{h-e} \sigma_y z dz; M_{xy} = \int_{-e}^{h-e} \tau_{xy} z dz.$$

Подставляя формулы (6) в выражение (4), получим:

$$\bar{U}_0 = \frac{1}{2} (N_x \varepsilon_x^0 + N_y \varepsilon_y^0 + N_{xy} \gamma_{xy}^0 + M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + M_{xy} \chi_{xy}) \quad (8)$$

Для решения задачи в перемещениях усилия и моменты необходимо выразить через деформационные характеристики из физических соотношений. Они могут быть получены путем подстановки физических соотношений для армированного слоя [3] в формулы (7) с учетом формул (6).

Физические соотношения для армированного слоя имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= b_{11} \varepsilon_x + b_{12} \varepsilon_y + b_{13} \gamma_{xy} - a_{T1} \Delta T; \\ \sigma_y &= b_{12} \varepsilon_x + b_{22} \varepsilon_y + b_{23} \gamma_{xy} - a_{T2} \Delta T; \\ \tau_{xy} &= b_{13} \varepsilon_x + b_{23} \varepsilon_y + b_{33} \gamma_{xy} - a_{T3} \Delta T. \end{aligned} \quad (9)$$

Продельвая указанные выше операции, получим:

$$\begin{aligned}
 N_x &= B_{11}\varepsilon_x^0 + B_{12}\varepsilon_y^0 + B_{13}\gamma_{xy}^0 + \\
 &+ C_{11}\kappa_x + C_{12}\kappa_y + C_{13}\chi_{xy} - B_{T1}; \\
 N_y &= B_{12}\varepsilon_x^0 + B_{22}\varepsilon_y^0 + B_{23}\gamma_{xy}^0 + \\
 &+ C_{12}\kappa_x + C_{22}\kappa_y + C_{23}\chi_{xy} - B_{T2}; \\
 N_{xy} &= B_{13}\varepsilon_x^0 + B_{23}\varepsilon_y^0 + B_{33}\gamma_{xy}^0 + \\
 &+ C_{13}\kappa_x + C_{23}\kappa_y + C_{33}\chi_{xy} - B_{T3}; \\
 M_x &= C_{11}\varepsilon_x^0 + C_{12}\varepsilon_y^0 + C_{13}\gamma_{xy}^0 + \\
 &+ D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_y + D_{13}\chi_{xy} - D_{T1}; \\
 M_y &= C_{12}\varepsilon_x^0 + C_{22}\varepsilon_y^0 + C_{23}\gamma_{xy}^0 + \\
 &+ D_{12}\kappa_x + D_{22}\kappa_y + D_{23}\chi_{xy} - D_{T2}; \\
 M_{xy} &= C_{13}\varepsilon_x^0 + C_{23}\varepsilon_y^0 + C_{33}\gamma_{xy}^0 + \\
 &+ D_{13}\kappa_x + D_{23}\kappa_y + D_{33}\chi_{xy} - D_{T3}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Здесь коэффициенты B_{kj}, C_{kj}, D_{kj} – обобщенные жесткости пластины, а B_{Tk}, D_{Tk} – аналогичные температурные коэффициенты [2].

Для преобразования температурной составляющей удельной энергии деформации подставим соотношения (9) в формулу (5), и после некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned}
 \bar{U}_T &= -\frac{1}{2} \int_{-e}^{h-e} (b_{11}\alpha_x + b_{12}\alpha_y + b_{13}\alpha_{xy})\varepsilon_x + \\
 &+ (b_{12}\alpha_x + b_{22}\alpha_y + b_{23}\alpha_{xy})\varepsilon_y + \\
 &+ (b_{13}\alpha_x + b_{23}\alpha_y + b_{33}\alpha_{xy})\gamma_{xy} - \\
 &- (a_{T1}\alpha_x + a_{T2}\alpha_y + a_{T3}\alpha_{xy})\Delta T.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Учитывая, что при отсутствии напряжений деформации будут возникать только вследствие температурного расширения, из формул (9) вытекают следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 a_{T1} &= b_{11}\alpha_x + b_{12}\alpha_y + b_{13}\alpha_{xy}; \\
 a_{T2} &= b_{12}\alpha_x + b_{22}\alpha_y + b_{23}\alpha_{xy}; \\
 a_{T3} &= b_{13}\alpha_x + b_{23}\alpha_y + b_{33}\alpha_{xy}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

С учетом полученных зависимостей и формул (6), температурная составляющая энергии деформации будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 \bar{U}_0 &= -\frac{1}{2} \left(B_{T1}\varepsilon_x^0 + B_{T2}\varepsilon_y^0 + B_{T3}\gamma_{xy}^0 + \right. \\
 &\left. + D_{T1}\kappa_x + D_{T2}\kappa_y + D_{T3}\chi_{xy} \right)
 \end{aligned} \tag{14}$$

Окончательно функционал энергии деформации слоистой пластины с учетом температуры запишем в виде

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \iint_S \left[(N_x - B_{T1})\varepsilon_x^0 + (N_y - B_{T2})\varepsilon_y^0 + \right. \\
 &+ (N_{xy} - B_{T3})\gamma_{xy}^0 + (M_x - D_{T1})\kappa_x + \\
 &\left. + (M_y - D_{T2})\kappa_y + (M_{xy} - D_{T3})\chi_{xy} + C \right] dx dy.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Усилия и моменты, входящие в эту формулу, определяются соотношениями (10), (11). Свободный член C вычислять не обязательно, так как он не влияет на решение.

Для записи функционала (15) через перемещения точек начальной поверхности нужно воспользоваться геометрическими соотношениями [2]. В линейной постановке они имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \\
 \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \chi_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь u, v, w – перемещения точек начальной поверхности в направлениях x, y, z соответственно.

Для плоской пластины, края которой могут свободно перемещаться в плоскости x, y , и при отсутствии внешних нагрузок в этой плоскости, поле напряжений будет самоуравновешенным, т.е.

$$N_x = N_y = N_{xy} = 0.$$

Этот факт позволяет исключить из функционала энергии деформации $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$, а, следовательно, и перемещения u и v .

Учитывая равенство нулю усилий, выразим из соотношений (10) деформации.

Получим:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^0 &= -P_{11}\kappa_x - P_{12}\kappa_y - P_{13}\chi_{xy} + P_{T1}; \\
 \varepsilon_y^0 &= -P_{21}\kappa_x - P_{22}\kappa_y - P_{23}\chi_{xy} + P_{T2}; \\
 \gamma_{xy}^0 &= -P_{31}\kappa_x - P_{32}\kappa_y - P_{33}\chi_{xy} + P_{T3},
 \end{aligned} \tag{17}$$

где $P_{kj} = \sum_{i=1}^3 C_{ji} \bar{B}_{ik}$; $P_{Tk} = \sum_{i=1}^3 B_{Ti} \bar{B}_{ik}$; $k, j = 1, 2, 3$;

$$\bar{B}_{11} = \frac{B_{22}B_{33} - B_{23}^2}{B}; \quad \bar{B}_{22} = \frac{B_{11}B_{33} - B_{13}^2}{B};$$

$$\bar{B}_{33} = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}^2}{B}; \quad \bar{B}_{12} = \frac{B_{13}B_{23} - B_{12}B_{33}}{B};$$

$$\bar{B}_{13} = \frac{B_{12}B_{23} - B_{13}B_{22}}{B}; \quad \bar{B}_{23} = \frac{B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23}}{B};$$

$$B = B_{11}B_{22}B_{33} + 2B_{12}B_{13}B_{23} -$$

$$- B_{11}B_{23}^2 - B_{22}B_{13}^2 - B_{33}B_{12}^2$$

$$\bar{B}_{31} = \bar{B}_{13}; \quad \bar{B}_{21} = \bar{B}_{12}; \quad \bar{B}_{23} = \bar{B}_{32}.$$

Подставив $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ из соотношений (17) в соотношения (11), получим:

$$\begin{aligned} M_x &= \bar{D}_{11}\kappa_x + \bar{D}_{12}\kappa_y + \bar{D}_{13}\chi_{xy} - \bar{D}_{T1}; \\ M_y &= \bar{D}_{21}\kappa_x + \bar{D}_{22}\kappa_y + \bar{D}_{23}\chi_{xy} - \bar{D}_{T2}; \\ M_{xy} &= \bar{D}_{31}\kappa_x + \bar{D}_{32}\kappa_y + \bar{D}_{33}\chi_{xy} - \bar{D}_{T3}, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\bar{D}_{kj} = D_{kj} - \sum_{i=1}^3 C_{ki} P_{ij}; \quad \bar{D}_{Tk} = D_{Tk} - \sum_{i=1}^3 C_{ki} P_{Ti};$$

$$k, j = 1, 2, 3.$$

После подстановки деформационных характеристик из соотношений (17) и моментов из соотношений (18) в выражение (15), функционал энергии деформации будет иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \iint_S (d_{11}\kappa_x^2 + 2d_{12}\kappa_x\kappa_y + d_{22}\kappa_y^2 + \\ &+ 2d_{13}\kappa_x\chi_{xy} + 2d_{23}\kappa_y\chi_{xy} + d_{33}\chi_{xy}^2 - \\ &- 2d_{T1}\kappa_x - 2d_{T2}\kappa_y - 2d_{T3}\chi_{xy} + C) dx dy, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} d_{11} &= \bar{D}_{11}; \quad d_{22} = \bar{D}_{22}; \quad d_{33} = \bar{D}_{33}; \\ d_{12} &= (\bar{D}_{12} + \bar{D}_{21})/2; \quad d_{13} = (\bar{D}_{13} + \bar{D}_{31})/2; \\ d_{13} &= (\bar{D}_{23} + \bar{D}_{32})/2, \end{aligned}$$

а температурные коэффициенты после соответствующих преобразований принимают вид:

$$\begin{aligned} d_{T1} &= \bar{D}_{T1}; \\ d_{T2} &= \bar{D}_{T2}; \quad d_{T3} = \bar{D}_{T3}; \end{aligned}$$

C – свободный член.

Прямоугольная ортотропная пластина, шарнирно закрепленная по контуру

Рассмотрим прямоугольную пластину с размерами сторон a, b , шарнирно закрепленную по контуру (рис. 2).

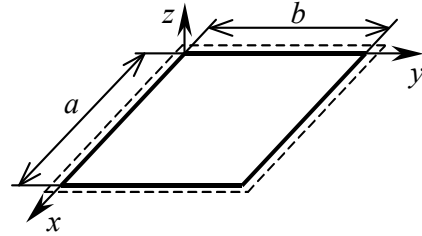


Рис. 2. Прямоугольная шарнирно опертая пластина

Если каждый слой пластины является ортотропным в осях x, y , то в физических соотношениях (9) коэффициенты

$$b_{13} = b_{23} = a_{T3} = 0.$$

Для слоистых композиционных материалов ортотропными в указанных осях являются слои с укладкой под углами 0 и 90° относительно оси x . С некоторым приближением одним ортотропным слоем можно считать также расположенные рядом слои с укладкой под углами $+\varphi$ и $-\varphi$. Применительно к температурной задаче следует оговорить, что пренебрежение крутящим моментом, создаваемым этими слоями, некорректно для пластин с произвольной геометрией. Как показали численные исследования, этот момент не вызывает прогибов прямоугольной пластины, а для пластин, форма которых отлична от прямоугольной, влияние крутящего момента существенно.

Функционал энергии деформации для рассматриваемой пластины имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \iint_{00}^{ab} (d_{11}\kappa_x^2 + 2d_{12}\kappa_x\kappa_y + d_{22}\kappa_y^2 + d_{33}\chi_{xy}^2 - \\ &- 2d_{T1}\kappa_x - 2d_{T2}\kappa_y + C) dx dy. \end{aligned} \quad (20)$$

Вследствие равенства нулю коэффициентов при произведениях $\kappa_x\chi_{xy}$ и $\kappa_y\chi_{xy}$ в выражении (20),

можно получить простое решение задачи в двойных тригонометрических рядах.

Подобные решения для пластин, нагруженных давлением или сосредоточенной силой, можно найти, например, в [1].

Зададим прогиб пластины в виде:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y, \quad (21)$$

где $\lambda_m = \pi m / a$; $\lambda_n = \pi n / b$;

w_{mn} – неизвестные коэффициенты.

Очевидно, что функция (21) удовлетворяет условию равенства нулю прогибов на краях пластины.

Из соотношений (16) получим:

$$\begin{aligned} \kappa_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m^2 w_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y; \\ \kappa_x &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 w_{mn} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y; \\ \chi_{xy} &= - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 2\lambda_m \lambda_n w_{mn} \cos \lambda_m x \cos \lambda_n y. \end{aligned} \quad (22)$$

Подставим формулы (22) в функционал (20). При интегрировании следует учесть свойство ортогональности выбранной системы функций:

$$\begin{aligned} \int_0^a \sin \frac{\pi k x}{a} \sin \frac{\pi j x}{a} dx &= \begin{cases} a/2, & \text{при } k = j; \\ 0, & \text{при } k \neq j, \end{cases} \\ \int_0^a \cos \frac{\pi k x}{a} \cos \frac{\pi j x}{a} dx &= \begin{cases} a/2, & \text{при } k = j; \\ 0, & \text{при } k \neq j. \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

Учитывая формулы (23), в выражениях, включающих произведения двойных сумм, можно сохранить только члены при квадратах тригонометрических функций.

Заметив также, что

$$\begin{aligned} \int_0^a \sin \lambda_m x dx &= (1 - (-1)^m) \frac{a}{\pi m}; \\ \int_0^b \sin \lambda_n y dy &= (1 - (-1)^n) \frac{b}{\pi n}; \end{aligned}$$

получим следующую функцию от переменных w_{mn} .

$$U = \frac{ab}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{w_{mn}^2}{4} (d_1 \lambda_m^4 + 2d_3 \lambda_m^2 \lambda_n^2 + d_2 \lambda_n^4) - \frac{2w_{mn}}{\pi^2 mn} (1 - (-1)^m)(1 - (-1)^n) (d_{T1} \lambda_m^2 + d_{T2} \lambda_n^2) \right\}, \quad (24)$$

где $d_1 = d_{11}$; $d_2 = d_{22}$; $d_3 = d_{12} + 2d_{33}$;

Коэффициенты w_{mn} , доставляющие минимум функции (24), будут равны:

$$w_{mn} = \frac{4(1 - (-1)^m)(1 - (-1)^n)(d_{T1} \lambda_m^2 + d_{T2} \lambda_n^2)}{\pi^2 mn (d_1 \lambda_m^4 + 2d_3 \lambda_m^2 \lambda_n^2 + d_2 \lambda_n^4)}. \quad (25)$$

В силу присутствия выражений $1 - (-1)^m$ и $1 - (-1)^n$ в формуле (25), члены суммы (21) при нечетных значениях m и n равны нулю. Тогда полученное решение можно записать в виде:

$$\bar{w}_{mn} = \frac{16(d_{T1} \bar{\lambda}_m^2 + d_{T2} \bar{\lambda}_n^2)}{\pi^2 (2m-1)(2n-1)(d_1 \bar{\lambda}_m^4 + 2d_3 \bar{\lambda}_m^2 \bar{\lambda}_n^2 + d_2 \bar{\lambda}_n^4)}, \quad (26)$$

где

$$\bar{\lambda}_m = \pi(2m-1)/a; \quad \bar{\lambda}_n = \pi(2n-1)/b.$$

Прогиб в этом случае будет равен

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{w}_{mn} \sin \bar{\lambda}_m x \sin \bar{\lambda}_n y. \quad (27)$$

Для иллюстрации полученного решения, рассмотрим двухслойную пластину с укладкой $[0, 90]$. Материал монослоя – однонаправленный углепластик со следующими свойствами [3]:

$$E1 = 100 \text{ ГПа}; E2 = 10 \text{ ГПа}; G12 = 6 \text{ ГПа};$$

$$\mu_{12} = 0,35; \alpha_1 = 0; \alpha_2 = 30 \times 10^{-6} \text{ 1/К.}$$

Толщина монослоя $\delta_0 = 0,1 \text{ мм}$.

На рис. 3 приведен график сходимости ряда для значения прогиба в центре пластины, т.е. график функции

$$w(N) = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \bar{w}_{mn} \sin \bar{\lambda}_m x \sin \bar{\lambda}_n y.$$

На рис. 4 приведена зависимость относительной погрешности определения прогиба

$$\delta w(N) = |w(N) - w(N-1)| / w(N) \times 100\%.$$

На рис. 5 изображено распределение момента M_x по длине пластины при $y = b/2$. Рис. 5 показывает, что статические граничные условия не удовлетворяются точно при конечном значении N , но должны удовлетвориться при переходе к бесконечным суммам.

На рис. 6, $a - z$ представлены контурные графики прогиба рассматриваемой пластины, а также пластин с аналогичной структурой, но с другими соотношениями размеров сторон.

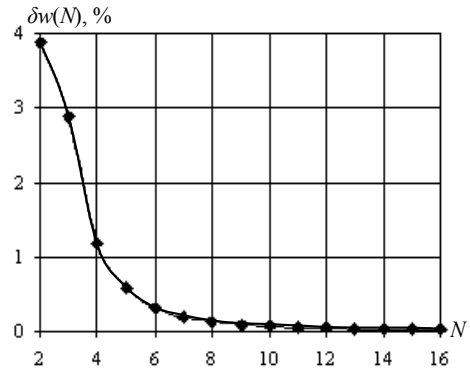


Рис. 4. Зависимость погрешности вычисления прогиба в центре пластины от предела суммирования N

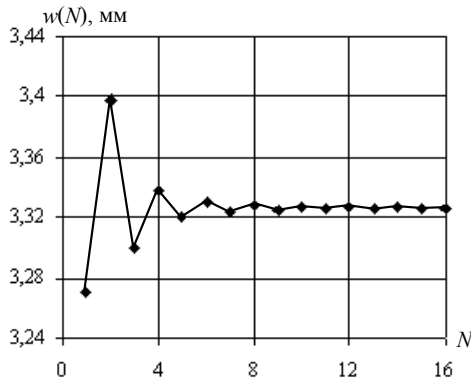


Рис. 3. График сходимости ряда (27) для прогиба в центре пластины

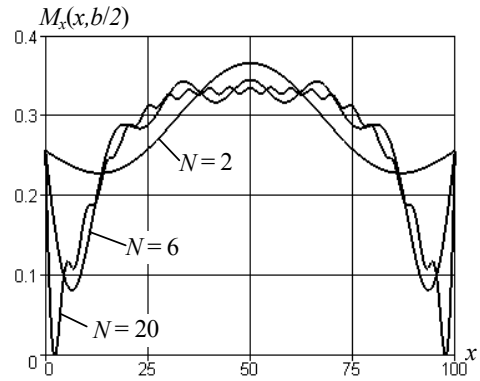


Рис. 5. Распределение момента M_x по длине пластины при $y = b/2$.

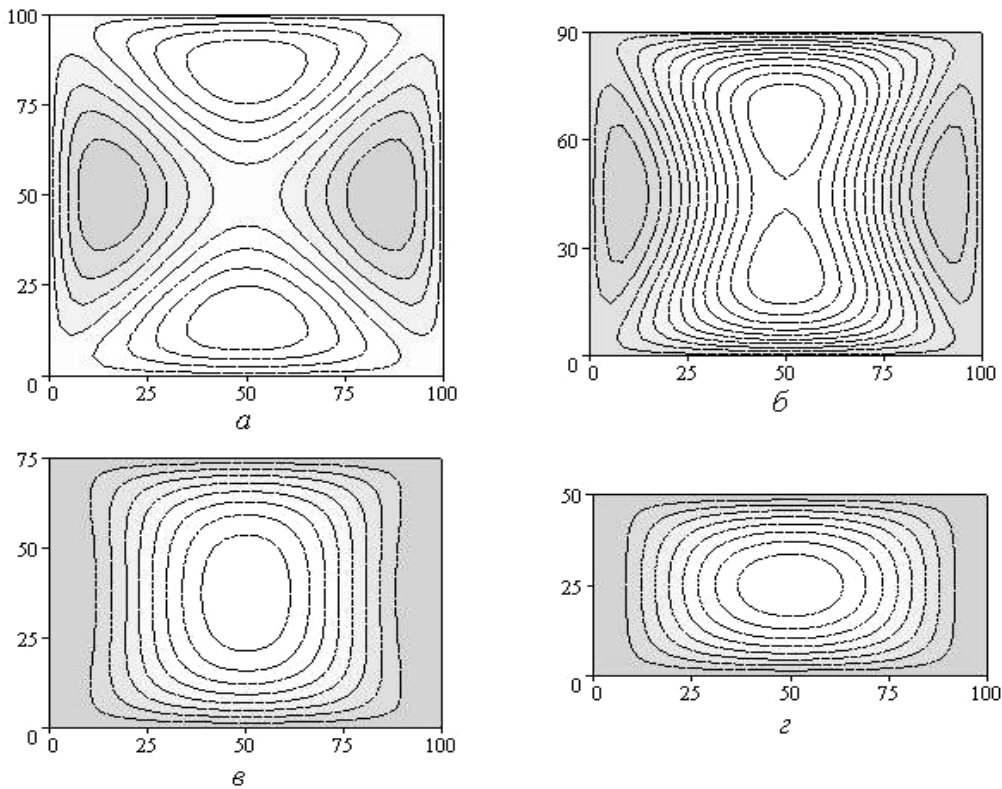


Рис. 6. Прогиб пластин со структурой $[0, 90]$ с различными соотношениями размеров сторон

Приближенный метод определения температурных прогибов

Для пластин с произвольным армированием, различными условиями опирания, а также для прямоугольных пластин температурные прогибы можно определить приближенно, используя метод Ритца-Тимошенко.

Согласно вышеупомянутому методу прогиб задается в виде:

$$w = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x, y), \quad (28)$$

где a_k – неизвестные коэффициенты; φ_k – некоторые заданные непрерывные функции, удовлетворяющие кинематическим граничным условиям [1].

Подставляя выражение (28) в геометрические соотношения (16), полученный результат – в выражение (19) и производя интегрирование по сечению пластины, получим функцию от переменных a_k .

Коэффициенты a_k , доставляющие минимум полученной функции, определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений вида

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{B}, \quad (29)$$

где \mathbf{A} – матрица коэффициентов системы;

\mathbf{a} – вектор-столбец неизвестных коэффициентов;

\mathbf{B} – вектор-столбец свободных членов.

Коэффициенты матрицы \mathbf{A} и вектора \mathbf{B} вычисляются по следующим формулам:

$$A_{kj} = d_{11}J_{11}^{kj} + d_{22}J_{22}^{kj} + 4d_{33}J_{33}^{kj} + d_{12}(J_{12}^{kj} + J_{12}^{jk}) + 2d_{13}(J_{13}^{kj} + J_{13}^{jk}) + 2d_{23}(J_{23}^{kj} + J_{23}^{jk}); \quad (30)$$

$$B_k = -d_{T1}J_1^k - d_{T2}J_2^k - 2d_{T3}J_3^k,$$

где

$$J_{mn}^{kj} = \iint_S \psi_m^k \psi_n^j dx dy; J_m^k = \iint_S \psi_m^k dx dy;$$

$$\psi_1^k = \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x^2}; \psi_2^k = \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y^2}; \psi_3^k = \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial x \partial y};$$

$$m, n = 1, 2, 3$$

Прогиб пластины удобно задавать в виде алгебраического многочлена

$$w = \Phi \cdot (a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 \dots),$$

где функция Φ обеспечивает выполнение условий опирания пластины.

В этом случае

$$\varphi_k = \Phi \cdot \varphi_{0k};$$

$$\varphi_0 = [1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, xy^{N-1}, y^N],$$

где N максимальная степень многочлена.

Оценим точность этого метода на примере ортотропной пластины, рассмотренной в предыдущем разделе. Ввиду симметрии задачи, начало координат удобно расположить в центре пластины.

Функция, обеспечивающая условия опирания, имеет вид:

$$\Phi(x, y) = (x^2 - a^2/4) \cdot (x^2 - a^2/4).$$

В табл. 1 приведены значения прогибов в центре рассматриваемой пластины для ряда значений N , а также погрешность вычисления прогиба относительно значения, полученного по формуле (27) $w = 3,32624$ мм .

Таблица 1
Оценка точности метода Ритца-Тимошенко

Степень многочлена, N	$w_N(0;0)$ мм	δw , %
2	3,43049	3,1
4	3,32547	0,023
6	3,32787	0,049
8	3,32594	0,009
10	3,32675	0,015

Из табл. 1 следует, что даже при невысоких степенях многочлена точность является достаточной для практических расчетов.

Для прямоугольных пластин, края которых имеют различные условия опирания, функция Φ может быть представлена в виде:

$$\Phi = (x - a/2)^{P_1} (x + a/2)^{P_2} (y - b/2)^{P_3} (y + b/2)^{P_4}. \quad (31)$$

Каждое из выражений в скобках в функции (31) удовлетворяет условию равенства нулю прогибов на соответствующей границе. А показатели степени

p_1, p_2, p_3, p_4 выбираются в соответствии с условием опирания на границах:

$$p_i = \begin{cases} 0 - \text{свободная граница;} \\ 1 - \text{шарнирное опирание;} \\ 2 - \text{заделка.} \end{cases}$$

Например, для прямоугольной пластины, у которой две противоположные стороны при $x = \pm a/2$ шарнирно оперты, а две оставшиеся заделаны,

$$\Phi = (x^2 - a^2/4)^2 (y^2 - b^2/4).$$

Для пластины, две противоположные стороны которой в общем случае являются криволинейными и задаются функциями $y_1(x)$ и $y_2(x)$ (рис. 7), функционал энергии деформации имеет вид:

$$U = \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \bar{U} dy dx. \quad (32)$$

А условиям шарнирного опирания по всем сторонам удовлетворяет функция

$$\Phi(x, y) = x(x-a)[y-y_1(x)][y-y_2(x)]. \quad (33)$$

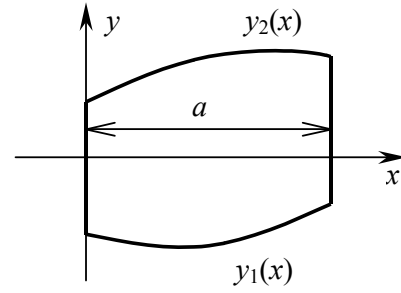


Рис. 7. Пластина с двумя криволинейными границами

На рис. 8, $a - z$ представлены контурные графики прогибов, квадратных пластин со структурой $[0, 90]$ с различными условиями опирания.

На рис. 9, $a - z$ можно увидеть контурные графики прогибов пластин, имеющих форму трапеции, со структурами $[\pm 45]$ и $[0, 90]$.

Следует отметить, что прогиб непрямоугольных пластин, имеющих структуру $[\pm \phi]$, не равен нулю, как в случае прямоугольных пластин. Таким образом, геометрия пластины оказывает существенное влияние на решение задачи.

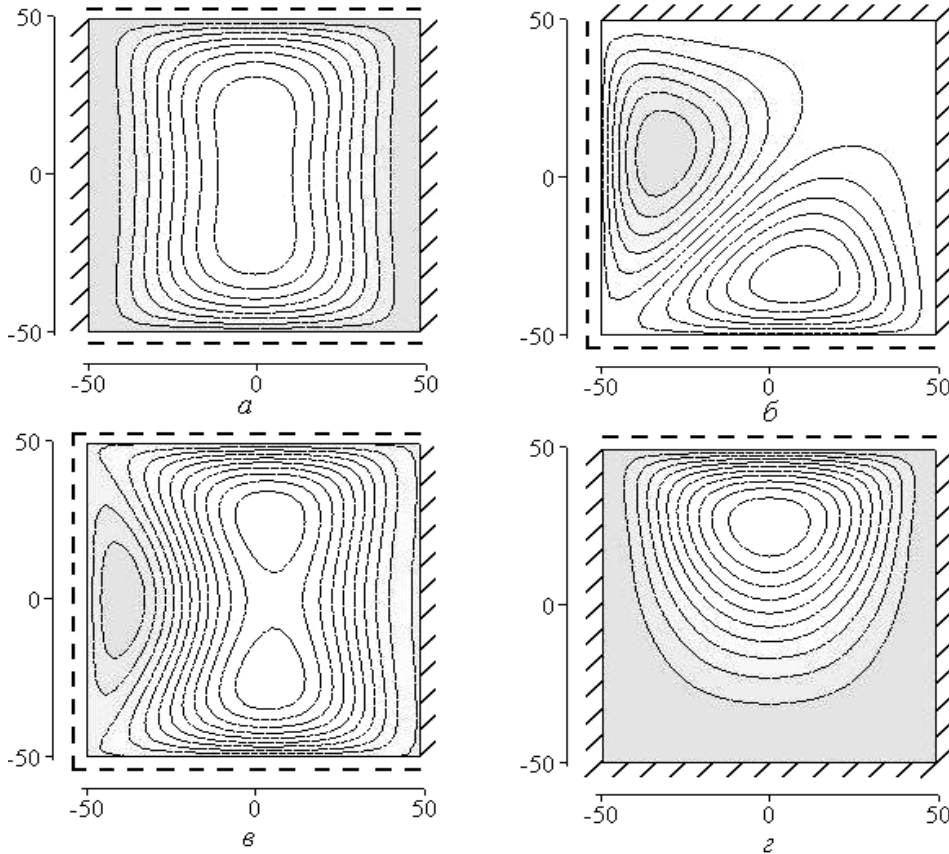


Рис. 8. Прогиб квадратных пластин со структурой $[0, 90]$ с различными условиями опирания

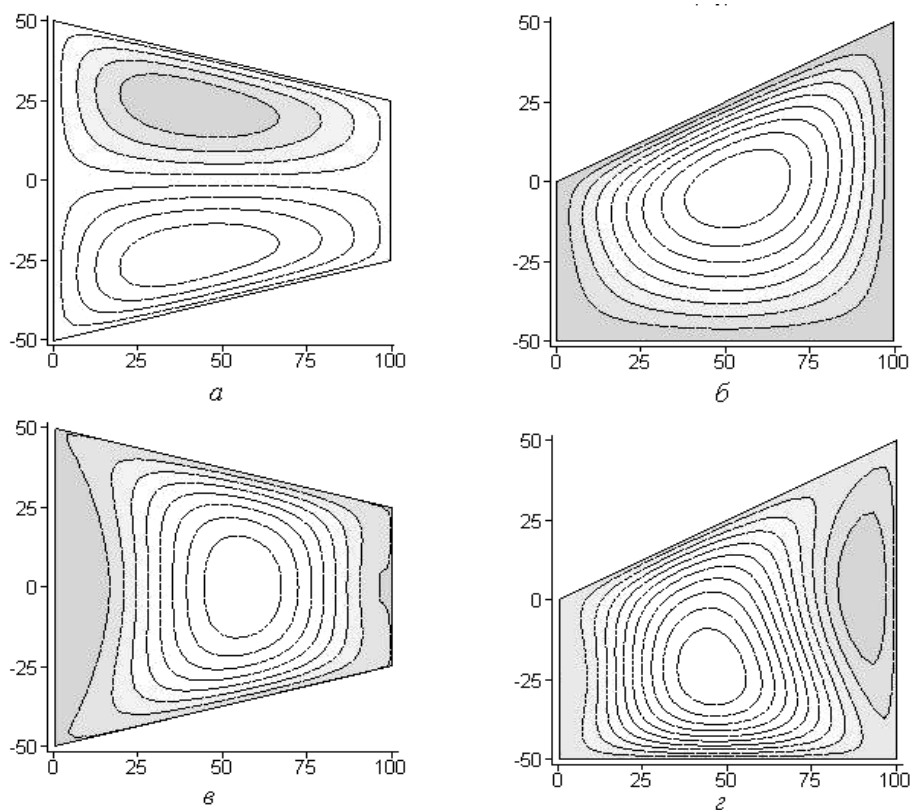


Рис. 9. Прогиб шарнирно опертых трапецидальных пластин со структурами:
 $a, б - [\pm 45]$; $в, г - [0, 90]$

Заключение

Таким образом, получено точное решение температурной задачи, применимое для прямоугольных шарнирно опертых пластин с ортотропной структурой. Решение представлено в виде двойных тригонометрических рядов по синусам.

Для пластин с произвольной схемой армирования, с различными условиями опирания и для пластин, имеющих непрямоугольную форму, для определения температурных прогибов может быть успешно применен метод Ритца-Тимошенко. Непосредственные расчеты показали, что используемый в качестве аппроксимирующей функции степенной многочлен достаточно хорошо представляет прогибы рассматриваемых пластин.

Приведенные в статье примеры показывают, что на решение температурной задачи существенно влияют условия опирания и форма пластины.

Литература

1. . Строительная механика летательных аппаратов: Учебник для авиационных специальностей вузов / И.Ф. Образцов Л.А.Булечев, В.В.Васильев и др.; под ред. акад. И.Ф. Образцова. – М.: Машиностроение, 1986. – 536 с.
2. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
3. Карпов Я.С. Механика композиционных материалов. Учебное пособие. – Х.: Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2001. – 122 с.

Поступила в редакцию 3.09.2005

Рецензент: канд. тех. наук, проф. В.В. Кириченко, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков.