УДК 621.391:517:518:510.52

В.А. ИГНАТОВ, С.А. КУДРЕНКО, В.И. НИКУЛИН, М.И. ВЕЛЬДЯСКИНА

Национальный авиационный университет, Киев, Украина

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ОБРАБОТКОЙ СИГНАЛОВ В ИНТЕГРИРОВАННЫХ АЭРОКОСМИЧЕСКИХ НАВИГАЦИОННЫХ КОМПЛЕСАХ

Дано теоретическое обоснование метода оптимального управления обработкой результатов неравноточных измерений по критерию максимального правдоподобия и найдена функция оптимального комплексирования измерительных систем в интегрированных аэрокосмических навигационных комплексах.

неравноточные измерения, интегрированные радиоэлектронные комплексы, оптимальное комплексирование измерительных систем, неоднородные порядковые статистики

Введение

Одним из приоритетных направлений применения концепции CNS/ATM ATN является повышение точности измерения основных навигационных параметров движения воздушных судов – местоположения (position), скорости (velocity), ускорения (acceleration) – бортовыми, наземными и спутниковыми навигационными системами [1, 2]. В дальнейшем такие системы названы коротко как МСУ (местоположение, скорость ускорение) системы (PVA systems). Повышение точности достигается применением методов комплексирования систем [3 – 6]. С теоретической точки зрения это обозначает применение оптимальной обработки результатов неравноточных измерений.

Подобная проблема актуальна также: в теории приближенных вычислений, при обработке результатов эксперимента, при контроле и диагностировании [2], во многих других случаях, когда в измерениях применяют датчики, которые построены на различных физических принципах и имеют из-за этого различные погрешности измерений.

Во всех этих случаях необходимо иметь теоретическое обоснование того, как можно получить наилучшую общую оценку измеряемого параметра по результатам измерений неравноточных датчиков. Элементы этой теории разрабатывают многие специалисты, в том числе в области математической статистики и теории статистических решений, где рассматриваемая проблема известна как проблема обработки выборок из неоднородных порядковых статистик [4]. Однако полученные результаты, как правило, ориентированы на доказательство асимптотического свойства получаемых оценок – свойство давать все более точные оценки с ростом объема выборок (числа датчиков). На практике приходиться иметь дело с относительно небольшим числом датчиков: от 3 до 10, что не позволяет воспользоваться этими результатами.

Цель работы. Дать теоретическое обоснование метода оптимального управления обработкой результатов неравноточных измерений по критерию максимального правдоподобия и найти функцию оптимального комплексирования измерительных систем в интегрированных аэрокосмических навигационных комплексах.

Постановка задачи.

1. Известными предполагаются следующие данные:

1.1. Математическая модель результата косвенных измерений Y_i i-й системой истинного значения X_0 навигационного параметра в момент времени t измерений

$$Y_i(t) = X_0(t) + \xi_i(t), \;\; i = \overline{1,m}, \qquad (1)$$

где m – общее число систем, которые участвуют в формировании комплекса;

$\xi(t)$ – случайная абсолютная погрешность прямых измерений.

1.2. Предполагается, что истинное значение измеряемого параметра в (1) есть величина, детерминированная и постоянная, а погрешность представляет собой гауссов стационарный сигнал с известными числовыми характеристиками.

1.3. Математическое ожидание погрешности:

$$M[\xi_i(t)] = 0, \qquad (2)$$

дисперсия:

$$D[\xi_i(t)] = \sigma_i^2, \; i = \overline{1,m}. \qquad (3)$$

2. По этим данным необходимо разработать метод оптимального управления обработкой результатов неравноточных измерений по критерию максимального правдоподобия и найти функцию оптимального комплексирования измерительных систем в интегрированных аэрокосмических навигационных комплексах.

Решение задачи

Вначале задачу решим для простейшего случая $m = 2$, а затем обобщим полученное решение на случаи $m > 2$.

Случай m = 2. Рассмотрение этого случая начнем с теоремы 1, которая содержит необходимые условия несмещенности и эффективности оптимальной комплексной оценки в неравноточных косвенных измерениях.

Теорема 1. Если в неравноточных косвенных измерениях выполняются следующие необходимые условия:

A. Измерительные преобразователи всех каналов имеют линейные гауссовские характеристики преобразования результатов прямых измерений в результаты косвенных измерений.

B. Числовые характеристики начального истинного значения X_{00} параметра определяют соотношения

$$M[X_{00}] = 0, \;\; D[X_{00}] = 0. \qquad (4)$$

C. Числовые характеристики текущего истинного значения X_0 определяют соотношения

$$M[X_0] = X_0, \;\; D[X_0] = 0. \qquad (5)$$

D. Результат i-го косвенного измерения в соответствии с утверждением Леммы 1 [7] может быть представлен в виде

$$Y_i(t) = X_0(t) + \xi_i(t), \;\; i = 1{,}2, \qquad (6)$$

где ξ_i – абсолютная погрешность i-го результата прямых измерений.

E. Числовые характеристики i-й погрешности определяют соотношения

$$M[\xi_i] = 0, \;\; D[\xi_i] = D[Y_i], \;\; i = 1{,}2. \qquad (7)$$

F. Числовые характеристики i-го результата (6) косвенных измерений в начальной точке Y_{io} определяют соотношения

$$M[Y_{io}] = 0, \;\; D[Y_{io} = 0], \;\; i = 1{,}2. \qquad (8)$$

G. Числовые характеристики комплексной оценки $Z(Y_{1,}Y_2)$ косвенных измерений в начальной точке $Y_{1o,}\; Y_{2o}$ определяют соотношения:

$$M[Z(Y_{1o,}Y_{2o})] = 0,$$
$$D[Z(Y_{1o}, Y_{2o})] = 0\,,. \qquad (9)$$

H. Условие нормировки коэффициентов передачи преобразователей каналов:

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{dz}{dy_{i0}} = \sum_{i=1}^{2} g_i = 1, \qquad (10)$$

где $\dfrac{dz}{dy_{i0}}$ – математическое ожидание i-й производной в начальной точке Y_{i_0}.

I. Условие оптимальности комплексной оценки $Z(Y_{1,}Y_2)$:

$$\frac{dD[Z]}{dg_i} = 0, \;\; i = 1{,}2, \qquad (11)$$

где $D[Z]$ – дисперсия комплексной оценки.

J. Условие достижения минимума $D[Z]$ в точке Z_{opt}:

$$\frac{d^2D[Z]}{dg_i^{\,2}} > 0,\ \ i = 1{,}2\,, \qquad (12)$$

то тогда и только тогда комплексная оценка

$$Z(Y_1, Y_2) = \sum_{i=1}^{2} g_{iopt} Y_i \qquad (13)$$

является оптимальной по критерию максимального правдоподобия, несмещенной и эффективной, а оптимальные коэффициенты определяются соотношениями:

$$g_{1opt} = \frac{D(Y_2)}{D(Y_1)+D(Y_2)} = \frac{1}{1+D(Y_1)/D(Y_2)}; \quad (14)$$

$$g_{21opt} = \frac{D(Y_1)}{D(Y_1)+D(Y_2)} = \frac{1}{1+D(Y_2)/D(Y_1)}; \quad (15)$$

минимальное значение дисперсии оптимальной комплексной оценки (13):

$$D_{\min}[Z_{opt}] = g_{iopt} D[Y_i] = 1/\sum_{i=1}^{2} 1/D[Y_i]\,. \qquad (16)$$

Доказательство. Используем условие A и представим $Z(Y_1, Y_2)$ в виде разложения в ряд Маклорена, в котором оставим только линейные члены:

$$Z(Y_1, Y_2) = f(Y_{10}, Y_{20}) + \frac{df}{dy}(Y_1 - Y_{10}) +$$
$$+ \frac{df}{dy_1}(Y_2 - Y_{20})\,. \qquad (17)$$

Для доказательства несмещенности оценки (13) выполним операцию определения математического ожидания (17) и учтем условия B – G для соответствующих математических ожиданий, получим:

$$M[Z(Y_1, Y_2)] = M[\frac{df}{dy_1}(Y_1 - Y_{10}) +$$
$$+ \frac{df}{dy_1}(Y_1 - Y_{10})] = M[\frac{df}{dy_1} + \frac{df}{dy_1}]X_0\,. \qquad (18)$$

При выполнении условия нормировки G (10):

$$M[Z(Y_1, Y_2)] = X_{0,} \qquad (19)$$

следовательно, оценка (16) является несмещенной.

Для доказательства эффективности оценки (13) выполним операцию определения ее дисперсии и учтем при этом условия B – F для соответствующих дисперсий, получим

$$D[Z(Y_1, Y_2)] = D[f(Y_1, Y_2)] + D[\frac{df}{dy_1}(Y_1 - Y_{10})] +$$
$$+ D[\frac{df}{dy_1}(Y_2 - Y_{20})] = \sum_{i=1}^{2} (\frac{df}{dy_{i0}})^2 D(Y_i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{2} g_i^{\,2} D(Y_i)\,. \qquad (20)$$

Учтем в (20) условие (12), обозначив $g_1 = g$, а $g_2 = 1 - g$, получим:

$$D_z(g) = g^2 D_1 + (1-g)^2 D_2\,. \qquad (21)$$

Выберем такое оптимальное значение g, при котором выполняется условие I (11) и будет достигаться минимальное значение дисперсии:

$$g_{opt} = \arg\min_{g\epsilon[0,1]} D_z(g)\,. \qquad (22)$$

Классическую задачу поиска экстремума функции одной переменной решим стандартным методом. Найдем значение первой производной функции (21) по g, приравняем результат нулю, получим уравнение оптимизации

$$2g_{opt}D_1 - 2(1 - g_{opt})D_2 = 0\,. \qquad (23)$$

Из решения этого уравнения найдем

$$g_{opt} = D_2/(D_1 + D_2) = \frac{1}{1 + D_1/D_2}\,. \qquad (24)$$

Так как вторая производная функции (20):

$$\frac{\delta^2}{\delta g^2} D_z(g) = 2(D_1 + D_2) > 0, \qquad (25)$$

условие J выполняется и найденное значение g_{opt} доставляет минимум функции (20), равный

$$D_{2\min}(g_{opt}) = \frac{D_1 D_2}{D_1 + D_2} = g_{opt} D_1 =$$
$$= (1 - g_{opt})D_2\,, \qquad (26)$$

следовательно, оценка является эффективной, что и требовалось доказать.

Полученный результат позволяет ввести три очевидных показателя эффективности оптимального комплексирования МСУ систем.

Индексный показатель максимального значения (мажоранта) эффективности оптимального комплексирования:

$$W_1 = \frac{\max(D_1, D_2)}{D_{2\min}} = \frac{1}{g_{opt}} = 1 + \frac{D_1}{D_2},$$

$$D_1 > D_2 \,. \tag{27}$$

Индексный показатель среднего значения эффективности оптимального комплексирования для случая, когда вместо оптимальной оценки

$$Z_{2opt} = g_{opt}Y_1 + (1 - g_{opt})Y_2 \tag{28}$$

используется среднеарифметическое значение результатов двух измерений

$$X_{20} = (Y_1 + Y_2)/2 \,, \tag{29}$$

$$W_2 = \frac{D_{20}}{D_{2\min}} = \frac{(D_1 + D_2)^2}{4D_1D_2} = \frac{(1 + D_1/D_2)}{4D_1/D_2} \,. \tag{30}$$

Индексный показатель минимального значения эффективности (миноранта) оптимального комплексирования, когда вместо оценки (13) используется измеренное значение на выходе того датчика, который имеет меньшую погрешность

$$W_3 = \frac{\min(D_1, D_2)}{D_{2\min}} = 1 + \frac{D_1}{D_2}\,,\ D_1 < D_2, \tag{31}$$

Обозначим безразмерное отношение D_1/D_2 через U, $U \in [1, \infty)$. Выразим показатели эффективности оптимального комплексирования как функции U:

$$W_1 = 1 + U,$$

$$W_2 = \frac{(1+U)^2}{4U},$$

$$W_3 = 1 + \frac{1}{U}\,. \tag{32}$$

Установим взаимосвязи между этими показателями. Так как $U = W_1 - 1$, то:

$$W_1 = W_2/(W_2 - 1)\,,$$

$$W_2 = W_1^{\,2}/4(W_1 - 1),$$

$$W_3 = W_1/(W_1 - 1)\,. \tag{33}$$

На рис. 1 показаны графики функций (32) в зависимости от U. С ростом U от 1 (случай равноточных измерений) и до ∞ (случай комплексирования с эталонной системой, у которой $D_2 = 0$) наблюдается пропорциональное увеличение W_1. Это обозначает, что применение комплексной оценки (13) дает максимальный выигрыш по точности, пропорциональный отношению дисперсий.

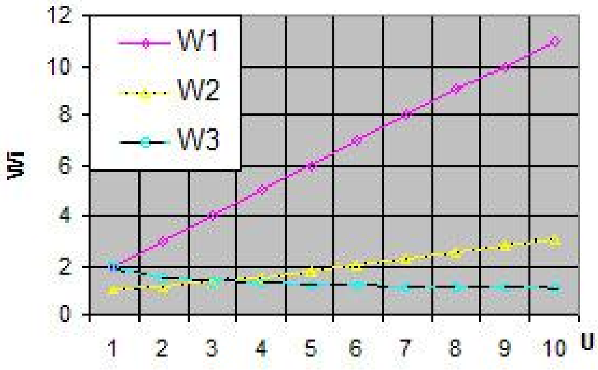

Рис. 1. Графики функций (32)

Применение оптимальной оценки (13) по сравнению со средним арифметическим значением (29) дает увеличение показателя эффективности во столько раз (кривая 2), во сколько раз квадрат среднеарифметического значения дисперсий измерений превышает квадрат среднегеометрического значения этих дисперсий. Применение метода замещения (кривая 3) тем эффективнее, чем больше отличаются между собой дисперсии измерений. При $U = 1$ $D_1 = D_2$ измерения являются равноточными и формулы (32) приводят к известным результатам $W_1(1) = W_3(1) = 2$, $W_2(1) = 1$. Таким образом, оптимальное комплексирование «грубой» и «точной» измерительных систем с использованием несмещенной оценки (13) с коэффициентом (24) обеспечивает достижение минимального значения общей дисперсии измерений (26) и является тем более эффективным, чем больше отличаются между собой погрешности систем комплекса.

Рассмотрим два характерных примера оптимального комплексирования аэрокосмических навигационных систем.

Пример 1. Рассмотрим, что дает оптимальное комплексирование первичных и вторичных радиолокаторов при измерении высоты полета самолетов как объектов управления.

Среднеарифметическая погрешность измерения дальности R трассовыми радиолокаторами на высотах полета H=(10 – 20) км составляет примерно $\sigma_R = (0{,}2 - 0{,}25)$ км. Среднеарифметическая погрешность σ_{H2} передачи высоты H ответчиками вторичных радиолокаторов по показаниям пилотажных приборов самолетов составляет примерно $\sigma_{H2} \approx 37{,}5$ м. Выполним по этим данным оптимальное комплексирование и оценим его эффективность по формулам (33).

Для определение среднеарифметической погрешности измерения высоты полета самолетов трассовыми радиолокаторами учтем, что между дальностью действия R и высотой H полета самолетов существует зависимость

$$H = R\sin[arctg(H/\sqrt{R^2 - H^2})] = R\sin\beta . \quad (33)$$

При $R = 400$км, $H = 10$км, $\mathrm{tg}(10/400) \approx 0{,}25$, $\beta \approx 14^{\circ}$, $\sin 14^{\circ} \approx 0{,}2419$. Применяя линейную аппроксимацию (33) для оценки среднеквадратической погрешности измерения высоты трассовыми радиолокаторами, получим

$$\sigma_{H2} = \sqrt{0{,}2419^2 \times 250^2} \approx 60{,}475 \text{ м}.$$

Таким образом:

$$D_{H1} \approx 3657 \text{ м}^2;$$
$$D_{H2} \approx 1406{,}25 \text{ м}^2;$$
$$U \approx 2{,}6;$$
$$g_{opt} \approx 0{,}72226,\ 1 - g_{opt} \approx 0{,}27774;$$
$$D_{2\min} \approx 0{,}72226 \times 1406{,}25 \approx 0{,}27774 \times 3657 \approx$$
$$\approx 1015{,}82 \text{м}^2;$$
$$\sigma_{2\min} \approx 31{,}87 \text{ м};$$
$$W_1(2{,}6) \approx 3{,}6;$$
$$W_2(2{,}6) \approx 1{,}24615;$$
$$W_3(2{,}6) \approx 1{,}38461.$$

Отсюда следует, что по сравнению со среднеарифметической оценкой оптимальное комплексирование позволяет примерно на 25% уменьшить дисперсию радиолокационных измерений высоты полета, что является особо актуальным при уменьшении диапазонов эшелонирования и использовании принципа «free flight».

Пример 2. Рассмотрим особенности оптимального комплексирования систем GPS и INS [5]. Для спутниковой системы GPS среднеквадратическая погрешность доплеровского измерителя скорости $\sigma_{v2} \approx 0{,}001$ м/с. Для бортовой автономной системы инерциальной навигации INS среднеквадратическая погрешность измерителя скорости $\sigma_{v1} \approx 0{,}5$ м/с за один час полета. Определим эффективность оптимального комплексирования GPS и INS по измерению скорости.

Рассчитаем безразмерный параметр U и весовые коэффициенты (24) оценки (28):

$$U = \sigma_{v1}{}^2 / \sigma_{v2}{}^2 = 0{,}5^2 / 0{,}001^2 \approx 2500,$$

$$g_{opt} = \sigma_{v2}{}^2 / (\sigma_{v1}{}^2 + \sigma_{v2}{}^2) = 0{,}001^2 / (0{,}5^2 +$$
$$+ 0{,}01^2) = 0{,}0^3 39984;$$

$$1 - g_{opt} = 0{,}9^3 60016 .$$

Определим значения $D_{2\min}$, $\sigma_{2\min}$ и показателей эффективности $W_1 - W_3$:

$$D_{2\min} \approx g_{opt} \times \sigma_{v1}{}^2 \approx$$
$$\approx 0{,}0^3 39984 \times 0{,}25 \approx 0{,}0^4 9^3 6001;$$
$$\sigma_{2\min} = 0{,}009998 \text{ м/с};$$
$$W_1 = 1 + U = 1 + 2500 = 2501;$$
$$W_2 = (1+U)^2 / 4U = (1+2500)^2 / 4 \times 2500 = 625{,}5;$$
$$W_3 = 1 + 1/U = 1 + 1/2500 = 1{,}0^3 4 .$$

Рассчитаем вклад $\sigma_{v1}{}^2$ в общую дисперсию D_{20}:

$$\Delta D_1 = g_{opt}{}^2 \times D_1 \approx (0{,}0^3 39984)^2 \times 0{,}25 \approx 0{,}0^7 3996.$$

Определим относительную погрешность метода замещения:

$$\Delta = \Delta D_1 / D_{20} \approx 0{,}0^7 3996 / 0{,}0^4 9^3 6001 \approx$$
$$\approx (0{,}0^3 39975986) \approx 0{,}04\%.$$

Следовательно, корректировка результатов измерения скорости INS по результатам измерения скорости GPS, выполняемая через каждый час полета, обеспечивает требуемую нормативно-техническими документами точность определения путевой скорости.

Случай $m > 2$. Используя индуктивный метод, нами доказано, что в этом случае

$$g_{i,opt} = D_i / \sum_{k=1}^{m} D_k = \left[\sum_{k=1}^{m} D_k / D_i\right]; \quad (34)$$

$$D_{m,\min}(g_{1,opt} g_{m,opt}) = D_1 \left[\sum_{k=1}^{m} D_k / D_1 \right]. \quad (35)$$

Исследование этого интересного общего случая является предметом отдельной работы.

Выводы

1. Глубокое исследование простейшего случая двух неравноточных измерений позволяет дать теоретическое обоснование метода оптимального управления обработкой результатов неравноточных измерений по критерию максимального правдоподобия, найти функцию оптимального комплексирования измерительных систем в интегрированных аэрокосмических навигационных комплексах для общего случая $m > 2$**.**

2. Результаты расчетов приведенных примеров, которые имеют и самостоятельное значение, позволяют сделать однозначный вывод о том, что в случае комплексирования радиолокаторов наиболее эффективным является их совместное использование, а в случае комплексирования систем GPS и INS более эффективно использование метода замещения. Он приводит к относительной среднеквадратической погрешности, меньшей 0,2%. Иначе говоря, результаты измерений INS целесообразно корректировать примерно через каждый час полета по результатам спутниковых измерений GPS, которые могут рассматриваться как эталонные.

3. Введенные критерии эффективности (32), (33) позволяют всесторонне оценить техническую эффективность оптимального комплексирования. Дальнейшее развитие теории оптимального комплексирования предполагает построение целевых функционалов, в которых отражаются также социальная и экономическая эффективности, например, влияние комплексирования на безопасность полетов, регулярность воздушных сообщений, массогабаритные характеристики спутников и оборудования, затраты всех видов ресурсов.

Литература

1. Игнатов В.А. Теория информации и передачи сигналов: Учебник для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1991.– 280 с.

2. Игнатов В.А., Боголюбов Н.В. Управление информационной избыточностью систем диагностирования и контроля // Контроль и управление техническим состоянием авиационного и радиоэлектронного оборудования воздушных судов гражданской авиации: Сб. научн. тр. – К.: КИИГА, 1990. – С. 3-13.

3. Андрусяк А.І., Дем’янчук В.С., Юр’єв Ю.М. Мережа авіаційного зв’язку. – К.: НАУ, 2001. – 448 с.

4. Гутер Р.С., Овчинский Б.В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. – М.: Физматгиз, 1962. – 356 с.

5. Richard E. Phillips, George T. Schmidt. GPS/INS Integration // System Implications and Innovative Applications of Satellite Navigation, AGARD – LS – 207, Advisory Group for Aerospace Research and Development. – Neuilly-sur-Seine, France, June 1996.

6. Greenspan, R.L. GPS/Inertial Overview // Aerospace Navigation Systems, AGARD – AG – 331, Advisory Group for Aerospace Research and Development. – Neuilly-sur-Seine, France, June 1995.

7. Необходимые условия оптимального управления обработкой сигналов в интегрированных аэрокосмических навигационных системах / В.А.Игнатов, С.А. Кудренко, В.И. Никулин, М.И. Норица // Вісник НАУ. – К.: НАУ, 2006. – Вип. 3. – С. 110-118.

Поступила в редакцию 6.06.2007

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Ю.А. Крашаница, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского “ХАИ”, Харьков.