УДК 533.9.07

С.Ю. НЕСТЕРЕНКО, Ш. РОШАНПУР

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Украина

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МОМЕНТОВ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ ПО СКОРОСТЯМ В РАЗРЕЖЕННОЙ СРЕДЕ ИНДУКЦИОННЫХ ИСТОЧНИКОВ ПЛАЗМЫ, ЭЛЕКТРОНОВ И ИОНОВ

Названы основные отличия между процессами в разреженной среде электроракетных двигателей по сравнению с плотными газами в других реактивных двигателях. Показана необходимость описания процессов с более полным набором переменных и уравнений. Приведена общая форма записи уравнения момента произвольного порядка функции распределения по скоростям. Показана принципиальная невозможность получения замкнутой системы уравнений и необходимость внесения предположений той или иной силы для ее приближенного замыкания. Показано несоответствие принятых в рамках метода локального термодинамического равновесия способов приближенного замыкания системы условиям предельно разреженной среды в электроракетных устройствах. Записана более детальная форма уравнений для сильно неравновесной среды.

Ключевые слова: *функция распределения, уравнения моментов, неравновесный газ*

Введение

Особенностью процессов в электроракетных двигателях (ЭРД) по сравнению с воздушно-реактивными или жидкостными ракетными двигателями является разреженность рабочей среды. Длины свободных пробегов относительно всех процессов в объеме превосходят размеры разрядного объема, что приводит к двум основным, требующим учета, отличиям по сравнению с двигателями с большим давлением рабочей среды:

– преобладанием взаимодействия частиц с поверхностями или потенциальным слоем на границе плазмы с поверхностями или окружающей средой;

– термодинамической неравновесностью компонент, а значит необходимостью описания с использованием большего количества параметров и большего количества уравнений с более детальной, чем в применении к плотным средам, записью как самих уравнений, так и граничных условий к ним.

В данной работе сформулирована система уравнений моментов функции распределения вплоть до момента третьего порядка, которая может использоваться при построении математических моделей процессов в ЭРД.

1. Уравнение момента функции распределения произвольного порядка

Основными газодинамическими параметрами любой компоненты α в плазме являются концентрация n_α, среднемассовая скорость $\vec{V}_\alpha$ и температура T_α. Соответственно, для отыскания названных параметров требуется система уравнений с числом уравнений, совпадающим с числом неизвестных.

Основой для вывода таких уравнений является кинетическое уравнение компоненты [1]:

$$\frac{\partial f(t,\vec{r},\vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot \left(f(t,\vec{r},\vec{v})\vec{v} \right) + \frac{1}{m}\nabla_v \cdot \left(f(t,\vec{r},\vec{v})\vec{F}(\vec{r},\vec{v}) \right) = \frac{\delta f(t,\vec{r},\vec{v})}{\delta t}, \qquad (1)$$

где $f(t,\vec{r},\vec{v})$ – функция распределения частиц по скоростям;

$\vec{F}(\vec{r},\vec{v})$ – сила внешнего поля, действующая на частицу;

$\dfrac{\delta f(t,\vec{r},\vec{v})}{\delta t}$ – интеграл столкновений – изменение функции распределения в единицу времени в результате столкновений;

∇, ∇_v – операторы Гамильтона в пространстве координат и в пространстве скоростей:

$$\nabla = \sum_n i_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \qquad \nabla_v = \sum_n i_n \frac{\partial}{\partial v_n}. \qquad (2)$$

Для записи уравнений моментов функции распределения введем сначала понятие *момента скорости* ранга n:

$$\mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v}) = m_\alpha \underbrace{\vec{v}\,\vec{v}...\vec{v}}_{n} = m_\alpha \vec{v}^{\lceil n \rceil}. \qquad (3)$$

Например:

- момент скорости *нулевого* ранга есть тензор нулевого ранга (скаляр):

$$\mathbf{m}_\alpha^{[0]}(\vec{v}) = m_\alpha \tag{4}$$

и представляет собой массу частицы;

- момент скорости первого ранга есть тензор первого ранга (вектор):

$$\mathbf{m}_\alpha^{[1]}(\vec{v}) = m_\alpha \vec{v} \tag{5}$$

и представляет собой импульс частицы;

- момент скорости второго ранга есть тензор второго ранга:

$$\mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v}) = m_\alpha \vec{v}\,\vec{v} =$$

$$= \begin{vmatrix} m_\alpha v_x^2 & m_\alpha v_x v_y & m_\alpha v_x v_z \\ m_\alpha v_y v_x & m_\alpha v_y^2 & m_\alpha v_y v_z \\ m_\alpha v_z v_x & m_\alpha v_z v_y & m_\alpha v_z^2 \end{vmatrix}, \tag{6}$$

не имеющий специального названия в механике, но связанный с энергией частицы – половина следа (суммы диагональных компонент) этого тензора равна кинетической энергии:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v}) = \frac{m_\alpha\left(v_x^2+v_y^2+v_z^2\right)}{2}. \tag{7}$$

Моментом n-го ранга функции распределения $\mathbf{M}_\alpha^{[n]}$ [1] называют интеграл вида:

$$\mathbf{M}_\alpha^{[n]} = \int f_\alpha(\vec{v})\,\mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v})\,d\vec{v}. \tag{8}$$

В данном случае момент 0-го ранга представляет собой плотность массы, момент 1-го ранга – плотность импульса, момент 2-ранга – плотность потока импульса. Здесь и в приведенных ниже уравнениях мы опускаем символы зависимости от координат и времени. Чтобы получить уравнение изменения во времени момента $\mathbf{M}_\alpha^{[n]}$, умножим обе части кинетического уравнения (1) на $\mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v})$ и проинтегрируем по всем значениям скорости:

$$\int \frac{\partial f_\alpha(\vec{v})}{\partial t}\mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v})\,d\vec{v} + \int \nabla\cdot\left(f_\alpha(\vec{v})\,\vec{v}\right)\mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v})\,d\vec{v} +$$

$$+\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\int \nabla_v\cdot\left(f_\alpha(\vec{v})\left(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right)\right)\mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v})\,d\vec{v} =$$

$$= \int \frac{\delta f_\alpha(\vec{v})}{\delta t}\mathbf{m}_\alpha^{[n]}(\vec{v})\,d\vec{v}. \tag{9}$$

Интегрирование в (9) приводит к уравнению:

$$\frac{\partial \mathbf{M}_\alpha^{[n]}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{M}_\alpha^{[n+1]} -$$

$$-n\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\overline{\mathbf{M}_\alpha^{[n-1]}\vec{E} + \mathbf{M}_\alpha^{[n]}\times\vec{B}} = \frac{\delta \mathbf{M}_\alpha^{[n]}}{\delta t}, \tag{10}$$

где $\dfrac{\delta \mathbf{M}_\alpha^{[n]}}{\delta t}$ – изменение момента $\mathbf{M}_\alpha^{[n]}$ в единицу времени в результате столкновений.

Символ $\overline{\mathbf{A}^{[n]}}$ в (1.23), (1.24) означает симметричный тензор, образованный из тензора $A^{[n]}$ с помощью операции симметрии:

$$\overline{\mathbf{A}^{[n]}} = \frac{1}{n!}\sum \mathbf{A}^{[n]*}, \tag{11}$$

где $\sum \mathbf{A}^{[n]*}$ – сумма исходного тензора $\mathbf{A}^{[n]}$ и всех тензоров, получаемых путем перестановки индексов его компонент.

Например, для тензора второго ранга имеем:

$$\left(\overline{\mathbf{A}}\right)^{(mn)} = \frac{1}{2}\left(A^{(mn)} + A^{(nm)}\right), \tag{12}$$

а для тензора третьего ранга:

$$\left(\overline{\mathbf{A}}\right)^{(kmn)} = \frac{1}{6}\left(A^{(kmn)} + A^{(knm)} + A^{(mkn)} + \right.$$

$$\left. + A^{(nkm)} + A^{(mnk)} + A^{(nmk)}\right) \text{ и т.д.} \tag{13}$$

Уравнение (10) представляет собой общую форму уравнения момента функции распределения произвольного порядка.

2. Искусственно-замкнутые системы

Момент функции распределения нулевого порядка есть плотность массы. При n=0 в (10) имеем уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho_{M\alpha}}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{p}_\alpha^{(V)} = \frac{\delta \rho_{M\alpha}}{\delta t}, \tag{14}$$

где $\rho_{M\alpha}$ – плотность массы компоненты.

Кроме искомой плотности массы уравнение неразрывности содержит также плотность импульса $\vec{p}_\alpha^{(V)}$, численно тождественную плотности потока массы – момент первого порядка функции распределения. При n=1 в (10) имеем уравнение движения:

$$\frac{\partial \vec{p}_\alpha^{(V)}}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{\Pi}_\alpha -$$

$$-\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\left(m_\alpha n_\alpha \vec{E} + \vec{p}_\alpha^{(V)}\times\vec{B}\right) = \frac{\delta \vec{p}_\alpha^{(V)}}{\delta t}. \tag{15}$$

Кроме искомой плотности импульса уравнение движения содержит также плотность потока импульса $\mathbf{\Pi}_\alpha$ (кинетический тензор) – момент второго порядка. При n = 2 в (10) имеем уравнение потока импульса:

$$\frac{\partial \mathbf{\Pi}_\alpha}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{Q}_\alpha - 2\frac{q_\alpha}{m_\alpha}\overline{\vec{p}_\alpha^{(V)}\vec{E} + \mathbf{\Pi}_\alpha\times\vec{B}} = \frac{\delta\mathbf{\Pi}_\alpha}{\delta t}. \qquad (16)$$

Кроме искомой плотности потока импульса уравнение потока импульса содержит также не имеющий специального названия третий момент функции распределения $\mathbf{Q}_\alpha$. При этом в соответствии с (7) сумма диагональных компонент (16) представляет собой уравнение энергии:

$$\frac{\partial \varepsilon_\alpha^{(V)}}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{q}_\alpha - q_\alpha n_\alpha \vec{V}_\alpha\cdot\vec{E} = \frac{\delta\varepsilon_\alpha^{(V)}}{\delta t}, \qquad (17)$$

где $\vec{q}_\alpha$ – плотность потока энергии компоненты:

$$\vec{q}_\alpha = \frac{1}{2}\sum_{mn} i_m Q_\alpha^{(mnn)}. \qquad (18)$$

Система уравнений моментов функции распределения оказывается принципиально не замкнутой и может использоваться в решении задач, только будучи замкнутой приближенно. При этом существуют разные степени приближения, в которых такое описание возможно.

Представленные в приведенных выше уравнениях величины могут быть выражены через их значения в сопутствующей системе координат, в которой в данный момент в данной точке среднемассовая скорость компоненты равна нулю:

$$\mathbf{\Pi}_\alpha = m_\alpha n_\alpha \vec{V}_\alpha\vec{V}_\alpha + \mathbf{P}_\alpha, \qquad (19)$$

$$\mathbf{Q}_\alpha = m_\alpha n_\alpha \vec{V}_\alpha\vec{V}_\alpha\vec{V}_\alpha + 3\,\overline{\vec{V}_\alpha\mathbf{P}_\alpha} + \mathbf{G}_\alpha, \qquad (20)$$

где $\mathbf{P}_\alpha$ – тензор давления компоненты;

$\mathbf{G}_\alpha$ – третий статический момент (называем его далее условно ”потоком давления”), равный моменту $\mathbf{Q}_\alpha$ в сопутствующей системе координат.

При этом вместо уравнений потока импульса (16) можно использовать уравнение давления:

$$\frac{\partial \mathbf{P}_\alpha}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\vec{V}_\alpha\mathbf{P}_\alpha + \mathbf{G}_\alpha\right) + 2\,\overline{\mathbf{P}_\alpha\cdot\nabla\vec{V}_\alpha - \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\mathbf{P}_\alpha\times\vec{B}} = \frac{\delta\mathbf{P}_\alpha}{\delta t}, \qquad (21)$$

дополняя его уравнением потока давления:

$$\frac{\partial \mathbf{G}_\alpha}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\vec{V}_\alpha\mathbf{G}_\alpha + \mathbf{W}_\alpha\right) + 3\,\overline{\mathbf{G}_\alpha\cdot\nabla\vec{V}_\alpha - \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\mathbf{G}_\alpha\times\vec{B} + \frac{\mathbf{P}_\alpha\nabla\cdot\mathbf{P}_\alpha}{m_\alpha n_\alpha}} = \frac{\delta\mathbf{G}_\alpha}{\delta t}, \qquad (22)$$

где $\mathbf{W}_\alpha$ – не имеющий специального названия четвертый статический момент.

Как уже было сказано, система уравнений моментов функции распределения может быть замкнута только приближенно.

Известны нулевое и первое приближения метода локального термодинамического равновесия (ЛТР) [1].

В нулевом приближении ЛТР для предельно плотных сред распределения считается абсолютно равновесным. При этом давление $\mathbf{P}_\alpha$ вырождается в скаляр с нулевыми не диагональными и равными друг другу диагональными компонентами, а поток давления $\mathbf{G}_\alpha$ равен нулю, и замкнутой оказывается система уравнений неразрывности, движения и энергии.

В первом приближении ЛТР для умеренно плотных сред тензорность давления учитывается, но с использованием известной записи, содержащей только производные проекций скорости по проекциям координаты и слагаемое, соответствующее релаксации вязкости в столкновениях – вновь достаточным оказывается использование уравнения энергии вместо уравнения давления, а для величины теплопроводности – использование записи, содержащей только градиент температуры и слагаемое, соответствующее релаксации теплопроводности в столкновениях.

В отношении же к разреженным средам в ЭРД оба уровня приближений ЛТР неприемлемы. Использоваться должна система уравнений неразрывности, движения, давления и потока давления. При этом приближенное замыкание системы возможно с учетом того, что даже при равновесном распределении четвертый статический момент $\mathbf{W}_\alpha$ имеет ненулевое значение:

$$\mathbf{W}_\alpha = 3\frac{\overline{\mathbf{P}_\alpha\mathbf{P}_\alpha}}{m_\alpha n_\alpha}. \qquad (23)$$

Обобщая приближенно (23) и на неравновесное распределение и подставляя его в (22), можно получить форму уравнения потока давления

$$\frac{\partial \mathbf{G}_\alpha}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\vec{V}_\alpha\mathbf{G}_\alpha\right) + 3\,\overline{\mathbf{G}_\alpha\cdot\nabla\vec{V}_\alpha - \frac{q_\alpha}{m_\alpha}\mathbf{G}_\alpha\times\vec{B} - \frac{\mathbf{P}_\alpha}{m_\alpha}\cdot\nabla\left(\frac{\mathbf{P}_\alpha}{n_\alpha}\right)} = \frac{\delta\mathbf{G}_\alpha}{\delta t}, \qquad (24)$$

не содержащую уже новых неизвестных.

Приведенные уравнения содержат запись тензора вязкости и вектора теплопроводности в качестве частных случаев: первое слагаемое во второй строке и правая часть (21) и последнее слагаемое левой части и правая часть (23).

Выводы

Записана система уравнений моментов функции распределения частиц по скоростям на уровне детальности, позволяющем описать неравновесный перенос импульса и энергии частиц в разреженной среде ЭРД. Нестационарная форма уравнений позволяет, в том числе, моделировать процессы в индукционных ВЧ-устройствах в области ЭРД.

Уравнение давления (21) представлено в работе [2], но без каких-либо рекомендаций к отысканию "потока давления" $\mathbf{G}_\alpha$. Уравнение потока давления (22) и позволяющая в предположении (23) замкнуть систему уравнений моментов форма (24) получены в данной работе.

Литература

1. Нестеренко, С.Ю. Электрогазодинамика: консп. лекц. [Электронный ресурс] / С.Ю. Нестеренко. – Х.: Нац. аэрокосм. ун-т "Харьк. авиац. ин-т", 2012. – 216 с. – Режим доступа: http://library.khai.edu. – 12.05.2013 г.

2. Росси, Б. Введение в физику космического пространства [Текст] / Б. Росси, С. Ольберт. – М.: Атомиздат, 1974. – 392 с.

Поступила в редакцию 12.05.2013, рассмотрена на редколлегии 12.06.2013

Рецензент: д-р техн. наук, проф., проф. кафедры А.И. Оранский, Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского "Харьковский авиационный институт", Харьков.

СИСТЕМА РІВНЯНЬ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ ЧАСТИНОК ЗА ШВИДКОСТЯМИ У РОЗРІДЖЕНОМУ СЕРЕДОВИЩІ ІНДУКЦІЙНИХ ДЖЕРЕЛ ПЛАЗМИ, ЕЛЕКТРОНІВ ТА ІОНІВ

С.Ю. Нестеренко, Ш. Рошанпур

Названо основні відмінності між процесами у розрідженому середовища електроракетних двигунів порівняно із щільними газами в інших реактивних двигунах. Показано необхідність описання процесів з більш повним набором змінних і рівнянь. Наведено загальну форму запису рівнянь моменту довільного порядку функції розподілу за швидкостями. Показано принципову неможливість отримання замкненої системи рівнянь і необхідність внесення припущень тої чи іншої сили для її наближеного замикання. Показано невідповідність прийнятих в рамках методу локальної термодинамічної рівноваги способів наближеного замикання системи рівнянь умовам гранично розрідженого середовища в електроракетних пристроях. Записано більш детальну форму рівнянь для сильно розрідженого середовища.

Ключові слова: функція розподілу, рівняння моментів, нерівноважний газ.

PARTICLES VELOCITY DISTRIBUTION FUNCTION MOMENTS EQUATIONS SET IN RARIFIED MEDIUM OF INDUCTIVE SOURCES OF PLASMA, ELECTRONS AND IONS

S.Yu. Nesterenko, Sh. Roshanpour

The basic differences are named between the processes in rarefied environment of electric propulsion thrusters in comparison with dense gases in other jet engines. The necessity of the of processes description with more complete set of variables and equations is shown. General form of arbitrary order moment of velocity distribution function is represented. Principal impossibility is shown to get the closed equations set as well as the necessity to input of the suppositions of different level for approximate closing of set. It is shown the nonconformance of usual in local thermal dynamics equilibrium ways of equation set approximate closing to the conditions of extremely rarified medium in electric propulsion devices. More detailed form of equations is written for much rarified medium.

Key words: distribution function, moments equations, non-equilibrium gas.

Нестеренко Сергей Юрьевич – канд. техн. наук, доцент кафедры двигателей и энергоустановок летательных аппаратов Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: thrust@d4.khai.edu.

Рошанпур Шахрам – аспирант кафедры двигателей и энергоустановок летательных аппаратов Национального аэрокосмического университета им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», Харьков, Украина, e-mail: sh.roshan2002@gmail.com.