

7. Groves, R. M., Lepkowski J. M. Dual Frame, Mixed Mode Survey Designs / R. M. Groves // Journal of Official Statistics. – 1985. – PP. 263-286. [Electronic resource]. Mode of access: <http://www.jos.nu/Articles/article.asp>
8. Ядов В.А. Стратегия социологического исследования. Описание, объяснение, понимание социальной реальности / В.А Ядов. – М.: «Добросвет», «Книжный дом» Универстет», 1999. – 596 с.
9. de Leeuw, E. D., Hox J.J. Internet Surveys as Part of a Mixed Mode Design/ E. D. de Leeuw // Social and Behavioral Research and the Internet: Advances in Applied Methods and Research Strategies. Ed. Marcel Das, Peter Ester, Lars Kaczmirek. New York: Taylor & Francis Group. – 2011. – PP. 45-76. [Electronic resource]. Mode of access: <http://www.psypress.com/common/sample-chapters/9781848728172.pdf>

Отримано 01.02.2015 р.

УДК 303.09, 303.733

Сидоров М.В.-С. °

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, факультет соціології, кандидат фізико-математичних наук, доцент

ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЛЯ СОЦІОЛОГІВ: ВИКОРИСТАННЯ ЛОГІСТИЧНОЇ МОДЕЛІ П.Ф. ФЕРХЮЛЬСТА ДЛЯ ПРОГНОЗУ РОЗВИТКУ ПОПУЛЯЦІЇ БЕЗ ЗОВНІШНЬОГО ВПЛИВУ

У роботі розглядається базова логістична модель Ферхюльста, наводиться її розв'язок у явному вигляді. На базі моделі ілюструється демографічний прогноз населення Землі до 2100 року. Недоліки моделі частково ілюструються за допомогою експерименту Келхуна.

Ключові слова: демографічна модель, логістична модель Ферхюльста, експеримент Келхуна

В работе рассматривается базовая логистическая модель Ферхюльста, приводится ее решение в явном виде. На базе модели иллюстрируется демографический прогноз населения Земли к 2100 году. Недостатки модели частично иллюстрируются с помощью эксперимента Кэлхуна.

Ключевые слова: демографическая модель, логистическая модель Ферхюльста, эксперимент Кэлхуна

We consider the basic logistic Verhulst population model, given its solution explicitly. With this model is illustrated demographic forecast of the World's population by 2100. Disadvantages partial illustrated by the Calhoun's experiment.

Keywords: demographic model, the logistic Verhulst population model, Calhoun's experiment

Одним з підходів до змістовного аналізу роботу будь-якої складної системи є її формалізація, тобто переведення її характеристик на мову чисел та співвідношень і, остаточно, побудова її моделі.

Одним з найбільш доступних для формалізації та, відповідно, прогнозування процесів у суспільстві є підрахунок чисельності населення, тому одними з перших математичних моделей, які знайшли застосування у суспільних науках, стали якраз моделі розвитку популяції.

Демографічних моделей на даний момент є досить багато – вони можуть описувати як глобальні демографічні процеси, так і процеси, що відбуваються у межах окремо взятої країни чи спільноти, можуть описуватись різними математичними техніками та підходами. Як і будь-які складні моделі. Вони будуються на більш простих моделях розвитку біологічних популяцій. Однією з найбільш вагомих **актуальних проблем**, які не дають можливості соціологам вільно застосовувати результати, пов'язані з цими моделями є математична складність моделей та недостатність математичної підготовленості самих соціологів.

У [5] розглядалися самі елементарні моделі розвитку популяції без зовнішнього впливу, які були описані Фібоначчі /Fibonacci/ (1170-1250) та Мальтусом. Т. Мальтус /Thomas Malthus/ (1766 - 1834) у своїй праці "Дослід щодо закону народонаселення" ("Essay on the Principle of Population", 1798) [3] вказав на те, що зростання населення без жодних стримувальних факторів має відбуватися експоненційно, в той час як збільшення харчових ресурсів можливе лише в арифметичній прогресії. Наслідком такого розвитку подій Мальтус бачив повернення до голоду, хвороб і війни за обмежені ресурси. Цей сценарій отримав назву "мальтузіанської катастрофи" і став основою школи мальтузіанства. Більше того, Мальтусом було відмічено, що рівень народжуваності серед робітничого класу, тобто бідних верств населення, є значно вищим за рівень народжуваності серед заможних і він висунув гіпотезу, що саме це, а не експлуатація робітничого класу веде до його зубожіння.

Наявність нескінченного обсягу ресурсів, що дозволяє нескінченно розмножуватись при додатному біотичному потенціалі є одним з самих грубих припущень експоненційної моделі зростання популяції Мальтуса, яка не дозволяє її використовувати у моделюванні багатьох реальних процесів.

Як правило, при розмноженні одним з головних факторів є наявність ресурсів (їжі та ін.). Чим більше на обмеженій території є осіб, тим більше вони займають місця, але їм потрібно більше ресурсу, який теж займає місце. Тобто виникає питання скільки на обмеженій території всього може прожити осіб.

Такою проблемою задався бельгійський математик П'єр Франсуа Ферхюльст / Pierre François Verhulst / (1804 - 1849). Він поставив запитання, чи зможе населення Бельгії зростати нескінченно і у 1845 році опублікував роботу "Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population", у 18 номері журналу Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles", де вперше запропонував модель росту популяції з врахуванням обмеження максимальної кількості населення.

Метою даної роботи є розв'язок у явному вигляді диференціального рівняння логістичної моделі Ферхюльста, його пояснення на елементарному рівні та ілюстрація роботи цієї моделі для прогнозування населення Землі до 2100 року.

Припустимо, що обмежена територія може "прогодувати" максимально F_{\max} осіб. Це обмеження накладається через обмежену наявність ресурсів, завдяки яким популяція може існувати або ж територією, на якій ці ресурси можна "виростити". У цій моделі значення F_{\max} не змінюється з часом через нові, більш продуктивні, технології виробництва ресурсів.

Тоді, на початку "роботи" моделі, коли доступних ресурсів на одну особу дуже багато, а населення мало, зростання його кількості відбувається майже за експоненційним законом, потім, зі зменшенням кількості ресурсів на особу, ріст заповільнюється, поки не досягне максимуму.

Формально така модель має вигляд

$$F(t + \Delta t) = F(t) \cdot \left(1 + r\Delta t \frac{F_{\max} - F(t)}{F_{\max}} \right), \quad (1)$$

тобто у біотичного потенціалу з'явився множник, який залежить від обсягу існуючої популяції та максимального допустимого обсягу популяції при фіксованих ресурсах.

Це рівняння можна переписати у вигляді різницевої схеми

$$F(t + \Delta t) - F(t) = r\Delta t \frac{F_{\max} - F(t)}{F_{\max}} \cdot F(t),$$

або інакше

$$\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = r \frac{F_{\max} - F(t)}{F_{\max}} \cdot F(t), \quad (2)$$

Якщо у (2) спрямувати зміну часу Δt до 0, отримаємо диференціальне рівняння

$$\frac{dF(t)}{dt} = rF(t) - r \frac{F^2(t)}{F_{\max}}, \quad (3)$$

Вперше це рівняння було запропоноване у якості моделі росту популяції Ферхюльстом.

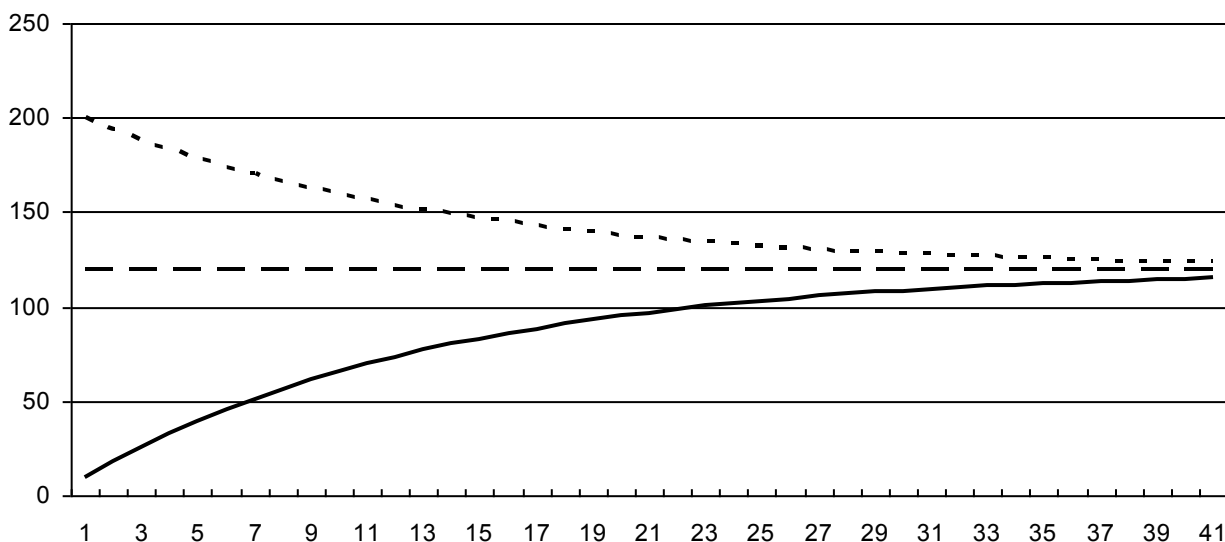


Рисунок 1. - Динаміка зміни обсягу популяції у моделі Ферхюльста.

Логістична крива, побудована за різницевою схемою (1). (Якщо обсяг популяції перевищує максимально допустиме значення F_{\max} , то він з часом спадатиме до F_{\max} , якщо ж менше за F_{\max} , то зростатиме до цього значення)

Загальним розв'язком цього однорідного диференційного рівняння є логістична функція (або S-подібна функція) $F(t) = C_0 \frac{F_{\max} e^{rt}}{1 + C_0 e^{rt}}$, де константу C_0 обчислюють, підставляючи початкове значення функції $F(t)$ при $t=0$.

Для розв'язання диференційного рівняння (3) спочатку перепишемо його у вигляді

$$\frac{dF(t)}{dt} = rF(t) \left(1 - \frac{F(t)}{F_{\max}} \right), \text{ далі } \frac{dF(t)}{F(t) \left(1 - \frac{F(t)}{F_{\max}} \right)} = r dt.$$

Так як біотичний потенціал r та максимально допустимий обсяг популяції F_{\max} є константами, то можемо записати $\frac{F_{\max} dF(t)}{F(t)(F_{\max} - F(t))} = r dt$, розділяємо змінні

$$\frac{dF(t)}{F(t)(F_{\max} - F(t))} = \frac{r}{F_{\max}} dt. \quad (4)$$

Для подальшого розв'язання рівняння застосовуємо метод невизначених коефіцієнтів, для чого розбиваємо ліву частину рівняння (4) на доданки

$$\begin{aligned} \frac{dF(t)}{F(t)(F_{\max} - F(t))} &= \left(\frac{dF(t)}{F(t)} + \frac{dF(t)}{F_{\max} - F(t)} \right) \frac{1}{F_{\max}}, \text{ і, після інтегрування, отримаємо} \\ \int \frac{dF(t)}{F(t)(F_{\max} - F(t))} &= \int \left(\frac{dF(t)}{F(t)} + \frac{dF(t)}{F_{\max} - F(t)} \right) \frac{1}{F_{\max}} = \\ &= \frac{1}{F_{\max}} \int \frac{dF(t)}{F(t)} + \frac{1}{F_{\max}} \int \left(\frac{dF(t)}{F_{\max} - F(t)} \right) = \frac{1}{F_{\max}} (\ln F(t) - \ln(F_{\max} - F(t))) = \\ &= \frac{1}{F_{\max}} \ln \frac{F(t)}{F_{\max} - F(t)}. \end{aligned}$$

Інтегруючи ліву частину (4), маємо $\int \frac{r}{F_{\max}} dt = \frac{r}{F_{\max}} t$.

Остаточно, об'єднуючи інтеграли правої та лівої частин рівняння (4), отримаємо $\frac{1}{F_{\max}} \ln \frac{F(t)}{F_{\max} - F(t)} = \frac{r}{F_{\max}} t + C$, де C – деяка константа, або, інакше,

$\ln \frac{F(t)}{F_{\max} - F(t)} = rt + F_{\max} C$. Потенціюємо це рівняння $e^{\ln \frac{F(t)}{F_{\max} - F(t)}} = e^{rt + F_{\max} C}$, або $\frac{F(t)}{F_{\max} - F(t)} = e^{rt} e^{F_{\max} C}$. Так як $e^{F_{\max} C}$ є константою, то позначимо її як $C_0 = e^{F_{\max} C}$.

З рівняння $\frac{F(t)}{F_{\max} - F(t)} = e^{rt} e^{F_{\max} C}$ маємо $F(t) = (F_{\max} - F(t)) e^{rt} C_0$, звідки

$F(t) = F_{\max} e^{rt} C_0 - F(t) e^{rt} C_0$ та $F(t) + F(t) e^{rt} C_0 = F(t) (1 + e^{rt} C_0) = F_{\max} e^{rt} C_0$.
Остаточно маємо розв'язок однорідного диференційного рівняння (3)

$$F(t) = \frac{F_{\max} e^{rt} C_0}{1 + e^{rt} C_0} \quad (5)$$

Значення константи C_0 визначають з початкових умов, тобто обсягу $F_0 = F(0)$ популяції у момент часу $t=0$. Для цього розв'язують рівняння $F_0(1 + e^{r \cdot 0} C_0) = F_{\max} e^{r \cdot 0} C_0$ стосовно C_0 . Маємо $F_0 + F_0 C_0 = F_{\max} C_0$, звідки $F_0 = C_0(F_{\max} - F_0)$, тобто $C_0 = \frac{F_0}{F_{\max} - F_0}$.

Остаточно

$$F(t) = \frac{F_{\max} e^{rt} \frac{F_0}{F_{\max} - F_0}}{1 + e^{rt} \frac{F_0}{F_{\max} - F_0}} = \frac{F_{\max} e^{rt} \frac{F_0}{F_{\max} - F_0}}{\frac{F_{\max} - F_0}{F_{\max} - F_0} + \frac{e^{rt} F_0}{F_{\max} - F_0}} = \frac{F_{\max} e^{rt} F_0}{F_{\max} - F_0 + e^{rt} F_0}$$

Отже

$$F(t) = \frac{F_{\max} e^{rt} F_0}{F_{\max} - F_0 + e^{rt} F_0} \quad (6)$$

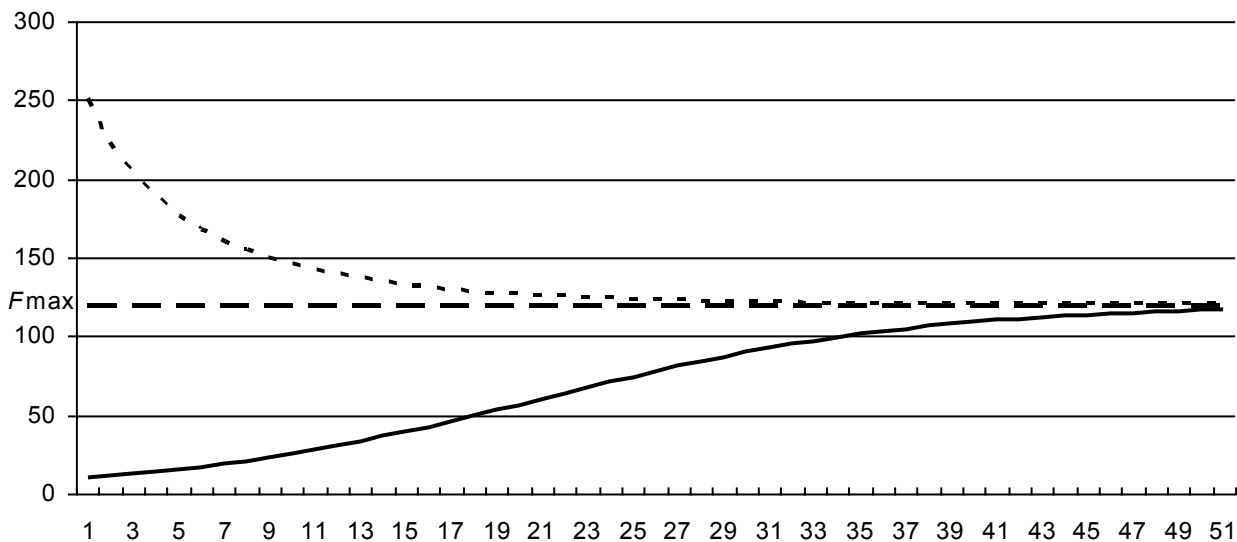


Рисунок 2. - Динаміка зміни обсягу популяції у моделі Ферхюльста.

Логістична крива, побудована за розв'язком однорідного диференційного рівняння (6). (Якщо обсяг популяції перевищує максимально допустиме значення F_{\max} , то він з часом спадатиме до F_{\max} , якщо ж менше за F_{\max} , то зростатиме до цього значення)

З Рис.2. видно, що нижня крива має перегин, тобто до якогось моменту часу (або обсягу популяції $F(t)$) швидкість приросту зростає, потім її зростання припиняється і далі йде спадання швидкості приросту майже до 0. Для визначення точки перегину потрібно дослідити першу та другу похідну від $F(t)$ у рівнянні (6). За правилом диференціювання складних функцій та похідної від частки маємо

$$F'(t) = \frac{(F_{\max} e^{rt} F_0)' (F_{\max} - F_0 + e^{rt} F_0) - (F_{\max} e^{rt} F_0) (F_{\max} - F_0 + e^{rt} F_0)'}{(F_{\max} - F_0 + e^{rt} F_0)^2} =$$

$$= \frac{r F_{\max} F_0 e^{rt} \cdot (F_{\max} - F_0 + e^{rt} F_0) - (F_{\max} e^{rt} F_0) \cdot r F_0 e^{rt}}{(F_{\max} - F_0 + e^{rt} F_0)^2} = \frac{r F_{\max} F_0 e^{rt} \cdot (F_{\max} - F_0)}{(F_{\max} - F_0 + e^{rt} F_0)^2}$$

Якщо $F_{\max} - F_0 > 0$, то похідна додатна, тобто функція $F(t)$ монотонно зростає (популяція збільшується) від свого початкового значення F_0 і асимптотично прямує до F_{\max} , якщо $F_{\max} - F_0 < 0$, то похідна від'ємна і функція монотонно спадає від початкового значення F_0 до F_{\max} .

Для виявлення точки перегину потрібно досліджувати другу похідну $F(t)$. Маємо

$$F''(t) = \frac{(r F_{\max} F_0 e^{rt} \cdot (F_{\max} - F_0))' (F_{\max} - F_0 + e^{rt} F_0)^2 - (r F_{\max} F_0 e^{rt} \cdot (F_{\max} - F_0)) (F_{\max} - F_0 + e^{rt} F_0)^2'}{(F_{\max} - F_0 + e^{rt} F_0)^4} =$$

$$= \frac{r^2 F_{\max} F_0 e^{rt} \cdot (F_{\max} - F_0) (F_{\max} - F_0 + e^{rt} F_0)^2 - (r F_{\max} F_0 e^{rt} \cdot (F_{\max} - F_0)) \cdot 2 (F_{\max} - F_0 + e^{rt} F_0) e^{rt} r F_0}{(F_{\max} - F_0 + e^{rt} F_0)^4} =$$

$$= \frac{(F_{\max} - F_0 + e^{rt} F_0) r^2 F_{\max} F_0 e^{rt} \cdot (F_{\max} - F_0) (F_{\max} - F_0 + e^{rt} F_0) - (F_{\max} - F_0 + e^{rt} F_0) (r^2 F_{\max} F_0 e^{rt} \cdot (F_{\max} - F_0)) \cdot 2 e^{rt} F_0}{(F_{\max} - F_0 + e^{rt} F_0)^4} =$$

$$= \frac{r^2 F_{\max} F_0 e^{rt} \cdot (F_{\max} - F_0) (F_{\max} - F_0 + e^{rt} F_0) - (r^2 F_{\max} F_0 e^{rt} \cdot (F_{\max} - F_0)) \cdot 2 e^{rt} F_0}{(F_{\max} - F_0 + e^{rt} F_0)^3} =$$

$$= \frac{r^2 F_{\max} F_0 e^{rt} \cdot (F_{\max} - F_0) (F_{\max} - F_0 + e^{rt} F_0 - 2 e^{rt} F_0)}{(F_{\max} - F_0 + e^{rt} F_0)^3} =$$

$$= \frac{r^2 F_{\max} F_0 e^{rt} \cdot (F_{\max} - F_0) (F_{\max} - F_0 - e^{rt} F_0)}{(F_{\max} - F_0 + e^{rt} F_0)^3}$$

У випадку, коли $F_{\max} - F_0 < 0$, тобто $F_0 > F_{\max}$, друга похідна не перетворюється у 0, тобто верхня частина графіку на Рис.2. перегинів не має. Розглянемо випадок, коли $F_{\max} - F_0 > 0$, тобто $F_0 < F_{\max}$. Друга похідна перетворюється на 0, коли $F_{\max} - F_0 - e^{rt} F_0 = 0$, так як всі інші множники є або ненульовими константами, або не можуть дорівнювати 0.

З рівняння $F_{\max} - F_0 - e^{rt} F_0 = 0$ маємо, що, $\frac{F_{\max} - F_0}{F_0} = e^{rt}$ звідки

$rt = \ln\left(\frac{F_{\max} - F_0}{F_0}\right)$ або $t_b = \frac{1}{r} \ln\left(\frac{F_{\max} - F_0}{F_0}\right)$. У точці t_b функція $F(t)$ є неперервною та диференційовною, а її друга похідна міняє знак.

Значення функції $F(t)$ у точці перегину t_b дорівнює

$$F(t_b) = \frac{F_{\max} e^{\frac{1}{r} \ln\left(\frac{F_{\max} - F_0}{F_0}\right)} F_0}{F_{\max} - F_0 + e^{\frac{1}{r} \ln\left(\frac{F_{\max} - F_0}{F_0}\right)} F_0} = \frac{F_{\max} \left(\frac{F_{\max} - F_0}{F_0}\right) F_0}{F_{\max} - F_0 + \left(\frac{F_{\max} - F_0}{F_0}\right) F_0} = \frac{F_{\max}}{2} \quad (7)$$

Дослідимо тепер розташування точки перегину t_b відносно $t_0 = 0$ для різних початкових значень обсягу популяції та максимального обсягу. Якщо $\frac{F_{\max} - F_0}{F_0} > 1$,

тобто $F_0 < \frac{F_{\max}}{2}$, то значення $t_b > 0$ і момент часу, коли зростання обсягу популяції

$F(t)$ має перегин, потрапляє у досліджуваний інтервал. Якщо ж $\frac{F_{\max} - F_0}{F_0} < 1$, тобто

$F_0 > \frac{F_{\max}}{2}$, то точка перегину $t_b < 0$, тобто вона знаходиться зліва від початкового моменту спостереження і у досліджуваний період перегину не буде.

Цей результат можна зобразити у вигляді рисунка

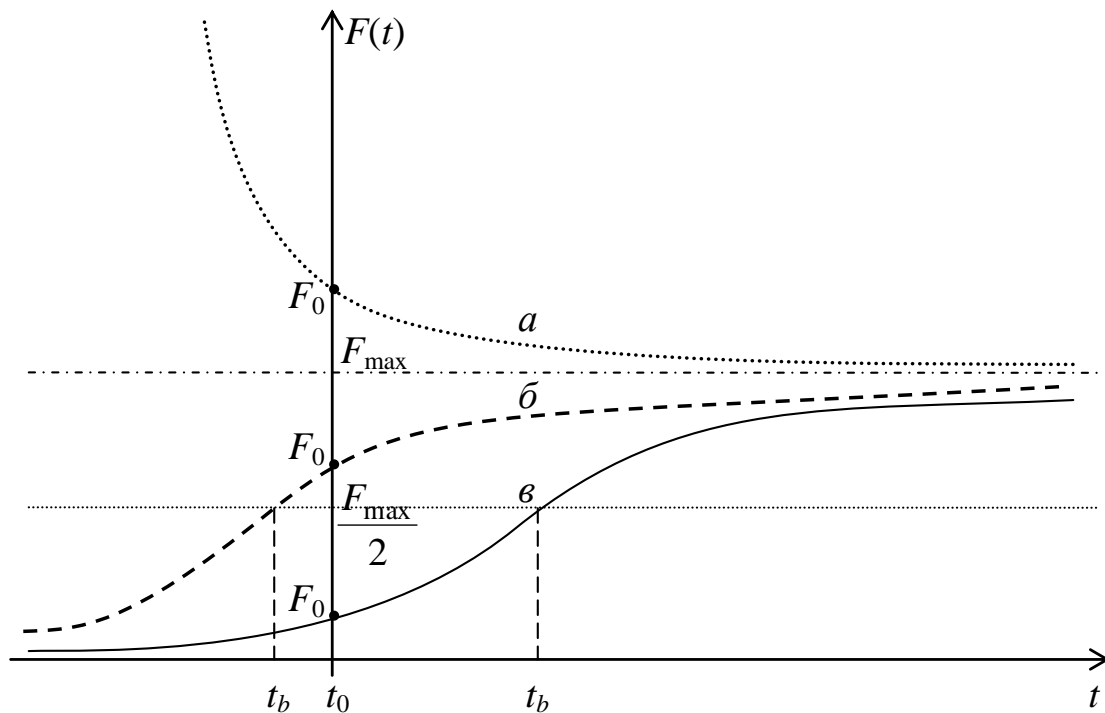


Рисунок 3. - Динаміка зміни обсягу популяції у моделі Ферхюльста.

Розташування точки перегину у залежності від початкового значення F_0 :

а. $F_0 > F_{\max}$; б. $\frac{F_{\max}}{2} < F_0 < F_{\max}$; в. $0 < F_0 < \frac{F_{\max}}{2}$.

Отже, якщо початкове значення обсягу популяції F_0 більша за F_{\max} , обсяг асимптотично спадатиме до F_{\max} , якщо $\frac{F_{\max}}{2} < F_0 < F_{\max}$, то обсяг асимптотично зростатиме до F_{\max} , але точки перегину не буде після t_0 ($t_b < t_0$), при $0 < F_0 < \frac{F_{\max}}{2}$ обсяг асимптотично зростатиме до F_{\max} і у точці $t_b = \frac{1}{r} \ln\left(\frac{F_{\max} - F_0}{F_0}\right)$ матимемо перегин.

Аналізуючи рівняння (3) можемо вважати, що коефіцієнт $\frac{r}{F_{\max}}$ є коефіцієнтом внутрішньовидової конкуренції за ресурси (іноді його ще називають коефіцієнтом пропорційності), тобто показником негативного впливу взаємодії двох особин одного виду на розмноження у боротьбі за ресурси. Саме рівняння (3) можна переписати у вигляді $\frac{dF(t)}{dt} = rF(t) - \frac{r}{F_{\max}} F^2(t)$, а коефіцієнт внутрішньовидової конкуренції позначити за $m = \frac{r}{F_{\max}}$.

Таким чином, рівняння (3) можна записати у вигляді

$$\frac{dF(t)}{dt} = rF(t) - mF^2(t), \quad (8)$$

Логістичну S-подібну криву іноді називають кривою Перла на честь американського демографа Раймонда Перла (1870—1940), який досліджував зростання популяцій різних рослин та тварин. Він виявив, що логістичному закону підпорядковане зростання ваги гарбуза, розмноження дріжджових бактерій та ін. Також виявилось, що логістичному закону підпорядкована велика кількість процесів у соціології, демографії, економіці та ін.

У логістичній моделі Ферхюльста також присутній ряд припущень, які вносять обмеження до її використання:

- Розглядається лише одна популяція, тобто відсутня міжвидова конкуренція;
- Відсутні зовнішні фактори, такі як стихійні лиха, зовнішня міграція;
- Біотичний потенціал є незмінним.

Проілюструвати роботу цієї моделі на прикладі населення окремої країни досить важко через те, що не можливо обчислити максимально допустиму кількість людей, для яких вистачить ресурсів для проживання. Перш за все це виникає через міждержавну систему торгівельних стосунків та, іноді, специфіку виробництва кожної країни. Тому є сенс розглянути насправді замкнене середовище для людей – планету. Для цього спочатку розглянемо статистику по населенню на Землі [2] та [4] та визначимо параметри r та F_{\max} , тобто біотичний потенціал та максимальну кількість населення, яке може проживати на планеті. Виходячи з того, що за моделлю Ферхюльста, $F''(t)$, швидкість відносного приросту населення, міняє свій знак у момент, коли населення складає половину з максимально допустимого, спробуємо визначити такі точки перегину. Досліджувати зміну населення, порівнюючи сусідні роки, не зовсім вигідно через те, що коливання обсягу людей на планеті у сусідніх роках можуть бути викликані

як неточністю виміру, так і ситуативними змінами, що не мають тенденційного характеру, і, відповідно, вважатимуться нами для простоти як похибки вимірювання. У нашій моделі розглядатимемо, наприклад, зміни швидкості приросту протягом 5 послідовних років, тобто п'ятирічки. Отже, за даними [2] маємо, що протягом 1950-2014 років найбільші зміни знаку $F''(t)$ з + на - відбулись у 1966-1970 роках (Таблиця 1)

Таблиця 1. - Населення Землі у 1966-1970 рр. Перший перегин

Рік	Населення	Відносний приріст	Абсолютний приріст	Швидкість відносного приросту
1966	3397475247	2,09%	71046477	0,04%
1967	3468521724	2,11%	73153167	0,02%
1968	3541674891	2,10%	74433858	-0,01%
1969	3616108749	2,08%	75063867	-0,02%
1970	3691172616	2,05%	75581729	-0,03%

та 1985-1989 (Таблиця 2).

Таблиця 2. - Населення Землі у 1985-1989 рр. Другий перегин

Рік	Населення	Відносний приріст	Абсолютний приріст	Швидкість відносного приросту
1985	4863601517	1,85%	89775193	0,02%
1986	4953376710	1,86%	91939161	0,01%
1987	5045315871	1,84%	92898817	-0,02%
1988	5138214688	1,80%	92237721	-0,04%
1989	5230452409	1,73%	90364258	-0,07%

Так як у другому випадку коливання є більш суттєвими, то беремо її за точку обчислення максимальної популяції людей, що може проживати на Землі за наявних ресурсних можливостей. За значення візьмемо середній обсяг людей у ці роки 5 046 192 239, і, відповідно до отриманого вище результату (7), можна спрогнозувати, що за наявних у 1985-1989 роках технологій, на Землі вистачає ресурсу для $2 \times 5\,046\,192\,239 = 10\,092\,384\,478$ осіб.

Наступним кроком є обчислення параметру r - біотичного потенціалу. Для цього скористаємось (2), вважаючи $\Delta t = 1$ рік. Для побудови моделі є сенс брати тільки спостережувану¹ частину даних з [2]. Для кожного року з 1950 до 2013 включно будемо рівняння виду (2), у якому $F(t)$ – обсяг населення поточного року, $F(t+\Delta t)$ – обсяг населення наступного року, $\Delta t = 1$ рік, $F_{\max} = 10\,092\,384\,478$.

3 (2) отримаємо
$$r = \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{F_{\max} - F(t)} \cdot \frac{F_{\max}}{F(t)} = \frac{(F(t + \Delta t) - F(t))F_{\max}}{(F_{\max} - F(t))F(t)\Delta t}$$
 або ж

$$r_i = \frac{(F_{i+1} - F_i)F_{\max}}{(F_{\max} - F_i)F_i}, \text{ де } i - \text{рік, } i=1950, \dots, 2013.$$

¹ Маємо на увазі тільки з 1950 до 2014 року так як решта результатів отримана внаслідок моделі.



Рисунок 4. - Співвідношення відносного приросту населення та біотичного потенціалу у 1950 та 2013 рр.

Середнє значення біотичного потенціалу за 1950-2013 роки становить $r=0,031734$. Таким чином, з (2) можемо побудувати модель Ферхюльста з початковими даними $F(0)=F(1950)=2525778669$, $r=0,031734$, $F_{\max}=10\ 092\ 384\ 478$.

Більше того, як виявляється сам, момент (рік) перегину, обчислений за цими даними за формулою $t_b = \frac{1}{r} \ln\left(\frac{F_{\max} - F_0}{F_0}\right)$ дорівнює

$t_b = 0,031734 \cdot \ln\left(\frac{10092384478 - 2525778669}{2525778669}\right) \approx 34,575$, тобто роком перегину є 1950+34, 575 – 1985, що співпадає з нашим припущенням.

Отже, на Рис.5. зображено графіки зростання популяції Землі за 3 моделями.

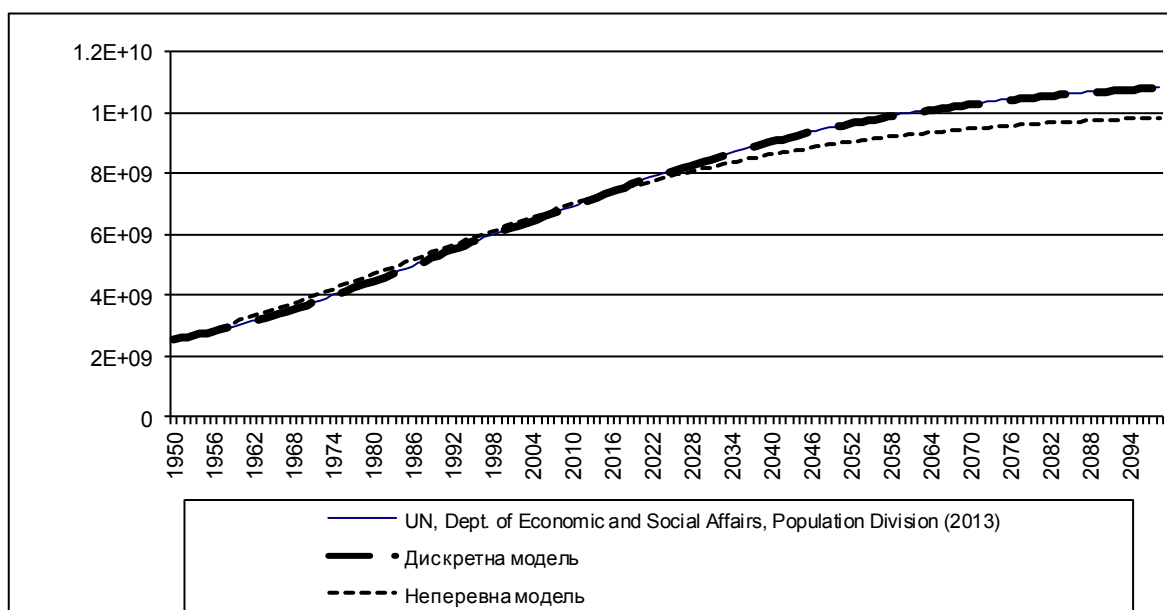


Рисунок 5. - Модель зростання населення Землі.

Перша модель запропонована UN, Dept. of Economic and Social Affairs, Population Division (2013). World Population Prospects: The 2012 Revision. projected populations based on the medium-fertility variant [2], друга є дискретною (різницевою) моделлю Ферхюльста, третя – неперервною (диференціальною) моделлю Ферхюльста. Легко бачити, що перші 2 моделі майже повністю співпадають.

З одного боку даний результат свідчить про те, що модель Ферхюльста може бути застосовна для прогнозування та моделювання, але є кілька моментів, які можуть сильно вплинути на сам вигляд моделі та її параметри. По-перше – максимальна кількість мешканців планети була оцінена нами з самої моделі, а не з якихось інших міркувань на кшталт розвитку промисловості, сільського господарства та харчових технологій. Можна вважати удачею той факт, то момент перегину кривої зростання популяції припав на спостережуваний інтервал. Більше того, значення біотичного потенціалу r , який, як видно з рис 4., не є постійним, у самій моделі вважають за константу, а отримане значення $F_{\max}=10\ 092\ 384\ 478$ абсолютно не гарантує, що це саме та кількість населення, для якої вистачить продуктів харчування для виживання.

Це підтверджує експеримент американського етолога Джона Келхуна /John V. Calhoun/ (1917 - 1995), протягом життя досліджував поведінку та зміни у популяції сірих пацюків та мишей і стверджував, що експериментально виявлені соціальні ефекти надмірності населення пацюків чи мишей можуть розглядатися як модель майбутнього для перенаселеної людської цивілізації.

Ним з липня 1968 до червня 1972 року було проведене дослідження розмноження мишей у замкненому "утопічному всесвіті", що мав назву "Universe 25". У цьому експерименті для мишей не було обмежень у ресурсах (їжі та воді), а лише у вільному просторі [1].

На початку експерименту у металевий загін, що розташовувався у лабораторії Еволюції мозку та поведінки на базі Національного інституту психічного здоров'я штату Меріленд, США були поміщені 4 пари мишей. Сам "всесвіт" був площею 2,57x2,57 метри та 1,37 метри у висоту. Стіни загону були влаштовані таким чином, щоб збільшити ефективний простір для мишачих гнізд, але так, щоб миші не могли піднятися вище за 43 см від верху¹. Всього у загоні було 256 ящиків-гнізд, кожен з яких був розрахований на 15 мишей.

За розрахунками дослідників, місця для гнізд в загоні вистачило б на 3840 мишей, їжі, що постійно оновлювалась, - на 9500, води – на 6144. Температура була підібрана максимально комфортною для мишей (21-32 °C), не було захворювань та хижаків. Тобто можна сказати, що всі зовнішні фактори впливу було усунуто. Отже, можна сказати, що, принаймні для $F_{\max}=3840$ мишей були створені комфортні умови проживання.

На практиці ж чисельність популяції досягла максимального значення всього у 2200 мишей (це сталось на 560 добу експерименту [1, Fig. 2]) і після цього лише скорочувалась. 22 червня 1972 року залишалось лише 122 миші (100 самок і 22 самця), а 13 грудня 1972 року, у загоні залишалось всього 27 мишей – 23 самки і 4 самця. 23 травня 1973 року, на 1978 день, померла остання миша.

¹ Більш детально структура загону описана у [1].

Приблизно на 315 день почала підвищуватись агресивність самок, саме вони, а не самці, стали активно захищати свою територію, проте самки не доглядали за мишенятами, кидаючи їх напризволяще. Багатьох молодих самців, що не знайшли собі місця в колоніях по периметру загороди, виганяли у центр загону, де не було гнізд та схованок. Серед них частіше стали проявлятися девіантні форми поведінки: пасивність або надмірна агресивність з нападами на інших мишей, пансексуалізм і гомосексуальна поведінка. Самки почали менше народжувати потомства, середній вік особин колонії почав зростати, миші почали селитись локалізованими групами, а не рівномірно по всій придатній до поселення території. Серед самців почали з'являтися самці, яких Келхун назвав "красенями" (англ. beautiful ones). Ці самці уникали як спарювання, так і бійок, без кінця чепурилися. Самки згодом перестали спаровуватися з самцями. Коли кілька самок та і самців "красенів" перенесли у окремі загони, виявилось, що миші і там не намагаються спаровуватися.

За підсумками дослідження Келхун зробив висновок, що при перевищенні певної щільності популяції і заповненні всіх соціальних ролей у популяції, виникає зростаючий прошарок молодих "вигнанців". Гостра конкуренція між ними і старшими особинами за місце у соціумі призводить до розпаду соціальних зв'язків і краху суспільства в цілому, його переходу в такий стан, коли при низькій смертності нормою стає примітивна "аутична" поведінка, що веде до вимирання популяції.

Висновки. Розглянута модель Ферхюльста розвитку популяції без зовнішнього впливу та з обмеженням ресурсів є спрощеною моделлю реального процесу. Розв'язок диференціального рівняння для цієї моделі, отриманий у даній роботі, є простим та доступним, записаний у явному вигляді і може використовуватись для побудови математичних моделей у соціології.

Не зважаючи на обмеження, такі як постійне значення максимально допустимого обсягу популяції за даних ресурсів та незмінного протягом існування моделі біотичного потенціалу, вона може використовуватись для прогнозу демографічної ситуації у світі, як це було проілюстровано вище. Крім того, ця модель є базовою не тільки для розвитку популяції, а і низки інших процесів, таких як моделі поширення інформації, моделі впливу та ін. Надзвичайно важливим є підходи до коректного визначення базових характеристик цієї моделі: початкового стану, біотичного потенціалу та максимальної кількості осіб, що можуть жити у заданих умовах. Важливість цього продемонстровано на прикладі досліджу Джона Келхуна. Більше того, змінився сам зміст поняття максимальної кількості особин F_{max} . Є підстави вважати цей параметр не максимальною кількістю особин, для проживання яких вистачає ресурсів, а максимальну кількість особин, яким "комфортно" проживати на даній території без втрати базових функцій існування, тобто без тенденції виродження. І цей показник пов'язаний не тільки з обмеженням харчових ресурсів, а зі щільністю проживання у локалізаціях (а не середньою щільністю по всій території).

Розвиток моделі Ферхюльста, у якій допускається мінливість біотичного потенціалу та альтернативне обчислення F_{max} за допомогою зовнішніх чинників, а також випадок, коли F_{max} не є постійним буде об'єктом подальших досліджень.

Список використаних джерел

1. Calhoun John B. Death Squared: The Explosive Growth and Demise of a Mouse Population.// Calhoun John B. / [Текст, електронний ресурс] - Proc. roy. Soc. Med. Volume 66, January 1973 pp 80-88. Режим доступу <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1644264/pdf/procrsmed00338-0007.pdf>
2. Geohive. Global Population Statistics. Population of the entire world, yearly, 1950 - 2100 [Електронний ресурс] Режим доступу http://www.geohive.com/earth/his_history3.aspx
3. Malthus T. An Essay on the Principle of Population // Malthus, Thomas Robert / [Текст, електронний ресурс]. - London, J. Johnson, in St. Paul's Church-yard, 1798. Режим доступу: <http://www.econlib.org/library/Malthus/malPop.html>
4. World Population Growth [Електронний ресурс] Режим доступу <http://www.ourworldindata.org/data/population-growth-vital-statistics/world-population-growth/>
5. Сидоров М.В.-С. Основи математичного моделювання для соціологів: демографічні базові моделі зростання популяції без зовнішнього впливу та конкуренції. //Сидоров М.В.-С./ [Текст].— К.:Логос, Актуальні проблеми соціології, психології, педагогіки: Збірник наукових праць. вип.1(22), 2014, ст.74-81

Отримано 01.02.2015 р.