УДК 681.5

А.И. Михалёв, А.И. Гуда

ИНФОРМАЦИОННЫЕ КРИТЕРИИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Введение

Для идентификации нелинейных динамических систем может быть использовано большое количество разнообразных методов [1, 5, 2]. В настоящее время выбор метода, подходящего для каждой конкретной задачи, а также настройка параметров самой системы идентификации – вопрос опыта и предпочтений разработчика системы идентификации. Для уже синтезированной системы идентификации возникает задача оценки качества её работы.

Для получения возможности осознанного выбора метода идентификации, настройки его параметров и оценки качества идентификации требуется внешний (по отношению к методу) критерий, в соответствии с принципом внешнего дополнения Стаффорда Бира [6]. Так как идентификация в целом является процессом получения информации о системе, то в качестве одного из таких критериев могут выступать информационные оценки [3,4].

Постановка задачи

Пусть задана стационарная непрерывная случайная величина x_0, представляющая собой идентифицируемый параметр нелинейной динамической системы, и известна начальная плотность вероятности её распределения $\rho_0(x)$. Пусть также за время τ было произведено измерение величины x. Результатом этого измерения является новая плотность вероятности $\rho(x,\tau)$. Требуется оценить информацию, заключенную в этом измерении.

Априорная энтропия H_0 определяется выражением

$$H_0 = -k \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(x) \ln(\rho_0(x))\, dx, \tag{1}$$

а текущая

$$H(\tau) = -k \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x,\tau) \ln(\rho(x,\tau))\, dx \tag{2}$$

В вышеприведённых выражениях считаем, что $0 \ln(0) = 0$.

Коэффициент k определяется выбранной шкалой измерения информации. Для измеренения информации в битах следует положить $k = 1/\ln 2 \approx 1.442695$ [3].

Полученная в результате измерения информация равна разности энтропий:

$$I(\tau) = -(H(\tau) - H_0) \tag{3}$$

Если начальная неопределённость больше полученной в результате измерения, то количество полученной информации положительно. В противном случае измерение не дало новой информации по сравнению с априорной.

На самом деле прямым результатом измерения является не плотность вероятности, а множество оценок $\bar{x}$ измеряемой величины x_0. Для получения параметров распределения необходима либо априорная информация о применяемом методе измерения, либо дополнительные измерения, предназначенные для оценки самого метода измерения.

Сама величина x_0 измерению не доступна, из-за шумов измерения. Под шумами измерения подразумеваются не только шумы, реально существующие в системе, а и ошибки измерения, обусловленные способом измерения. Например, если измеряемая величина подвергается дискретизации, то ошибку дискретизации тоже считаем шумом измерения. При измерении напряжения стрелочным вольтметром погрешности измерения, обусловленные конечным временем реакции прибора дают свой вклад в шум измерения.

Шумы измерения $w(t)$ могут быть аддитивными: $x_w(t) = x_0 + w_a(t)$, мультипликативными: $x_w(t) = x_0 w_m(t)$, смешанными: $x_w(t) = (x_0 + w_a(t))w_m(t)$, а также параметрическими, конкретный вид которых обуславливается процессами, происходящими при измерении.

В случае непосредственного измерения шум чаще всего имеет аддитивную природу, и обычно включает в себя две компоненты: случайную и систематическую: $w_a(t) = w_r(t) + w_s$. Характеристики случайной компоненты $w_r(t)$ можно оценить с помощью измерений. Значение систематической компоненты w_s либо вообще неизвестно, либо определяется априори (задаётся произвольно для тестовых задач или определяется физикой процесса для реальных измерений).

При моделировании процессов измерения в качестве $w_a(t)$ часто используют шум с нормальным распределением, характеризующийся среднеквадратичным отклонением σ_w и временем автокорреляции t_w. Реже (например, при пороговых измерениях) для моделирования используют шум с равномерным распределением.

В тех случаях, когда измеряемая величина является параметром какого-либо процесса, шум часто имеет мультипликативную природу. Параметры этого шума определяются параметрами входного сигнала и характеристиками процесса.

Измерение всегда включает в себя какой-либо вид усреднения (фильтрацию). С одной стороны, такое усреднение определяется физическими процессами, происходящими при измерении (например, механической инерцией измерительного прибора, постоянными времени электромагнитных систем и т.д.). С другой стороны, дополнительное усреднение применяют для повышения точности и надежности измерения. Нри этом

 ISSN 1562-9945

могут применяться специальные методы фильтрации при условии наличия сведений о виде шумового воздействия.

Введём обозначение:

$$\Upsilon(x(t),\psi(t),T)=\frac{1}{\Psi}\int\limits_0^T x(t)\psi(T-t)\,\mathrm{d}t, \tag{4}$$

где

$$\Psi=\int\limits_0^T \psi(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^T \psi(T-t)\,\mathrm{d}t;\quad \psi(t)\geq 0\;\forall\, t\geq 0.$$

В общем случае функционал усреднения можно представить следующим образом:

$$\bar{x}=\Upsilon(x(t),\psi(t),T). \tag{5}$$

Известные методы усреднения можно условно разделить на два типа. Первый тип характеризуется тем, что усреднение производится на всём временном интервале проведения эксперимента, и вклад измерений в начале интервала сопоставим с влиянием более поздних измерений. Частным случаем является арифметическое усреднение на всём интервале измерения $[0;T]$:

$$\psi(t)\equiv 1;\quad \Psi(T)=1/T;\quad \bar{x}=\frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)\mathrm{d}x=\Upsilon(x(t),1(t),T) \tag{6}$$

Использование усреднений первого типа характерно для задач измерения только стационарных или квазистационарных величин.

Второй тип характеризуется тем, что при усреднении основной вклад вносят значения, находящиеся на локальном временном интервале $[T-\tau;T]$:

$$\int\limits_0^{T-\tau} \psi(t)\,\mathrm{d}t \ll \int\limits_{T-\tau}^{T} \psi(t)\,\mathrm{d}t,\quad \forall\quad T\gg\tau. \tag{7}$$

В этом случае (5) можно оценить как

$$\bar{x}=\frac{1}{\Psi}\int\limits_0^{\tau} x(T-\tau+t)\psi(\tau-t)\,\mathrm{d}t=\Upsilon_\tau(x(t),\psi(t),T,\tau). \tag{8}$$

В простейшем случае (скользящее среднее) $\psi(t)\equiv\theta(t-\tau)$, $\theta(t)$ – функция Хевисайда, $\Psi=\tau$ и

$$\bar{x}(t,\tau)=\frac{1}{\tau}\int\limits_{t-\tau}^{t} x(t)\,\mathrm{d}t=\Upsilon_\tau(x(t),\theta(t-\tau),T,\tau). \tag{9}$$

Следует отметить, что зачастую такое разделение на два типа условно. Например, если взять $\psi(t)=\exp(-t^2/t_0^2)$, то при $T\ll t_0$ такое усреднение будет относиться к первому типу, а при $T \gg t_0$ – ко второму, причём $\tau \approx 3t_0$.

Пример. Пусть исходное распределение параметра – нормальное,

$$\rho_0(x) = \frac{1}{\sigma_{x0}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - x_{c0})^2}{2\sigma_{x0}^2}\right) \tag{10}$$

шум – нормальный, аддитивный с σ_w и t_w, систематическая ошибка отсутствует ($w_s \equiv 0$). Измерение производится с использованием метода скользящего среднего (9). Тогда

$$\sigma_x(\tau) \approx \sigma_w \sqrt{\frac{t_w}{\tau}}, \tag{11}$$

т.е. при увеличении времени оценивания τ получаем распределение $\rho(x)$ с всё меньшими дисперсиями (рис. 1).

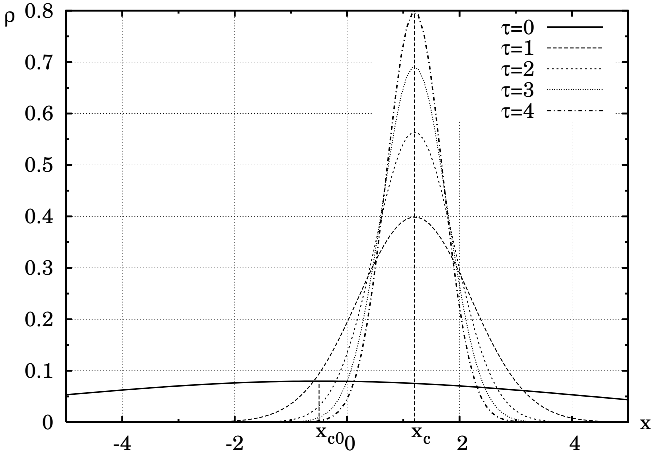

Рис. 1 – Плотности вероятностей для различных τ

В дальнейшем при вычислении интегралов с бесконечными пределами будем считать $x_c = 0$, так как смещение не влияет на результаты оценок.

Априорная энтропия

$$H_0 = -k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_{x0}^2}\right)}{\sigma_{x0}\sqrt{2\pi}} \ln\left(\frac{1}{\sigma_{x0}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_{x0}^2}\right)\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2\ln 2} \ln(2\pi e \sigma_{x0}^2) \tag{12}$$

Энтропия после усреднения за время τ

$$H(\tau) = \frac{\ln(2\pi e \sigma_x^2(\tau))}{2\ln 2} = \frac{1}{2\ln 2} \ln(2\pi e \sigma_w^2 t_w/\tau). \tag{13}$$

 ISSN 1562-9945

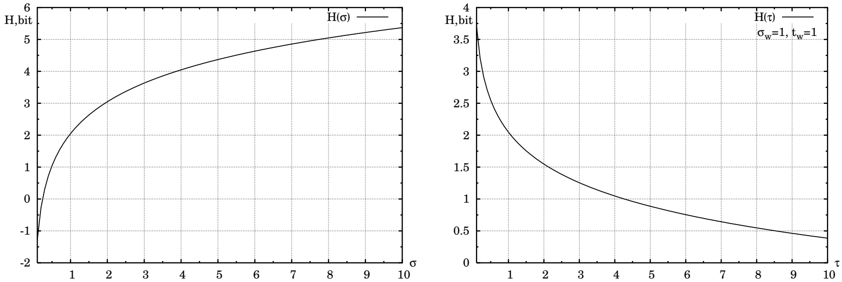

Рис. 2 – Зависимости энтропии от σ и τ в случае стационарного x_0, аддитивного нормального шума измерения и использования скользящего среднего

Тогда полученная информация (рис. 3)

$$I(\tau) = \frac{1}{2\ln 2}\left(\ln(2\pi e\sigma_{x0}^2) - \ln(2\pi e\sigma_w^2 t_w/\tau)\right) = \frac{1}{2\ln 2}\ln\frac{\sigma_{x0}^2\tau}{\sigma_w^2 t_w} = \frac{1}{\ln 2}\ln\frac{\sigma_{x0}}{\sigma_x(\tau)}. \quad (14)$$

При увеличичении точности измерения в 2 раза (в смысле величины дисперсии σ) будет получен 1 бит информации.

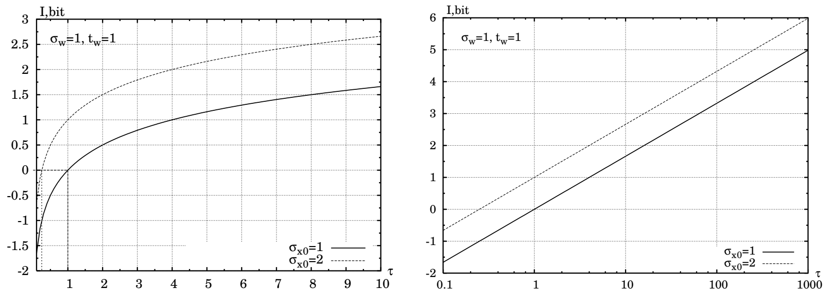

Рис. 3 – Зависимость количества полученной информации от τ в случае стационарного x_0, аддитивного нормального шума измерения и использования скользящего среднего

Следует отметить тот факт, что текущая скорость получения информации зависит от *начальной* неопределённости. При этом нет возможности определить максимальное значение энтропии (тем самым получив естественную точку отсчёта), так как $\lim\limits_{\sigma\to\infty} H(\sigma) = \infty$.

Определим время усреднения τ_0, после которого текущая неопределённость измерения меньше априорной:

$$\tau_0 = t_w\frac{\sigma_w^2}{\sigma_{x0}^2} \quad (15)$$

и введём безразмерное время усреднения

$$\tilde{\tau} = \frac{\tau}{\tau_0} = \frac{\tau\sigma_{x0}^2}{t_w\sigma_w^2} \quad \Rightarrow \quad I(\tilde{\tau}) = \frac{\ln\tilde{\tau}}{2\ln 2} \tag{16}$$

Из (14) видно, что со временем скорость получения информации $v_i = \mathrm{d}I/\mathrm{d}\tau$ падает, стремясь к нулю как $1/\tau$ при $\tau \to \infty$. Тогда средняя скорость получения информации на интервале усреднения τ:

$$\bar{v}_i(\tilde{\tau}) = \frac{I(\tilde{\tau})}{\tilde{\tau}} = \frac{\ln\tilde{\tau}}{2\tilde{\tau}\ln 2}. \tag{17}$$

При этом максимум средней скорости получения информации достигается при $\bar{\tau} = e$ (рис. 4).

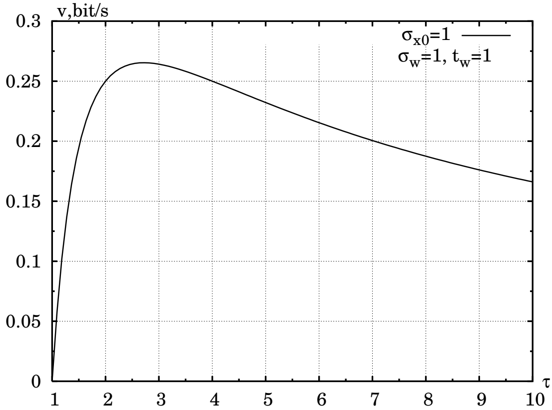

Рис. 4 – Зависимость средней скорости получения информации от τ

Пример. Пусть начальное распределение параметра x равномерно на интервале $(x_{c0} - \sigma_{x0}; x_{c0} + \sigma_{x0})$, (σ_{x0} – начальная точность измерения).

$$\rho_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma_{x0}}; & x - x_{c0} \in (-\sigma_{x0}; \sigma_{x0}) \\ 0; & x - x_{c0} \notin (-\sigma_{x0}; \sigma_{x0}) \end{cases} . \tag{18}$$

За время τ было произведено измерение x_c с точностью $\sigma_{xl}(\tau)$, в результате которого было получено новое равномерное распределение

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma_{xl}}; & x - x_c \in (-\sigma_{xl}; \sigma_{xl}) \\ 0; & x - x_c \notin (-\sigma_{xl}; \sigma_{xl}) \end{cases} . \tag{19}$$

В этом случае априорная энтропия определяется

$$H_0 = -k\int\limits_{\sigma_{x0}}^{\sigma_{x0}} \frac{1}{2\sigma_{x0}} \ln\left(\frac{1}{2\sigma_{x0}}\right) dx = k\ln(2\sigma_{x0}) = \frac{\ln(2\sigma_{x0})}{\ln 2}, \tag{20}$$

а текущая

$$H(\tau) = \frac{\ln(2\sigma_{xl}(\tau))}{\ln 2}. \tag{21}$$

 ISSN 1562-9945

тогда количество полученной информации

$$I = \frac{1}{\ln 2} \ln \left(\frac{\sigma_{x0}}{\sigma_{xl}(\tau)} \right). \tag{22}$$

т.е. удвоив точность измерения (в смысле ограничения $x - x_{c0} \in [-\sigma_{xl}/2; \sigma_{xl}/2]$) по-прежнему получаем 1 бит информации.

Сравнивая с (14) замечаем, что количество полученной информации пропорционально логарифму отношения мер областей, определяющих априорную и текущую неопределённость.

Систематическая компонента ошибки измерения

Предположим теперь, что $w_s \neq 0$. В этом случае выражение (2) непригодно для информационной оценки, так как никак не учитывает смещение распределения относительно измеряемого значения.

Рассмотрим пример с нормальным распределением (10) и ненулевой систематической ошибкой ($w_s \neq 0$). Тогда

$$\sigma_x(\tau) \approx \sqrt{\sigma_w^2 \frac{t_w}{\tau} + w_s^2}, \quad \lim_{\tau \to \infty} \sigma_x(\tau) = |w_s| \tag{23}$$

Аналогично (12), определим оценку энтропии таким образом:

$$\tilde{H}(\sigma_x) = \frac{1}{2 \ln 2} \ln(2\pi e \sigma_x^2). \tag{24}$$

Это определение совпадает с (12) при $w_s = 0$, и дает адекватные результаты в противном случае. Получаем:

$$\tilde{H}(\tau) = \frac{1}{2 \ln 2} \ln(2\pi e(\sigma_w^2 \frac{t_w}{\tau} + w_s^2)), \tag{25}$$

$$I(\tau) = H_0 - \tilde{H}(\tau) = \frac{1}{2 \ln 2} \ln \frac{\sigma_{x0}^2}{\sigma_w^2 \frac{t_w}{\tau} + w_s^2}. \tag{26}$$

Энтропия не будет убывать бесконечно, а будет стремиться к конечной величине, ограниченной снизу

$$\lim_{\tau \to \infty} \tilde{H}(\tau) = \frac{1}{2 \ln 2} \ln(2\pi e w_s^2) \tag{27}$$

В свою очередь, количество полученной информации не будет бесконечно расти с течением времени, а будет стремиться к конечной величине, определяемой способом измерения параметра (рис. 5).

$$\lim_{\tau \to \infty} I(\tau) = \frac{1}{2 \ln 2} \ln \frac{\sigma_{x0}^2}{w_s^2} \tag{28}$$

Таким образом, имея априорную оценку w_s, можно оценить максимальное время τ, в течение которого имеет смысл проводить измерение. Более длительные измерения практически не увеличивают количество полученной информации.

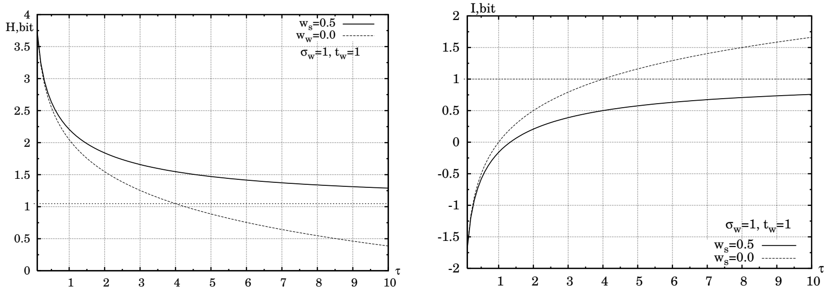

Рис. 5 – Зависимость энтропии и количества полученной информации от τ в случае наличия систематической ошибки

Выводы

Рассмотренные информационные критерии позволяют оценить информационную ценность идентификации, и тем самым дают возможность сравения методов идентификации и оценки качества их работы.

Литература

1. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. – М.: Мир, 1975. – 681 с.
2. Гуда А.И., Михалёв А.И. Сравнительный анализ алгоритмов поисковой идентификации нелинейных систем /АСАУ. – 3(23) 2000. – Дніпропетровськ: Системні технології, 2000. – С. 100–108.
3. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. – М.: ИЛ, 1963. – 829 с.
4. Цыпкин Я.З. Основы информационной теории идентификации. – М.: Наука, 1984. – 320 с.
5. Растригин Л.А. Адаптация сложных систем. – Рига: Зинатне, 1981. – 375 с.
6. Ивахненко А.Г. Самообучающиеся системы распознавания и автоматического управления. – Киев: Техніка, 1969. – 392 с.

 ISSN 1562-9945