УДК 004.932

М.Є. Сердюк

# АПРОКСИМАТИВНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ РЕКОНСТРУКЦІЇ ЗОБРАЖЕНЬ

## Вступ

Покращення зорової якості цифрових зображень внаслідок їх просторової інтерполяції є одним з найважливіших питань в сучасному розвитку цифрових відеотехнологій та відеосистем. Тому актуальною є розробка нових підходів до побудови алгоритмів зміни просторової щільності пікселів. Розглядається один з таких підходів, що грунтується на двоетапній схемі просторової інтерполяції. На першому етапі розв'язується задача каркасної інтерполяції, яка полягає у відтворенні інтерпольованого зображення в околі тієї частини топографічної карти, яка містить вихідний масив пікселів. Ця множина називається каркасом і має густо перфорований характер. На другому етапі проблема полягає у відтворенні результуючого зображення поза межами каркасу. Ця задача називається задачею реконструкції цифрових зображень. Дослідженню апроксимативної моделі цієї задачі і присвячена дана робота.

## Постановка задачі реконструкції зображень

Нехай $I \in BV(\Delta)$ — довільне допустиме зображення, де $\overline{\Delta} = [0, W] \times [0, H]$ і $\operatorname{supp} I = \Delta$. Нехай $I^* \in \mathcal{D}'(\Delta)$ є каркасною інтерполяцією цього зображення, для якої виконуються умови

$$< I^*, \theta >= \int_B \mathcal{I}^*(x)\theta(x)\,dx \quad \text{для всіх } \theta \in \mathcal{D}(B), \quad \mathcal{I}^* \in BV(B).$$

Тут $B = \operatorname{int}\Omega$, де $\Omega$ — допустимий каркас для зображення $I$, $\Omega \subset \Delta$, $\operatorname{supp} I^* = \Omega$. Тоді проблемою реконструкції зображення $I$ будемо називати задачу інтерполяції функції $I^* : \Omega \to \mathbb{R}$ на множину $\Delta \setminus \Omega$, при якій результуюче зображення задовольняло б принципу "неперервного продовження" Gestaltist'а (the Good Continuation Principle of Gestaltist) [3], згідно з яким візуальне сприйняття будь-якого зображення зберігає гладку неперервність всіх контурів, замість різких та обривистих їх змін.

Нехай $\theta^*$ є векторним полем градієнтів функції $\mathcal{I}^*$ на $B$, яке задовольняє наступні умови:

$$\theta^* \in L^\infty(B, \mathbb{R}^2),\ |\theta^*| \le 1,\ \operatorname{div}\theta^* \in L^\infty(B), \tag{1}$$

$$(\theta^*, D\mathcal{I}^*) = |D\mathcal{I}^*| \quad \text{як міри на } B. \tag{2}$$

Ми будемо завжди припускати, що $\theta^*$ має слід на границі множини $\Omega$. Проте, за побудовою границя каркаса $\partial B$ завжди підлягає декомпозиції на дві складові $\partial B = \partial B_{ext} \cup \partial B_{int}$, де $\partial B_{ext} = \partial B \cap \partial\Delta = \partial\Delta$. В зв'язку



 ISSN 1562-9945

з цим вважатимемо, що є заданими дві функції $g \in L^\infty(\partial B_{ext})$ та $g_0 \in L^\infty(\partial B_{int})$ такі, що

$$\|g\|_{L^\infty(\partial B_{ext})} < 1; \quad \|g_0\|_{L^\infty(\partial B_{int})} < 1$$

$$\theta^* \cdot \nu^\Delta = g \text{ майже скрізь на } \partial B_{ext}, \quad \theta^* \cdot \nu^B = g_0 \text{ майже скрізь на } \partial B_{int}.$$

Задача реконструкції зображення полягає в визначенні функції $u : \Delta \to \mathbb{R}$ та векторного поля $\theta : Q \to \mathbb{R}^2$ таких, що $\theta$ є продовженням поля $\theta^*$ на множину $\widetilde{\Omega} = \operatorname{int}\Delta \setminus \Omega$, при якому

1) функція $\theta \cdot \nu^B : \partial B_{int} \to \mathbb{R}$ є близькою за метрикою $L^\infty(\partial B_{int})$ до функції $g_0$;
2) $|\theta(x)| \le 1$ та $\theta \cdot Du = |Du|$ майже скрізь на $\Delta$;
3) кривизна ліній рівнів $u(x) = \lambda, \ \lambda \in \mathbb{R}$ в області $\Delta$ повинна бути мінімальною, тобто
$$\|\operatorname{div}\theta\|_{L^\infty(\Delta)} \to \inf.$$

Таким чином, поле $\theta : \Delta \to \mathbb{R}^2$ повинно, з однієї сторони, успадковувати геометрію поля градієнтів функції $u$, а з іншої, на границі $\partial B_{int}$ бути близьким до поля $\theta^*$. Зауважимо також, що виконання умови $|\theta(x)| = 1 \quad \forall x \in \Delta$ в загальному випадку неможливо. Дійсно, якщо $u(x) = \mathrm{const}$, що є типовим для ділянок зображення з постійною інтенсивністю, то $\theta(x) = 0$. Отже, його нормалізація за правилом $\theta = Du/|Du|$, що є типовим для гладких функцій, неможлива.

Для формальної постановки задачі введемо наступні простори:

$$\mathbf{X}(Q) = \left\{ z \in L^\infty(Q, \mathbb{R}^2) \ : \ \operatorname{div}(z) \in L^\infty(Q) \right\},$$
$$L_{BV}(Q) = \left\{ u \in L^2(Q) \ : \ T_k(u) \in BV(Q), \ \forall k > 0 \right\},$$

де оператор зрізки $T_k$ означено як $T_k(r) = \left[k - (k-r)^+\right] \operatorname{sign}_0(r)$, та простір

$$\mathcal{W}_\xi(\Delta) = \Big\{ (u,\theta) : u \in BV(\Delta), \theta \in \mathbf{X}(\Delta), \|\operatorname{div}\theta\|_{L^\infty(\Delta)} \le \xi, \\ |\theta(x)| \le 1, \quad \theta \cdot Du = |Du|, \quad \theta \cdot \nu^\Delta = g \text{ на } \partial\Delta \Big\}. \tag{3}$$

На елементах простору $\mathcal{W}_\xi(\Delta)$ означимо функціонал

$$J(u,\theta) = \int_\Delta |\operatorname{div}\theta|^2 (\gamma + \beta|\nabla k * u|)dx + \alpha \int_\Delta |Du| - \alpha \int_{\partial\Delta} g\, u\, \partial\mathcal{H} + \\ + \tau \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \partial B_{int}} |\theta \cdot \nu^B - g_0| + \lambda \int_B |u - \mathcal{I}^*|^2 dx. \tag{4}$$

Тут $\gamma, \alpha, \tau, \lambda, \beta$ — додатні вагові коефіцієнти ($\beta \ge 0$), $k \in C^1(\Delta)$ — регуляризуюче ядро таке, що $k(x) > 0$ всюди на $\widetilde{\Omega}$. Через $\nabla k * u$ позначено оператор згортки

$$\nabla k * u = \int_\Delta \nabla k(x-y) u(y) dy.$$

**Означення 1** *Будемо казати, що зображення $I^0 \in \mathcal{D}'(\Delta)$ є результатом реконструкції за каркасною інтерполяцією його дискретних значень на дискретній сітці $\Delta^{WH}$, якщо*

$$< I^0, \varphi >= \int_\Delta \mathcal{I}^0(x)\varphi(x)\,dx \quad \textit{для всіх} \;\; \varphi \in \mathcal{D}(\Delta), \quad \mathcal{I}^0 \in BV(\Delta),$$

*де*

$$\mathcal{I}^0(x) = \begin{cases} u^0(x), & x \in \widetilde{\Omega}, \\ \mathcal{I}^*(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{5}$$

*а пара $(u^0, \theta^0)$ є розв'язком наступної варіаційної задачі*

$$J(u^0, \theta^0) = \inf_{(u,\theta)\in \mathcal{W}_\xi(\Delta)} J(u, \theta). \tag{6}$$

Наведемо деякі пояснення щодо вибору структури цільового функціоналу (6). Перш за все зауважимо, що наявність в ньому виразу $\operatorname{ess\,sup}_{x\in\partial B_{int}} |\theta \cdot \nu^B - g_0|$ продиктована принципом “неперервного продовження” Gestaltist'a [3], згідно з яким ті лінії рівня, які перетинають границю $\partial B_{int}$ каркасу $\Omega$ повинні зберігати свій напрям близьким до $g_0 = \nabla\mathcal{I}^* \cdot \nu^B$ на $\partial B_{int}$. Терм $\lambda \int_B |u - \mathcal{I}^*|^2\,dx$ є релаксаційною формою умови близькості функцій $u$ та $\mathcal{I}^*$ на множині $B$. Що торкається виразу $M = \int_\Delta |\operatorname{div}\theta|^2(\gamma + \beta|\nabla k * u|)\,dx + \alpha\int_\Delta |Du|$, то значення оператора дивергенції $\operatorname{div} : \mathbf{X}(\Delta) \to L^\infty(\Delta)$ на розподіленнях $\theta \in \mathbf{X}(\Delta)$ зазвичай асоціюють з кривизною ліній рівня $u(x) = const$ реконструйованого зображення ([3]). Отже, мінімізація виразу $M$ передбачає такий спосіб реконструкції зображення, при якому кривизна ліній рівнів була би мінімальною.

Відомо, що на класі функцій з обмеженою варіацією поставлена задача має розв'язок. При цьому пара $(u, -\operatorname{div}\theta)$ належить графіку оператора $\mathcal{B}$, який визначається за правилом: пара $(u, v)$ належить графіку оператора $\mathcal{B}$, якщо $u \in L_{BV}(Q), v \in L^\infty(Q)$ і при цьому існує розподілення $\theta \in \mathbf{X}(Q)$ таке, що $\operatorname{div}\theta = -v$ в $\mathcal{D}'(Q), \theta \cdot DT_k(u) = |DT_k(u)|\ \forall k > 0,\ \theta \cdot \nu^Q = g$ майже скрізь на $\partial Q$. Але виникає питання, як визначити векторне поле $\theta$ на тих ділянках, де зображення має постійну інтенсивність ($\nabla u = 0$), або $\nabla u$ взагалі не існує.

Розглянемо наступну параметризовану задачу умовної мінімізації

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u) = \int_{\widetilde{\Omega}} \left| \operatorname{div}\left( \frac{Du}{\sqrt{\varepsilon^2 + |Du|^2}} \right) \right|^2 (\gamma + \beta|\nabla k * u|)dx + \\ + \alpha \int_\Delta |Du| - \alpha \int_{\partial\Delta} gu\, d\mathcal{H} + \\ + \tau \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\,\partial B_{int}} \left| \frac{Du}{\sqrt{\varepsilon^2 + |Du|^2}} \cdot \nu^B - \frac{D\mathcal{I}^*}{\sqrt{\varepsilon^2 + |D\mathcal{I}^*|^2}} \cdot \nu^B \right| + \\ + \lambda \int_B |u - \mathcal{I}^*|^2 dx \to \inf \end{aligned} \tag{7}$$

 ISSN 1562-9945

на множині

$$\left.\begin{array}{r}\left\|\operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{\sqrt{\varepsilon^2+|Du|^2}}\right)\right\|_{L^\infty(\Delta)}\leq\xi\\ \dfrac{Du}{\sqrt{\varepsilon^2+|Du|^2}}\cdot\nu^\Delta=g \text{ на } \partial\Delta\end{array}\right\} \tag{8}$$

Покажемо, що ця задача може розглядатися як апроксимативна модель для задачі реконструкції статичних зображень (6). При цьому, за своїм змістом, термін "апроксимація" означає, що розв’язки задачі (7)–(8) прямують при $\varepsilon \to 0$ до розв’язку вихідної задачі реконструкції зображень в певній топології.

## Про оператор $\operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{\sqrt{\varepsilon^2+|Du|^2}}\right)$ в $L^2(\Delta)$.

Перш за все зауважимо, що виходячи з означення простору $\mathcal{W}_\xi(\Delta)$, пара $(u,\theta)$ вважається допустимою, якщо $u \in BV(\Delta)$, а вектор-функція $\theta$ відіграє роль градієнта $u$, який в загальному випадку може не існувати. Для того, щоб означити $\nabla u$ та надати йому певний сенс, скористаємося наступним відомим результатом [1]:

**Лема 1** *Нехай $u$ — довільний представник простору $TBV(\Delta)$, де*

$$TBV(\Delta)=\left\{y\in L^1(\Delta): T_k(y)\in BV(\Delta)\ \forall\, k>0\right\}.$$

*Тоді знайдеться єдина вихідна вектор-функція $v : \Delta \to \mathbb{R}^2$ така, що $\forall\, k>0$*

$$\nabla T_k(u)=v\cdot\chi_{\{|u|<k\}} \quad \textit{майже скрізь на } \Delta. \tag{9}$$

Приймаючи до уваги цей факт, з кожною функцією $u \in TBV(\Delta)$ будемо пов’язувати її градієнт $\nabla u$ як єдину функцію $v$, яка задовольняє співвідношення (9).

Введемо наступні позначення:

$$a_\varepsilon(\eta)=\frac{\eta}{\sqrt{\varepsilon^2+|\eta|^2}},\quad f_\varepsilon(\eta)=\sqrt{\varepsilon^2+|\eta|^2},\quad \eta\in\mathbb{R}^2.$$

Зауважимо, що тепер для кожної функції $u \in TBV(\Delta)$ можна означити $a_\varepsilon(\nabla u)$ і при цьому $\|a_\varepsilon(\nabla u)\|_{\mathbb{R}^2} \leq 1$ майже скрізь на $\Delta$. Отже,

$$a_\varepsilon(\nabla u)\in L^\infty(\Delta,\mathbb{R}^2) \quad \text{і} \quad \|a_\varepsilon(\nabla u)\|_{L^\infty(\Delta,\mathbb{R}^2)}\leq 1.$$

Позначимо через $\mathcal{P}$ клас всіх неспадних Lipschitz-неперервних функцій $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, що $p'(s) \in \{0;1\}$ і

$$\{r\in\mathbb{R}: p'(r)=1\}=\bigcup_{j=1}^{m}(a_j,b_j), \text{ де } a_1<b_1<a_2<\ldots<b_m.$$

Легко бачити, що для довільного $w \in L_{BV}(\Delta)$ та довільної функції $p \in \mathcal{P}$ буде справедливим включення $p(w) \in BV(\Delta)$ [2]. Отже, з однієї сторони існує векторнозначна міра Радона $Dp(w)$ [4], яка задовольняє умову $\|Dp(w)\|(\Delta) = \int_\Delta |Dp(w)| < +\infty$. А з іншої, можна означити градієнт

$\nabla p(w)$ у відповідності до правила (9). В зв'язку з цим введемо до розгляду наступну міру на $\Delta$ (як лінійний неперервний функціонал на $C_0^1(\Delta)$)

$$z \cdot D^S p(w) = (z \cdot Dp(w)) - (z, \nabla p(w))_{\mathbb{R}^2}\, dx \tag{10}$$
$$\forall z \in \mathbf{X}(\Delta), \quad \forall w \in L_{BV}(\Delta), \quad \forall p \in \mathcal{P}.$$

Тут

$$\langle (z \cdot Dp(w)), \varphi \rangle = -\int_\Delta \operatorname{div}(z\varphi) p(w)\, dx.$$

**Означення 2** *Будемо казати, що пара функцій $(u, v)$ належить графіку оператора $\mathcal{B}_\varepsilon$ (скорочено $(u, v) \in \operatorname{Graph}(\mathcal{B}_\varepsilon)$), якщо:*

$$u \in TBV(\Delta) \cap L^2(\Delta), \quad v \in L^\infty(\Delta),\ a_\varepsilon(\nabla u) \in \mathbf{X}(\Delta),$$

*і при цьому*

$$\left.\begin{array}{c} \operatorname{div} a_\varepsilon(\nabla u) = -v \text{ в } \mathcal{D}'(\Delta), \\ a_\varepsilon(\nabla u) \cdot D^S p(u) = \left|D^S p(u)\right| \ \forall p \in \mathcal{P}, \\ a_\varepsilon(\nabla u) \cdot \nu^\Delta = g \text{ майже скрізь на } \partial\Delta. \end{array}\right\} \tag{11}$$

Зауважимо, що таке означення оператора є коректним, оскільки за побудовою $TBV(\Delta) \cap L^2(\Delta) \equiv L_{BV}(\Delta)$, а міра $a_\varepsilon(\nabla u) \cdot D^S p(u)$ задовольняє всім умовам свого існування.

Наведемо деякі властивості оператора $\mathcal{B}_\varepsilon$.

**Твердження 1** *Нехай послідовність $\{(u_n, v_n) \in \operatorname{Graph}\mathcal{B}_\varepsilon\}_{n\in N}$ є такою, що:*

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ u_n \to u \text{ сильно в } L^1(\Delta) \text{ при } n \to \infty; \\ 2)\ \sup\limits_n \|v_n\|_{L^\infty(\Delta)} \le C; \\ 3)\ \sup\limits_n \|Dp(u_n)\|(\Delta) \le C \quad \forall p \in \mathcal{P}, \end{array}\right\} \tag{12}$$

*де $C$ — деяка додатна величина. Нехай також $a_\varepsilon(\nabla u_n) \rightharpoonup a_\varepsilon(\nabla u)$ в $*$-слабкій топології $L^\infty(\Delta, \mathbb{R}^2)$. Тоді*

$$\nabla u_n \to \nabla u \text{ майже скрізь в } \Delta. \tag{13}$$

Справедливість цього твердження неважко встановити, залучаючи техніку доведення, наведену в [1].

**Твердження 2** *Оператор $\mathcal{B}_\varepsilon$ замкнений в $L^2(\Delta) \times L^\infty(\Delta)$, а саме, якщо $(u_n, v_n) \in \operatorname{Graph}(\mathcal{B}_\varepsilon)$ $\forall n \in N$ і при цьому $u_n \to u$ сильно в $L^2(\Delta), v_n \rightharpoonup v$ $*$-слабко в $L^\infty(\Delta)$, то $(u, v) \in \operatorname{Graph}(\mathcal{B}_\varepsilon)$.*

**Твердження 3** *Оператор $\mathcal{B}_\varepsilon$ є акретивним в $L^2(\Delta)$, тобто для будь-якого $f \in L^2(\Delta)$ існує єдиний розв'язок $u \in L^2(\Delta)$ включення*

$$u + \mathcal{B}_\varepsilon u \ni f \tag{14}$$

*і при цьому виконується оцінка*

$$\|u - \widehat{u}\|_{L^2(\Delta)} \le \|f - \widehat{f}\|_{L^2(\Delta)}, \tag{15}$$

*де через $\widehat{u}$ позначено розв'язок* (14)*, який відповідає правій частині $\widehat{f} \in L^2(\Delta)$.*

 ISSN 1562-9945

Наступний результат є важливим для подальшого конструювання апроксимативної моделі для задачі реконструкції зображень.

**Твердження 4** *Нехай $(u, v)$ — довільна пара, яка належить графіку оператора $\mathcal{B}$, тобто знайдеться $\theta \in \mathbf{X}(\Delta), |\theta| \le 1$ така, що*

$$\left.\begin{array}{r} v = -\operatorname{div}\theta, \quad \theta \cdot \nu^\Delta = g, \\ \theta \cdot DT_k(u) = |DT_k(u)| \quad \forall\, k > 0. \end{array}\right\} \tag{16}$$

*Нехай $f = u + v$ і покладемо $u_\varepsilon$ як єдиний розв'язок рівняння*

$$\left.\begin{array}{r} U - \operatorname{div} a_\varepsilon(\nabla U) = f \text{ в } \Delta, \\ a_\varepsilon(\nabla U) \cdot \nu^\Delta = g \text{ на } \partial\Delta. \end{array}\right\} \tag{17}$$

*Тоді $u_\varepsilon \to u,\ \operatorname{div} a_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon) \to v$ в $L^2(\Delta)$,*

$$\int_\Delta |DT_k(u_\varepsilon)| - \int_{\partial\Delta} g u_\varepsilon \, d\mathcal{H} \to \int_\Delta |DT_k(u)| - \int_{\partial\Delta} g u \, d\mathcal{H} \tag{18}$$

*при $\varepsilon \to 0\ \forall\, k > 0$. Окрім цього, якщо $f \in L^\infty(\Delta)$, то $u_\varepsilon$ обмежені в $L^\infty(\Delta)$.*

## Конструювання апроксимативної моделі для задачі реконструкції зображень

Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне число. Введемо до розгляду простір

$$\mathcal{W}_{\varepsilon,\,\xi}(\Delta) = \{(u_\varepsilon, \theta_\varepsilon) : u_\varepsilon \in BV(\Delta) \cap \operatorname{Dom}(\mathcal{B}_\varepsilon), \\ \theta_\varepsilon = a_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon), \|\operatorname{div}\theta_\varepsilon\|_{L^\infty(\Delta)} \le \xi\}. \tag{19}$$

На просторі $BV(\Delta) \times L^\infty(\Delta, \mathbb{R}^2)$ означимо функціонал

$$J_\varepsilon(u, \theta) = \int_\Delta |\operatorname{div}\theta|^2(\gamma + \beta|\nabla k * u|)\, dx + \alpha \int_\Delta |Du| - \alpha \int_{\partial\Delta} g\, u\, d\mathcal{H} + \\ + \tau\|\theta \cdot \nu^B - g_0\|_{L^\infty(\partial B_{int})} + \lambda \int_B |u - \mathcal{I}^*|^2 dx, \tag{20}$$

якщо $(u, \theta) \in \mathcal{W}_{\varepsilon,\xi}(\Delta)$, і

$$J_\varepsilon(u, \theta) = +\infty \text{ для всіх } (u, \theta) \in BV(\Delta) \times L^\infty(\Delta, \mathbb{R}^2) \setminus \mathcal{W}_{\varepsilon,\xi}(\Delta).$$

Тут $\gamma, \alpha, \tau$ та $\beta$ — задані додатні величини ($\beta \ge 0$). В повній аналогії до задачі (6) можна встановити, що при кожному $\xi > 0$ знайдеться $\lambda > 0$ таке, що розв'язність задачі

$$\inf_{(u,\,\theta) \in \mathcal{W}_{\varepsilon,\,\xi}(\Delta)} J_\varepsilon(u, \theta) \tag{21}$$

рівносильна непустоті множини допустимих пар $\mathcal{W}_{\varepsilon,\xi}(\Delta)$.

Таким чином, задача (21) є розв'язною тоді і тільки тоді, коли знайдеться принаймні одна пара $(u_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$, яка належить множині $\mathcal{W}_{\varepsilon,\xi}(\Delta)$. Позначимо через $(u^0_\varepsilon, \theta^0_\varepsilon)$ — мінімізант в задачі (21). Нехай $\{\varepsilon\}$ — утворюють спадну послідовність дійсних додатних чисел, які прямують до нуля. Нехай $\{(u^0_\varepsilon, y^0_\varepsilon) \in \mathcal{W}_{\varepsilon,\xi}(\Delta)\}_{\varepsilon > 0}$ — відповідна послідовність мінімізантів для задач (21). Оскільки при $\varepsilon = 0$ задача (21) вироджується в задачу реконструкції зображень (6), то виникає закономірне питання про граничні властивості послідовності

$$\{(u^0_\varepsilon, y^0_\varepsilon) \in \mathcal{W}_{\varepsilon,\xi}(\Delta)\}_{\varepsilon > 0}. \tag{22}$$

**Твердження 5** *Послідовність мінімізантів* (22) *містить підпослідовність (збережемо для неї такі ж позначення) таку, що*

$$u_\varepsilon^0 \to u^0 \text{ сильно в } L^r(\Delta),\ \forall\, r \in [1;2);$$

$$\theta_\varepsilon^0 \to \theta^0 * \text{-слабко в } L^\infty(\Delta, \mathbb{R}^2),$$

*де пара* $(u^0, \theta^0)$ *належить множині* $\mathcal{W}_\xi(\Delta)$ *і є розв'язком задачі реконструкції зображення* (6).

**Доведення.** За аналогією з задачею (6) можна показати, що функціонали $J_\varepsilon$ рівномірно обмежені знизу, тобто знайдеться константа $\widehat{C} \geq 0$ така, що

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon^0, \theta_\varepsilon^0) = \inf_{(u,\,\theta)\in \mathcal{W}_{\varepsilon,\xi}(\Delta)} J_\varepsilon(u,\theta) \geq \widehat{C} \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Покажемо, що в цьому випадку послідовності

$$\left.\begin{array}{c} \left\{\displaystyle\int_\Delta |\operatorname{div}\theta_\varepsilon^0|^2 dx\right\}_{\varepsilon>0}, \quad \left\{\displaystyle\int_\Delta |Du_\varepsilon^0| - \int_{\partial\Delta} g\, u_\varepsilon^0\, d\mathcal{H}\right\}_{\varepsilon>0}, \\ \left\{\|\theta_\varepsilon^0 \cdot \nu^B - g_0\|_{L^\infty(\partial B_{int})}\right\}_{\varepsilon>0}, \quad \left\{\|u_\varepsilon^0 - \mathcal{I}^*\|_{L^2(B)}\right\}_{\varepsilon>0}, \end{array}\right\} \tag{23}$$

будуть рівномірно обмеженими зверху. Для цього скористаємся твердженням з роботи [1], згідно з яким для довільного $f \in L^2(\Delta)$ знайдеться єдина функція $u \in L^2(\Delta)$ та розподілення $z \in L^\infty(\Delta, \mathbb{R}^2)$ : $(z \cdot Du) = |Du|, z \cdot \nu^\Delta = g$ на $\partial\Delta$ такі, що

$$\frac{1}{\rho(x)} u - \mu \operatorname{div} z = \frac{1}{\rho(x)} f \text{ в } \Delta,$$

де $\mu > 0$, $\rho(\cdot) \in C(\overline{\Delta}$, $\rho(x) > 0$ $\forall x \in \Delta$. Покладемо в останньому співвідношенні $\rho(x) = 1, f = 0, \mu = 1$. Тоді знайдеться єдина пара $(u,\theta) \in L^2(\Delta) \times L^\infty(\Delta, \mathbb{R}^2)$ така, що

$$u = -\operatorname{div}\theta.$$

Нехай $U_\varepsilon$ — єдиний розв'язок рівняння (17) при $f = u - \operatorname{div}\theta = 0$. Тоді, виходячи з твердження (4), отримуємо

$$U_\varepsilon \to u, \quad \operatorname{div} a_\varepsilon(\nabla U_\varepsilon) \to v = -\operatorname{div}\theta \quad \text{ в } L^2(\Delta),$$

$$\int_\Delta |DT_k(U_\varepsilon)| - \int_{\partial\Delta} gU_\varepsilon d\mathcal{H} \to \int_\Delta |DT_k(u)| - \int_{\partial\Delta} gu\, d\mathcal{H} \quad \forall\, k > 0$$

при $\varepsilon \to 0$. Отже, приймаючи до уваги (20), маємо

$$J_\varepsilon(U_\varepsilon, a_\varepsilon(\nabla U_\varepsilon)) \to J(u,\theta) \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Проте $J_\varepsilon(U_\varepsilon, a_\varepsilon(\nabla U_\varepsilon)) \geq \inf\limits_{(u,\,\theta)\in \mathcal{W}_{\varepsilon,\xi}(\Delta)} J_\varepsilon(u,\theta) = J_\varepsilon(u_\varepsilon^0, \theta_\varepsilon^0)$ для кожного $\varepsilon > 0$. Оскільки послідовність $\{J_\varepsilon(U_\varepsilon, a_\varepsilon(\nabla U_\varepsilon))\}$ є збіжною, то вона обмежена (рівномірно відносно $\varepsilon$). Отже буде обмеженою і послідовність $\{J_\varepsilon(u_\varepsilon^0, \theta_\varepsilon^0)\}_{\varepsilon>0}$, яка є мінорантою для вихідної. Тим самим показано, що знайдеться постійна $C > 0$, яка не залежить від $\varepsilon$, така, що

$$\sup_\varepsilon \int_\Delta |\operatorname{div}\theta_\varepsilon^0|^2 dx \leq C, \quad \sup_\varepsilon \left|\int_\Delta |Du_\varepsilon^0| - \int_{\partial\Delta} g u_\varepsilon^0\, d\mathcal{H}\right| \leq C,$$

$$\sup_\varepsilon \|\theta_\varepsilon^0 \cdot \nu^B - g_0\|_{L^\infty(\partial B_{int})} \leq C, \quad \sup_\varepsilon \|u_\varepsilon^0 - \mathcal{I}^*\|_{L^2(B)} \leq C,$$

$$\sup_\varepsilon \|\theta_\varepsilon^0 = a_\varepsilon(\nabla u_\varepsilon^0)\|_{L^\infty(\Delta,\mathbb{R}^2)} \leq 1.$$


ISSN 1562-9945

Тепер, залучаючи теорему Банаха-Алаоглу та результат щодо компактності вкладення $BV(\Delta)$ в $L^r(\Delta)$ $\forall r \in [1;2)$, можна вибрати з $\{(u_\varepsilon^0, \theta_\varepsilon^0)\}$ підпослідовність (збережемо попередні позначення) таку, що

$$\left.\begin{array}{c} u_\varepsilon^0 \to \widetilde{u} \text{ в } L^r(\Delta), \quad r \in [1;2), \\ \theta_\varepsilon^0 \to \widetilde{\theta} \; * \text{-слабко в } L^\infty(\Delta, \mathbb{R}^2), \\ \operatorname{div}\theta_\varepsilon^0 \to \operatorname{div}\widetilde{\theta} \text{ слабко в } L^2(\Delta). \end{array}\right\} \tag{24}$$

Оскільки оператор $\mathcal{B}_\varepsilon$ є замкненим (див.твердження (2)), то отримуємо

$$\widetilde{\theta} \cdot \nu^\Delta = g \text{ майже скрізь на } \partial\Delta.$$

Що стосується тотожності

$$\widetilde{\theta} \cdot DT_k(\widetilde{u}) = |DT_k(\widetilde{u})| \quad \forall\, k > 0,$$

то її справедливість випливає з твердження (4), якщо покласти в ньому $f = \widetilde{u} - \operatorname{div}\widetilde{\theta}$. Тим самим встановлено, що гранична пара $(\widetilde{u}, \widetilde{\theta})$ для послідовності мінімізантів $\{(u_\varepsilon^0, \theta_\varepsilon^0)\}_{\varepsilon>0}$ належить множині $\mathcal{W}_\xi(\Delta)$. Тепер покажемо, що $(\widetilde{u}, \widetilde{\theta})$ є розв'язком задачі реконструкції зображень (6).

Нехай $(u, \theta)$ — довільний представник множини $\mathcal{W}_\xi(\Delta)$. Оскільки для довільного $k > 0$ маємо

$$(T_k(u), \theta) \in \mathcal{W}_\xi(\Delta) \quad \text{і} \quad J(T_k(u), \theta) \to J(u, \theta) \text{ при } k \to \infty,$$

то для доведення поставленого твердження досить показати, що

$$J(\widetilde{u}, \widetilde{\theta}) \le J(u, \theta)$$

при будь-яких $(u, \theta) \in \mathcal{W}_\xi(\Delta)$ таких, що $u \in L^\infty(\Delta)$.

В роботі [1] показано, що якщо при кожному значенні $\mu > 0$ $u_\mu$ та $v_\mu \in \mathcal{B}u_\mu$ є такими, що

$$\frac{1}{\rho(x)} u_\mu + \mu v_\mu = \frac{1}{\rho(x)} f, \tag{25}$$

де $f \in L^2(\Delta) \cap \operatorname{Dom}(\mathcal{B})$, то для будь-якого $p \ge 1$ є справедливими наступні оцінки:

$$\left(\int_\Delta \frac{u_\mu^p(x)}{\rho(x)}\, dx\right)^{1/p} \le \left(\int_\Delta \frac{|f|^p}{\rho(x)}\, dx\right)^{1/p} + \mu C \left(\int_\Delta \frac{1}{\rho}\, dx\right)^{1/p}, \tag{26}$$

$$\|v_\mu\|_{L^p(\Delta,\, \rho)} \le \|\mathcal{B}f\|_{L^p(\Delta,\, \rho)}, \tag{27}$$

$$v_\mu \to \mathcal{B}f \text{ в } L^p(\Delta) \text{ при } \mu \to 0.$$

Покладемо в (25) $\mu = \frac{1}{n}$, $f = u$ і $\rho(x) = 1$. Нехай $(u_n, v_n = -\operatorname{div}\theta_n)$ — пара, яка задовольняє рівняння (25). Тоді в силу оцінок (27) $\{u_n\}$ є обмеженими в $L^p(\Delta)$ для будь-якого $p$, тобто $\{u_n\} \in L^\infty(\Delta)$. Аналогічно заключаємо, що

$$\operatorname{div}\theta_n \to \operatorname{div}\theta = \mathcal{B}u,$$

$$\int_\Delta |Du_n| - \int_{\partial\Delta} g u_n\, d\mathcal{H} \to \int_\Delta |Du| - \int_{\partial\Delta} g u\, d\mathcal{H}.$$

Таким чином

$$J(u_n, \theta_n) \to J(u, \theta).$$

Тепер застосуємо твердження (4) до випадку, коли $f$ в (17) взяти у вигляді

$$f = f_n = u_n - \operatorname{div} \theta_n.$$

Оскільки за побудовою $f_n \in L^\infty(\Delta) \quad \forall\ n \in N$, то пари $(u_{\varepsilon,n}, \theta_{\varepsilon,n})$ як єдиний розв'язок задачі (17) є такими, що $u_{\varepsilon,n} \in \mathrm{Dom}\mathcal{B}_\varepsilon$,

$$u_{\varepsilon,n} \to u_n, \quad \operatorname{div} a_\varepsilon(\nabla u_{\varepsilon,n}) \to \operatorname{div} \theta_n \ \text{ в } L^2(\Delta),$$

$$\int_\Delta |DT_k(u_{\varepsilon,n})| - \int_{\partial\Delta} g u_{\varepsilon,n}\, d\mathcal{H} \to \int_\Delta |DT_k(u_n)| - \int_{\partial\Delta} g u_n\, d\mathcal{H}$$

при $\varepsilon \to 0$. Отже

$$J_\varepsilon(u_{\varepsilon,n}, \theta_{\varepsilon,n}) \to J(u_n, \theta_n) \text{ при } \varepsilon \to 0. \tag{28}$$

Проте

$$J_\varepsilon(u_{\varepsilon,n}, \theta_{\varepsilon,n}) \geq \inf_{(u,\,\theta) \in \mathcal{W}_{\varepsilon,\xi}(\Delta)} J_\varepsilon(u, \theta) = J_\varepsilon(u_\varepsilon^0, \theta_\varepsilon^0). \tag{29}$$

Таким чином, при кожному $n \in N$ маємо:

$$\begin{aligned} J(\widetilde{u}, \widetilde{\theta}) &\leq \text{(за властивістю напівнеперервності знизу і умов (24))} \leq \\ &\leq \liminf_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon(u_\varepsilon^0, \theta_\varepsilon^0) \leq \text{(за нерівністю (29))} \leq \\ &\leq \liminf_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon(u_{\varepsilon,n}, \theta_{\varepsilon,n}) = \text{(за (28))} = J(u_n, \theta_n). \end{aligned}$$

Тоді, перейшовши в останньому співвідношенні до границі при $n \to \infty$, ми отримуємо

$$J(\widetilde{u}, \widetilde{\theta}) \leq J(u, \theta) \quad \forall\ (u, \theta) \in \mathcal{W}_\xi(\Delta).$$

Тим самим доведено, що $(\widetilde{u}, \widetilde{\theta})$ є оптимальною парою в задачі (6).

## Висновки

Таким чином, для задачі реконструкції зображень запропонована апроксимативна модель, яка може бути покладеною в основу побудови чисельних процедур просторової інтерполяції. Доведено її коректність, встановлено факт розв'язності відповідної варіаційної задачі та показано, що розв'язки запропонованої апроксимативної моделі прямують у відповідних топологіях до розв'язків вихідної задачі реконструкції зображень.

## Література


1. Ballester C., Caselles V., Verdera J., Disocclusion by Joint Interpolation of Vector Fields and Gray Levels, SIAM journal: Multiscale Modelling and Simulation, 2003. Vol.2 Number 1, p. 80–123.
2. Giusti E., Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation, Birkhäuser, Boston, Basel, 1984.
3. Kanizsa G., Gramática de la visión, Paris: Paodis, 1986.
4. Рид М., Саймон Б., Методы современной математической физики. 1.Функциональный анализ., Москва, МИР, 1977.


 ISSN 1562-9945