УДК 621:53.087

К.Х. Зеленський

ВИЗНАЧЕННЯ ГЕОМЕТРІЇ ЗВАРНОГО ШВА ПРИ ЗВАРЮВАННІ КДЕ

Процес плавлення металу й утворення зварювальної ванни під впливом концентрованих джерел енергії (КДЕ) призводить до утворення двофазної зони, поверхнею розділу якої є межа розділення рідинного шару метала, що утворюється внаслідок теплової дії дуги, і зони кристалізації рідинного металу внаслідок його охолодження. Як відомо, поверхня розділу цих фаз являє собою ізотерму плавлення металу. Крім того, вплив тиску дуги призводить до змішування рідинного шару метала, у зв'язку з чим необхідно враховувати рух рідинного шару.

З математичної точки зору задача тепломасоперенесення у зварювальній ванні належить до задач математичної фізики із рухомими межами, відомими як крайові задачі типу Стефана, [1].

Рівняння руху подається у вигляді

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = 2\mathrm{div}\,(\mu \mathrm{S}) - \mathrm{grad}\,\left[p + 2/3\mu \mathrm{div}\mathbf{v}\right],$$

де S – тензор швидкостей деформації, p – тиск, $\mathbf{v}$ – вектор швидкості, μ – коефіцієнт динамічної в'язкості.

Рівняння енергії записується у такому вигляді:

$$\frac{\partial\left[\rho U\right]}{\partial t} = \mathrm{div}\left[\lambda \mathrm{grad} T - \rho \mathbf{v} U + \Phi\right] + Q,$$

де $\Phi = 2\mu \mathrm{grad}\left(V^2/2\right) - \mu \mathbf{v} \times \mathrm{rot}\mathbf{v} - \frac{2}{3}\mu \mathbf{v}\mathrm{div}\mathbf{v} - p\mathbf{v}$ – вектор розсіювання (дисипації) енергії потоку, Q – інтенсивність підводу тепла.

Рівняння, доповнюються рівнянням нерозривності

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\rho \mathbf{v} = 0.$$

З метою спрощення наведеної системи рівнянь розкладемо ρ, що визначається рівнянням стану, у ряд Тейлора за степенями T і p, обмежуючись лінійними членами:

$$\rho \approx \rho_0(1 - \alpha T + \gamma p),$$

де γ і α – коефіцієнти ізотермічного стискання і термічного розширення відповідно. Оскільки змінювання щільності із-за неоднорідності тиску є малі порівняно із змінюваннями, що обумовлені неоднорідністю температури (тобто $|\alpha(T)| \gg |\gamma(p)|$), маємо

$$\frac{\partial\left[(1 - \alpha T)\, V\right]}{\partial t} + \mathrm{div}\left[(1{-}\alpha T) V \cdot V\right] = -\mathrm{grad}\frac{p}{\rho_0} + (1 - \alpha T) F;$$

$$\gamma \frac{\partial p}{\partial t} - \alpha \frac{\partial T}{\partial t} + \mathrm{div}\left[(1{-}\alpha T)\, V\right] = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(1-\alpha T)\,U\right] = \operatorname{div}\left[\frac{\lambda(T)}{\rho_0}\operatorname{grad}T - (1-\alpha T)U + p\mathbf{v}\right] + (1-\alpha T)\mathbf{v}F + \Pi,$$

$$U = c_v T + V^2/2.$$

У цих рівняннях тепломісткість c_v, теплопровідність λ і потужність теплових джерел Q вважаються заданими функціями координат та температури.

Межа солідус—ліквідус є рухома, переміщення якої обумовлено фазовими перетвореннями. Розташування межі при цьому визначається відповідно до умови, що температура на цій межі дорівнює температурі фазового перетворення T. Швидкість переміщення $w(M)$ межової точки M за напрямком нормалі $\mathbf{n}$ до межової поверхні має визначатися відповідно до умов

$$\lambda(M_-)\frac{\partial T(M_-)}{\partial \mathbf{n}} - \lambda(M_+)\frac{\partial T(M_+)}{\partial \mathbf{n}} + Q(M,t,T(M)) = \rho q w(M),$$

$$T(M_-) = T(M_+) = T(M) = T.$$

У цих рівняннях $f(M_-)$ – границі функцій коли за незмінного t точка $M(x,y,z)$ прямує до фази $T(x,y,z) < T$, $f(M_+)$ – границі тих самих функцій, коли за незмінного t точка $M(x,y,z)$ прямує до фази $T(x,y,z) > T$, q – теплота фазового переходу, Q – тепловий потік, що надходить до межі розділення фаз. При цьому

$$\frac{\partial T(M_\pm)}{\partial \mathbf{n}} = \operatorname{grad}T(M_\pm)\cos\beta(M_\pm),$$

де $\beta(M_\pm)$ – кут між напрямком градієнта температури і нормаллю до поверхні розділу фаз. Якщо температура фазового переходу на даній межі є стала, нормаль і градієнт температури є колінеарні вектори.

Зважаючи на виключну складність задачі тепломасопереносу у розплаві, зробимо кілька спрощуючих припущень щодо характеру процесів, які протікають у розплаві. Будемо розглядати осесиметричний процес впливу електричної дуги на метал, що справджується при зварюванні протяжних швів, коли електрод спрямований по центру зазору. Це припущення надає можливість зменшити кількість просторових координат до двох. Далі, оскільки процес розглядається як осесиметричний, залишаються дві складові швидкості потоку рідинного металу (уздовж напрямку зварювання і напрямку глибини розплаву).

Із урахуванням викладеного математична модель, що описує температурне поле у зварювальній ванні, може бути подана у вигляді

$$\rho c_v(T)\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_{sv}\frac{\partial T}{\partial r} + w\frac{\partial T}{\partial z}\right) = \operatorname{div}\left[\lambda(T)\operatorname{grad}T\right] + Q \tag{1}$$

$$\lambda(T)\frac{\partial T_L}{\partial \mathbf{n}_L} = q_e\,\left.\frac{d\mathbf{n}_L}{dt}\right|_{S_L} - Q_R; \tag{2}$$

ISSN 1562-9945

$$\left[\frac{\partial T_L}{\partial z} - \beta\left(T_L - T_0\right)\right]_{z=0} = 0; \tag{3}$$

$$T_L|_{S_L} = T_e. \tag{4}$$

У цій системі рівнянь запроваджено позначення: T_L –температура рідинної фази; Q_m – теплота плавлення; T_m, T_0 – температура плавлення і навколишнього середовища відповідно; c_v, λ – питома тепломісткість та теплопровідність; $\alpha_L = (\mathbf{n}, z)$; Q – щільність потоку енергії у зоні зварювання; S_L – рухома межа розділу фаз; Q_R – потік випромінення енергії, v_{sv} – швидкість руху джерела енергії; w–швидкість конвективного перемішування у напрямку координати z.

У системі рівнянь враховується функціональна залежність від температури коефіцієнтів теплопровідності, питомої тепломісткості та провідності. Ці залежності можна визначити або за результатами експериментальних досліджень, або за відповідними таблицями, які зв'язують залежність теплофізичних параметрів від властивостей металу і температури. У загальному вигляді ці залежності можна подати у вигляді поліномів:

$$\lambda(T) = \lambda_0 + \lambda_1 T + \lambda_2 T^2;$$

$$c_v(T) = c_{v0} + c_{v1} T + c_{v2} T^2;$$

$$A(T) = A_0 + A_1 T.$$

Із урахуванням цих співвідношень крайова задача – це нелінійна крайова задача із рухомими межами. Рівняння можна записати у вигляді

$$\rho_0 c_{v0}\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_{св}\frac{\partial T}{\partial x} + u\frac{\partial T}{\partial z}\right) = \lambda_0 \Delta^2 T + N(T),$$

де $N(T) = \operatorname{div}\left[\left(\lambda_1 T + \lambda_2 T^2\right)\operatorname{grad} T\right] - \left(c_{v1} T + c_{v2} T^2\right)\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_{св}\frac{\partial T}{\partial x}\right)$.

Чисельним методам розв'язання крайових задач із рухомим межами (задач типу Стефана) присвячена значна кількість публікацій. У [2] виконано досить повне теоретичне дослідження неявного різницевого методу, у якому рухомий фронт розділу фаз вловлюється у вузол сітки, але цей метод дає задовільні результати тільки в одновимірному випадку. У [3] для розв'язання одновимірних задач типу Стефана запропоновані різницеві схеми, що ґрунтуються на використанні інтегрального співвідношення, яке відображує закон збереження енергії із подальшим визначенням фронту фазового переходу за методом послідовних наближень. Чисельні (а тим більше числово-аналітичні) методи розв'язання багатовимірних крайових задач із рухомим межами практично відсутні.

Оскільки для більшості металів температурна залежність теплофізичних характеристик відіграє суттєву роль у розподіленні температурного поля у зоні розплаву поряд із впливом конвективних членів, необхідно розв’язувати саме нелінійну крайову задачу тепломасоперенесення у зварювальній ванні.

Пошук розв’язання задач такого роду є доцільний із кількох точок зору. По-перше, математичне моделювання задач тепломасоперенесення надає можливість виконувати опосередковану оцінку технологічних режимів зварювання із урахуванням властивостей металів на етапі моделювання процесу електрозварювання. По-друге, таке моделювання надає можливість оцінювати геометричні характеристики зварного шва, який утворюється під впливом концентрованих джерел енергії. Крім того, коректне математичне моделювання процесів формування зварювальної ванни може забезпечити синтез системи управління процесами зварювання у замкненому контурі управління режимом зварювання. Ця проблема є актуальна у зв’язку з тим, що існуючі методи вимірювання температурних полів у зварювальній ванні не забезпечують достатньої інформації про розподіл температурного поля у ванні, що є необхідна умова мінімізації квадратичного критерію якості, який лежить в основі синтезу системи оптимального управління процесами зварювання.

У [4] запропоновано ітераційний числово-аналітичний метод розв’язання нелінійних крайових задач математичної фізики.

Зважаючи на виключну складність вирішення тривимірної нелінійної задачі із рухомим межами про розподіл температурного поля у зварювальній ванні, у даній роботі розглядається лінійна крайова задача із рухомими межами у випадку осесиметричного джерела енергії.

$$\rho_0 c_{v0}\left(\frac{\partial T}{\partial t}+v_{св}\frac{\partial T}{\partial r}-w\frac{\partial T}{\partial z}\right)=\lambda_0\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+Q \tag{5}$$

в області $D=\{0\leqslant r\leqslant R=v_{cv}t;\ 0\leqslant z\leqslant h(t);\ 0\leqslant t\leqslant t_k\}$.

Межові, початкові умови та умови на поверхні розділу фаз задамо у вигляді:

$$T(r,z,0)=\varphi(r,z); \tag{6}$$

$$T(0,z,t)=0;\ \ T(r,z,t)|_{r\to\infty}=0; \tag{7}$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial z}-\alpha T\right]_{z=0}=-\varepsilon\sigma\left(T^4-T_{sr}^4\right);T(r,h,t)=T_l \tag{8}$$

$$\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z=h(t)}=q\rho_0\frac{dh}{dt}. \tag{9}$$

Оскільки основна мета даної роботи полягає у вирішенні крайової задачі із рухомими межами. Тому розглядається лінійна крайова задача (5)—(9).

Заміна змінної

$$T(r,z,t)=e^{-v_{sv}/(2a)r-w/(2a)z-Ct}\theta(r,z,t) \tag{10}$$

зводить цю задачу до стандартної задачі теплопровідності відносно змінної $\theta(r,z,t)$:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right)+Q_1; \tag{11}$$

$$\theta(r,z,0)=\varphi(r,z)e^{v_{sv}/(2a)r+w/(2a)z};C=\frac{v_{sv}^2}{4a}-\frac{v_{sv}}{2}\frac{1}{r}+\frac{w^2}{4a}; \tag{12}$$

$$\left[\frac{\partial\theta}{\partial z}-\left(\frac{w}{2a}+\alpha\right)\theta\right]_{z=0}=-\varepsilon\sigma e^{v_{sv}/(2a)r+Ct}\left(T^4-T_{sr}^4\right);$$

$$\theta(r,h,t)=ET_l;\quad E=e^{u/(2a)r+w/(2a)h+Ct};\ a=\frac{\lambda_0}{c_{v0}\rho_0};\ Q_1=\frac{1}{c_{v0}\rho_0}QE;$$

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\bigg|_{z=h(t)}=q\rho_0E\frac{dh}{dt}. \tag{13}$$

Задача полягає у відшуканні температурного поля у зварювальній ванні під впливом концентрованого джерела енергії і визначенні закону руху межі розділу двофазної зони.

Вирішення цієї задачі дозволяє визначити функцію $h(t)$ глибини зварного шва.

Внаслідок застосування методу інтегральних перетворень у скінченних межах за просторовими змінними отримуємо рівняння відносно функції $\bar{\bar{\theta}}_{n,k}(t)$:

$$\bar{\bar{\theta}}_{n,k}(\beta_n,\gamma_k,t)=\frac{1}{\|J_0(\beta_n r\|^2}\frac{1}{\|Z_{n,k}(\gamma_k z)\|^2}\int\limits_0^R rJ_0(\beta_n r)\int\limits_0^h Z_{n,k}(\gamma_k z)\theta(r,z,t)drdz. \tag{14}$$

Власні значення відшукуються як розв’язання рівнянь:

$$J_0(\beta R)=0;\gamma\cos\gamma h+\left(\frac{w}{2a}+\alpha\right)\sin\gamma h=0. \tag{15}$$

$$\frac{d\bar{\bar{\theta}}}{dt}+a\mu_{n,k}^2\bar{\bar{\theta}}=\left(\frac{1}{\lambda_0}p_kq_nQ(t)+q_nT_l\right)e^{-Ct};$$

$$\bar{\bar{\theta}}_{n,k}(0)=\bar{\bar{\varphi}}_{n,k}.$$

Розв’язання цього рівняння має вигляд:

$$\bar{\bar{\theta}}_{n,k}(t)=\bar{\bar{\varphi}}_{n,k}e^{-a\mu_{n,k}^2t}+\bar{\bar{Q}}_{n,k}(t).$$

В області оригіналів маємо

$$\theta(r,z,t)=\sum_{n,k}rJ_0(\beta_n r)\left[\cos\gamma_k z+\frac{1}{\gamma_k}\left(\frac{w}{2a}+\alpha\right)\sin\gamma_k z\right]\bar{\bar{Q}}_{nk}(t); \tag{16}$$

$$\bar{\bar{Q}}_{nk}(t) = q_n \left(\frac{1}{\lambda_0} p_k Q(t) + T_l\right) \left[\frac{1}{C - a\mu_{n,k}^2}\left(e^{-a\mu_{n,k}^2 t} - e^{-Ct}\right)\right];$$

$$q_n = \frac{1}{1 + (v_{sv}/2a)^2}\left[R\left(J_1(\beta_n R)\right) + \frac{v_{sv}}{2a} J_0(\beta_n R)\right] e^{v_{sv}/(2a)R};$$

$$p_k = \frac{e^{w/(2a)h}}{\gamma_k^2 + (w/2a)^2}\left[\left(\gamma_k + \frac{1}{\gamma_k}\left(\frac{w}{2a} + \alpha\right)\frac{w}{2a}\right)\sin\gamma_k h - \alpha\cos\gamma_k h\right] + \\ + \frac{\alpha}{\gamma_k^2 + (w/2a)^2}.$$

Це розв’язання має задовольняти умову сполучення. Отримуємо нелінійне диференціальне рівняння відносно невідомої функції $h(t)$ у такому вигляді:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\lambda_0}{q\rho_0}\sum_{n,k} r J_0(\beta_n r) q_n \left[\left(\frac{w}{2a} + \alpha\right)\cos\gamma_k h - \gamma_k \sin\gamma_k h\right] \times \\ \times \left\{\frac{e^{w/(2a)h}}{\gamma_k^2 + (w/2a)^2}\left[\left(\gamma_k + \frac{1}{\gamma_k}\left(\frac{w}{2a} + \alpha\right)\frac{w}{2a}\right)\sin\gamma_k h - \alpha\cos\gamma_k h\right] + \frac{\alpha}{\gamma_k^2 + (w/2a)^2}\right\} \times \\ \times \left\{\frac{1}{C - a\mu_{nk}^2}\left(e^{-a\mu_{nk}^2 t} - e^{-Ct}\right) + \bar{\bar{\varphi}}_{nk} e^{-a\mu_{nk}^2 t}\right\}\left(\frac{1}{\lambda_0} Q(t) + T_l\right). \tag{17}$$

Апроксимуємо це рівняння різницевим із кроком τ. Маємо:

$$h_{j+1} = h_j + \tau f_0 \sum_{n,k}^{RJ_0(\beta_n R)} q_n \left[\left(\frac{w}{2a} + \alpha\right)\cos\gamma_k h_j - \gamma_k \sin\gamma_k h_j\right] \times \\ \times \left\{\frac{e^{w/(2a)h_j}}{\gamma_k^2 + (w/2a)^2}\left[\left(\gamma_k + \frac{1}{\gamma_k}\left(\frac{w}{2a} + \alpha\right)\frac{w}{2a}\right)\sin\gamma_k h_j - \alpha\cos\gamma_k h_j\right] + \\ + \frac{\alpha}{\gamma_k^2 + (w/2a)^2}\right\} \times \\ \times \left\{\frac{1}{C - a\mu_{nk}^2}\left(e^{-a\mu_{nk}^2 t} - e^{-Ct}\right) + \varphi_{nk} e^{-a\mu_{nk}^2 t}\right\}. \tag{18}$$

$$f_0 = \lambda_0/(\rho_0 c_{v0}).$$

Отриманий алгоритм визначення глибини плавлення металу є ітераційний, оскільки розв’язання рівняння (15) залежить від функції $h(t)$. Це означає, що після визначення функції $h(t)$ із рівняння (17) треба повернутися до визначення нових власних значень γ_k і повторити пошук розв’язання рівняння (17) із новими значеннями власних значень γ_k.

Література

1. Никитенко Н.И. Теория тепломассопереноса.—К.:– Наукова думка, 1983.—352 с.
2. Самарский А.А., Моисеенко В.Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерных задач Стефана.// Журн. выч. мат. и мат. физики.— 1966.– 3.—С. 816—827.

 ISSN 1562-9945

3. Никитенко Н.И. Разностный метод решения граничных обратных задач теплопроводности.//Инж.-физ журнал.—1977, 32, 3.—С.502–507

4. Зеленский К.Х. Адаптивное управление процессами сварки неплавящимся электродом.//Труды межд. конф. Wtlding-1990.—С.9—14.

Отримано 26.03.2009 р.