УДК 00.00.00

В.В. Скалозуб, В.Е. Белозёров, Б.Б. Белый

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ СВОЙСВАХ ОБОБЩЕННОГО ЛОГИСТИЧЕСКОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Аннотация: Для обобщенного логистического отображения построены границы области иннвариантности

Ключевые слова: Логистическое отображение, инвариантные свойства

Введение

В популяционной биологии часто рассматривается итерационный процесс $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ порожденный так называемым логистическим отображением $L_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$. Это отображение показывает каким образом численность популяции в данный год x_{n+1} зависит от численности популяции в предыдущий год x_n:

$$x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n) \tag{1}$$

x_0 – известная величина;
$n = 0, 1, 2 \ldots$

Таким образом, дискретный процесс (1) зависит только от одного положительного параметра λ.

В задачах экономики встречаются более сложные итерационные процессы. Например, процесс

$$x_{n+1} = \lambda x_n^\alpha (1 - x_n)^\beta \;\; n = 0, 1, 2 \ldots \tag{2}$$

порождаеться одномерным отображением

$$L_{\lambda,\alpha,\beta}(x) = \lambda x_n^\alpha (1 - x_n)^\beta \;\; n = 0, 1, 2 \ldots \tag{3}$$

которое называется обобщенным логистическим отображением. Здесь α, β и λ – положительные параметрические постоянные.

В настоящей работе будет исследовано поведение отображения $L_{\lambda,\alpha,\beta}(x)$ в зависимости от параметров α, β и λ.

Инвариантные множества

Очевидно, что отображение $L_{\lambda,\alpha,\beta}(x)$ будет корректно описывать итерационый процесс (1) только тогда, когда имеет место включение $L_{\lambda,\alpha,\beta}[0,1] \subset [0,1]$.

Очевидно, что отрезок $[0,1]$ должен быть инвариантным множеством по отношению к действию отображения (1).

Хорошо известно, что это свойство инвариантности сохраняется если $0 \leqslant \lambda \leqslant 4$ и $\alpha = \beta = 1$.

Найдем теперь аналогичные условия и для обобщенного логистического отображения.

Для этой цели исследуем на максимвм функцию $L_{\lambda,\alpha,\beta}(x)$:

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dx} &= \lambda x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}[\alpha(1-x)-\beta x] = \\ &= \lambda x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}[\alpha-(\alpha+\beta)x]\end{aligned} \tag{4}$$

Точками экстремума последней функции являются точки:

$$x=0; \quad x=1; \quad x=\alpha/(\alpha+\beta)<1.$$

Очевидно, что все точки принадлежат отрезку $[0,1]$ и точки $x=0$ и $x=1$ являются точками минимума. Следовательно точка $x=\alpha/(\alpha+\beta)$ является точкой максимума.

Значение функции функции $L_{\lambda,\alpha,\beta}(x)$ в точке максимума таково:

$$L_{max} = \alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha}\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{\beta} \tag{5}$$

Для того, чтобы отрезок $[0,1]$ был инваририантным множеством для функции $L_{\lambda,\alpha,\beta}(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $L_{max}\leqslant 1$.

Отсюда вытекает ограничение на параметр λ при котором будет выполняться условие инвариантности.

Это условие будет иметь вид

$$\lambda\leqslant\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}} \tag{6}$$

Рассмотрим поведение функции

$$F(\alpha,\beta)=\frac{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}}{\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}} \tag{7}$$

при возростании одного или обоих аргументов. Преобразуем $F(\alpha,\beta)$ следующим образом

$$\begin{aligned}F(\alpha,\beta) &= \frac{(\alpha+\beta)^{\alpha}}{\alpha^{\alpha}}\cdot\frac{(\alpha+\beta)^{\beta}}{\beta^{\beta}} = \left[1+\frac{\beta}{\alpha}\right]^{\alpha}\cdot\left[1+\frac{\alpha}{\beta}\right]^{\beta} = \\ &= \left[\left[1+\frac{\beta}{\alpha}\right]^{\frac{\alpha}{\beta}}\right]^{\beta}\cdot\left[\left[1+\frac{\alpha}{\beta}\right]^{\frac{\beta}{\alpha}}\right]^{\alpha}\end{aligned} \tag{8}$$

Введем переменную $z=\beta/\alpha$. Тогда

$$\begin{aligned}F(\alpha,\beta) &= \left[[1+z]^{\frac{1}{z}}\right]^{\alpha z}\cdot\left[\left[1+\frac{1}{z}\right]^{z}\right]^{\alpha} = \\ &= \left\{\left[\left((1+z)^{\frac{1}{z}}\right)^{z}\right]\cdot\left[\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right]\right\}^{\alpha} = \left\{(1+z)\cdot\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right\}^{\alpha}\end{aligned} \tag{9}$$

ISSN 1560-8956

Пусть $z \to 0$. Тогда $\alpha \to \infty$ и

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left\{(1+z)\cdot\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right\}^{\alpha} = \lim_{\alpha\to\infty} l^{\alpha}\cdot(1+z) = l^{\alpha} \to \infty \tag{10}$$

Пусть теперь $z \to \infty$ тогда $\alpha \to 0$

$$\lim_{\alpha\to 0}\left\{(1+z)\cdot\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\right\}^{\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}(1+z)\cdot l^{\alpha} \to \infty \tag{11}$$

Аналогичная ситуация имеет место при замене α на β. Отсюда вытекает следующий результат

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{\alpha\to 0\\ \beta\geqslant 0}} F(\alpha,\beta) = \lim_{\substack{\beta\to 0\\ \alpha\geqslant 0}} F(\alpha,\beta) = 1\\
&\lim_{\substack{\alpha\to\infty\\ \beta\geqslant 0}} F(\alpha,\beta) = \lim_{\substack{\beta\to\infty\\ \alpha\geqslant 0}} F(\alpha,\beta) = \lim_{\substack{\alpha\to\infty\\ \beta\to\infty}} F(\alpha,\beta) = \infty
\end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, функция $F(\alpha,\beta)$ является возрастающей в области $D = [0,\infty)\times[0,\infty)$.

Это означает, что при росте α или β граница области инвариантности λ будет отодвигаться вправо (6) $0 \leqslant \lambda \leqslant F(\alpha,\beta)$.

Графически покажем изменнение бифуркационно й диаграммы при фиксированых α и β, и переменном λ.

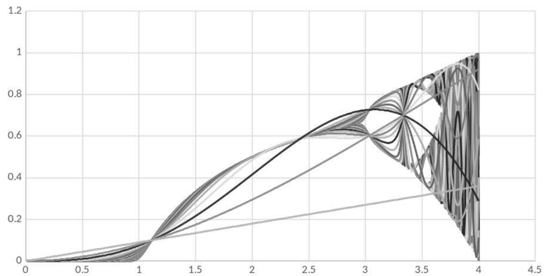

Рис. 1 – График отображения при $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $L_{\max} = 4$

Рис. 3 показывает что по сравнению с стандартным отображением рис. 1 при уменьшении коэффициента степени α итерации расположены более плотно и идут практически вдоль первой итерации. Это приводит к тому, что значения функции (2) раньше доходят до предела отображения; точки начала хаотического процесса расположены дальше друг от друга.

Рис. 2 показывает, что при увеличении коэффициента β итерации расположены менее плотно друг от друга, но все равно следуют вдоль первой итерации. Это позволяет точкам каждой итерации в хаотическом отображении располагаться более плотно и увеличить предел отображения функции. В целом же за счет выбо-

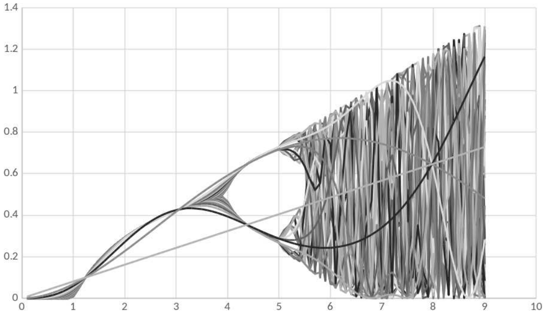

Рис. 2 – График отображения при $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $L_{\max} = 6.75$

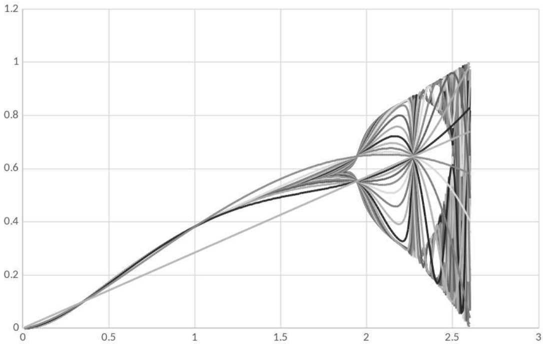

Рис. 3 – График отображения при $\alpha = 0.5$, $\beta = 1$, $L_{\max} = 2.598$

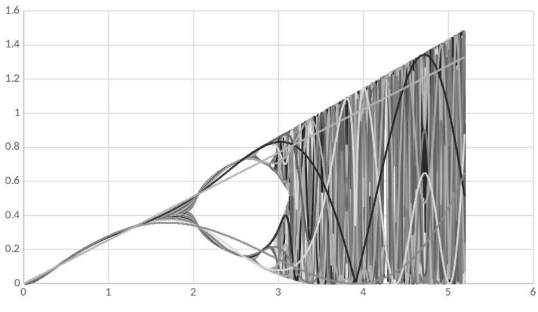

Рис. 4 – График отображения при $\alpha = 0.5$, $\beta = 2$, $L_{\max} = 3.49$

 ISSN 1560-8956

ра нескольких значений параметров возможно приближенно представить сложные динамические процессы.

Библиографический список

1. Crownover R.M.Introduction to Fractals and Chaos, Jones and Bartlett Publishers, Boston, London, 1995; 450 pages
2. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. Москва, УРСС, 2004. 320 с.

Отримано 26.10.2013 р.