УДК 517.55

©2014 р. А. Куриляк, О. Скасків, Л. Шаповаловська

Львівський національний університет імені Івана Франка

НЕРІВНІСТЬ ВІМАНА ДЛЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ В БІКРУЗІ

Доведено аналог нерівності Вімана для функций, аналітичних в бікрузі $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}^2\colon |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$. Отримані нерівності точні.

In this paper we prove some analogue of Wiman's type inequality for analytic functions in the bidisc $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}^2\colon |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$. The obtained inequality is sharp.

1. Вступ. За теоремою Вімана-Валірона (див., наприклад, [1 – 4]) для кожної не тотожно сталої цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \tag{1}$$

і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує така множина $E \subseteq [1, +\infty)$ скінченної логарифмічної міри ($\int_E \frac{dr}{r} < +\infty$), що для всіх $r \in [1, +\infty) \setminus E$ виконується нерівність Вімана

$$M_f(r) \leq \mu_f(r) \ln^{1/2+\varepsilon} \mu_f(r).$$

Тут $M_f(r) = \max\{|f(z)|\colon |z| = r\}$, $\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n\colon n \geq 0\}$. З іншого боку, для кожної аналітичної в одиничному крузі $\mathbb{D} = \{z\colon |z| < 1\}$ функції f вигляду (1) і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує така множина $E \subseteq [0, 1)$ скінченної логарифмічної міри на інтервалі $[0, 1)$ (тобто, $\int_E \frac{dr}{1-r} < +\infty$), що для всіх $r \in [0, 1) \setminus E$ виконується нерівність (див., наприклад, [5 – 9])

$$M_f(r) \leq \frac{\mu_f(r)}{(1-r)^{1+\delta}} \ln^{1/2+\delta} \frac{\mu_f(r)}{1-r}.$$

У статті [6] вказано, що для функції $g(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \exp\{n^\varepsilon\} z^n$, $\varepsilon \in (0, 1)$,

$$\varlimsup_{r \to 1-0} \frac{M_g(r)}{\frac{\mu_g(r)}{1-r} \ln^{1/2} \frac{\mu_g(r)}{1-r}} \geq C > 0.$$

У [10] доведено аналог нерівності Вімана для аналітичних в області $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}^2\colon |z_1| < 1, z_2 \in \mathbb{C}\}$ функцій, степеневий розклад яких у цій області має вигляд

$$f(z) = f(z_1, z_2) = \sum_{n+m=0}^{+\infty} a_{nm} z_1^n z_2^m. \tag{2}$$

У даній статті розглянемо задачу встановлення нерівностей типу Вімана в класі функцій аналітичних у бікрузі $\mathbb{D}^2 = \{z \in \mathbb{C}^2\colon |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$, степеневе розвинення яких має вигляд (6).

Через $\mathcal{A}^2$ позначимо клас таких функцій.

2. Нерівність Вімана для аналічичних функцій в бікрузі. Для функції $f \in \mathcal{A}^2$ і $r = (r_1, r_2) \in [0, 1)^2$ позначимо

$$M_f(r) = \max\{|f(z)|\colon |z_1| \leq r_1,\ |z_2| \leq r_2\},$$
$$\mu_f(r) = \max\{|a_{nm}| r_1^n r_2^m\colon (n, m) \in \mathbb{Z}_+^2\},$$
$$\mathfrak{M}_f(r) = \sum_{n+m=0}^{+\infty} |a_n| r^n,\ \triangle_r = [r_1, 1) \times [r_2, 1).$$

Нехай $D_f(r)$ — 2×2 матриця така, що

$$D_{ij} = r_i \frac{\partial}{\partial r_i}\Big(r_j \frac{\partial}{\partial r_j} \ln \mathfrak{M}_f(r)\Big) = \partial_i \partial_j \ln \mathfrak{M}_f(r),$$
$$\partial_i = r_i \frac{\partial}{\partial r_i},\ i, j \in \{1, 2\}.$$

Наступне твердження доводиться практично дослівним повтором міркувань з доведення теореми 3.1 зі статті [11], зважаючи на це, опустимо її доведення.

Теорема 1. *Нехай $f \in \mathcal{A}^2$. Існує абсолютна стала C_0 така, що*

$$\mathfrak{M}_f(r) \leq C_0 \mu_f(r) (\det(D_f(r) + I))^{1/2},$$

де I — 2×2 одинична матриця.

Будемо казати, що $E \subseteq [0, 1)^2$ є *множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри на* $[0, 1)^2$, якщо існує $r_0 \in [0, 1)^2$

таке, що

$$\nu_{\ln}(E\cap\triangle_{r_0}):=\iint\limits_{E\cap\triangle_{r_0}}\frac{dr_1dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)}<+\infty,$$

тобто множина $E\cap\triangle_{r_0}$ є множиною скінченної логарифмічної міри на $[0,1)^2$.

Лема 1. *Нехай $\delta>0$, $h\colon\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}_+$ — функція, зростаюча по кожній змінній окремо при фіксованому довільному значенні іншої змінної, і така, що*

$$\int\limits_1^{+\infty}\int\limits_1^{+\infty}\frac{du_1du_2}{h(u_1,u_2)}<+\infty.$$

Тоді існує множина $E\subseteq[0,1)^2$ асимптотично скінченної логарифмічної міри така, що для всіх $r\in[0,1)^2\setminus E$ виконується

$$\det(D_f(r)+I)\le\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}\times$$
$$\times h\Big(\frac{\partial}{\partial r_1}\ln\mathfrak{M}_f(r),\frac{\partial}{\partial r_2}\ln\mathfrak{M}_f(r)\Big),\qquad(3)$$

$$\frac{\partial}{\partial r_1}\ln\mathfrak{M}_f(r)\le$$
$$\le(\ln\mathfrak{M}_f(r))^{1+\delta}\cdot\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)^{\delta}},\qquad(4)$$

$$\frac{\partial}{\partial r_2}\ln\mathfrak{M}_f(r)\le$$
$$\le(\ln\mathfrak{M}_f(r))^{1+\delta}\cdot\frac{1}{(1-r_1)^{\delta}(1-r_2)}.\qquad(5)$$

Доведення. Нехай $E_0\subseteq[0,1)^2$ — множина, на якій не виконується нерівність (6). Доведемо, що E_0 є множиною асимтпотично скінченної логарифмічної міри. Оскільки функція $r_j\frac{\partial}{\partial r_j}\ln\mathfrak{M}_f(r)$ є зростаючою за кожною змінною, тоді існує $r^0\in[1/2,1)^2$ таке, що для довільного $j\in\{1,2\}$ і всіх $r\in\triangle_{r^0}$ маємо

$$r_j\frac{\partial}{\partial r_j}\ln\mathfrak{M}_f(r)+\ln r_j>1.$$

Тоді

$$\nu_{\ln}(E_0\cap\triangle_{r^0})=\iint\limits_{E_0\cap\triangle_{r^0}}\frac{dr_1dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)}\le$$

$$\le\iint\limits_{E_0\cap\triangle_{r^0}}\frac{\det(D_f(r)+I)(1-r_1)(1-r_1)}{h\Big(\frac{\partial}{\partial r_1}\ln\mathfrak{M}_f(r),\frac{\partial}{\partial r_2}\ln\mathfrak{M}_f(r)\Big)}\times$$
$$\times\frac{dr_1dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)}\le$$
$$\le\iint\limits_{E_0\cap\triangle_{r^0}}\frac{\det(D_f(r)+I)dr_1dr_2}{h\Big(r_1\frac{\partial}{\partial r_1}\ln\mathfrak{M}_f(r),r_2\frac{\partial}{\partial r_2}\ln\mathfrak{M}_f(r)\Big)}\le$$
$$\le\iint\limits_{E_0\cap\triangle_{r^0}}\frac{\det(D_f(r)+I)2r_12r_2dr_1dr_2}{h\Big(r_1\frac{\partial}{\partial r_1}\ln\mathfrak{M}_f(r),r_2\frac{\partial}{\partial r_2}\ln\mathfrak{M}_f(r)\Big)}\le$$
$$\le4\iint\limits_{E_0\cap\triangle_{r^0}}h^{-1}\Big(r_1\frac{\partial}{\partial r_1}\ln\mathfrak{M}_f(r)+\ln r_1,$$
$$r_2\frac{\partial}{\partial r_2}\ln\mathfrak{M}_f(r)+\ln r_2\Big)\times$$
$$\times\det(D_f(r)+I)r_1r_2dr_1dr_2.$$

Нехай $U\colon[0,1)^2\to\mathbb{R}^2_+$ — відображення таке, що $U=(u_1,u_2)$ і $u_j=r_j\frac{\partial}{\partial r_j}\ln\mathfrak{M}_f(r)+\ln r_j$, $j\in\{1,2\}$. Якщо $i\ne j$, то

$$\frac{\partial u_j}{\partial r_i}=\frac{\partial}{\partial r_i}\Big(r_j\frac{\partial}{\partial r_i}\ln\mathfrak{M}_f(r)+\ln r_j\Big)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial r_i}\Big(r_j\frac{\partial}{\partial r_i}\ln\mathfrak{M}_f(r)\Big)=\frac{1}{r_i}\partial_i\partial_j\ln\mathfrak{M}_f(r);$$
$$\frac{\partial u_i}{\partial r_i}=\frac{\partial}{\partial r_i}\Big(r_i\frac{\partial}{\partial r_i}\ln\mathfrak{M}_f(r)+\ln r_i\Big)=$$
$$=\frac{1}{r_i}\partial_i\partial_j\ln\mathfrak{M}_f(r)+\frac{1}{r_i},\ i,j\in\{1,2\}.$$

Якобіан матриці переходу

$$J_0=\frac{D(u_1,u_2)}{D(r_1,r_2)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial r_1}&\frac{\partial u_1}{\partial r_2}\\\frac{\partial u_2}{\partial r_2}&\frac{\partial u_2}{\partial r_2}\end{vmatrix}=$$
$$=r_1r_2\det(D_f(r)+I).$$

Тоді, $E_0\cap\triangle_{r^0}$ є множиною скінченної логарифмічної міри.

$$\nu_{\ln}(E_0\cap\triangle_{r^0})=4\iint\limits_{U^{-1}(E_0\cap\triangle_{r^0})}\frac{du_1du_2}{h(u_1,u_2)}<$$
$$<4\int\limits_1^{+\infty}\int\limits_1^{+\infty}\frac{du_1du_2}{h(u_1,u_2)}<+\infty.$$

Позначимо через $E_1\subseteq[0,1)^2$ — множину, на якій нерівність (6) не виконується. Виберемо $r^0\in[1/2,1)^2$ таке, що $r_j\frac{\partial}{\partial r_j}\ln\mathfrak{M}_f(r)>1$

для кожного $j \in \{1, 2\}$.

$$\nu_{\ln}(E_1 \cap \triangle_{r^0}) = \iint\limits_{E_1 \cap \triangle_{r^0}} \frac{dr_1 dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)} \le$$

$$\le \iint\limits_{E_1 \cap \triangle_{r^0}} \frac{\frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r) \cdot (1-r_1)}{\frac{1}{(1-r_2)^{\delta}} \cdot \ln^{1+\delta} \mathfrak{M}_f(r)} \frac{dr_1 dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)}.$$

Розглянемо відображення $V\colon [0,1)^2 \to [0,1) \times \mathbb{R}_+$, де $V = (v_1(r), v_2(r))$ і $v_1 = \ln \mathfrak{M}_f(r)$, $v_2 = r_2$.

$$J_1 = \frac{D(v_1, v_2)}{D(r_1, r_2)} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r) & \frac{\partial}{\partial r_2} \ln \mathfrak{M}_f(r) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r).$$

Логарифмічна міра множини $E_1 \cap \triangle_{r^0}$ скінченна.

$$\nu_{\ln}(E_1 \cap \triangle_{r^0}) =$$

$$= \iint\limits_{E_1 \cap \triangle_{r^0}} \frac{\frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r)}{\frac{1}{(1-r_2)^{\delta}} \cdot \ln^{1+\delta} \mathfrak{M}_f(r)} \frac{dr_2}{1-r_2} dr_1 =$$

$$= \iint\limits_{V^{-1}(E_1 \cap \triangle_{r^0})} \frac{1}{u_1^{1+\delta} \frac{1}{(1-u_2)^{\delta}}} \cdot \frac{du_2}{1-u_2} du_1 \le$$

$$\le \int\limits_1^{+\infty} \frac{du_1}{u_1^{1+\delta}} \cdot \int\limits_0^1 \frac{du_2}{(1-u_2)^{1-\delta}} < +\infty.$$

Нехай $E_2 \subset [0,1)^2$ — множина, на якій не виконується нерівність (5). Подібно доводимо, що E_2 є множиною асимтпотично скінченної логарифмічної міри на $[0,1)^2$.

Зауважимо, що $E = \cup_{j=0}^{2} E_j$ і, отже, також є множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри на $[0,1)^2$.

Теорема 2. *Нехай $f \in \mathcal{A}^2$. Для кожного $\delta > 0$ існує множина $E = E(f, \delta) \subseteq [0,1)^2$ асимпточично скінченної логарифмічної міри така, що для всіх $r \in [0,1)^2 \setminus E$ виконується нерівність*

$$M_f(r) \le \mu_f(r) \times$$

$$\times \left(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \cdot \ln \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \right)^{1+\delta}. \tag{6}$$

Доведення. Позначимо через E винятко- ву множину з леми 1. Тоді для $h(r) = (r_1 r_2)^{1+\delta}$ і всіх $r \in [0,1)^2 \setminus E$ маємо

$$\mathfrak{M}_f(r) \le C_0 \mu_f(r) (\det(D_f(r) + I))^{1/2} \le$$

$$\le C_0 \mu_f(r) \left(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \right)^{1/2} \times$$

$$\times h^{1/2} \Big(\frac{\partial}{\partial r_1} \ln \mathfrak{M}_f(r), \frac{\partial}{\partial r_2} \ln \mathfrak{M}_f(r) \Big) \le$$

$$\le C_0 \mu_f(r) \left(\prod_{i=1}^{2} \frac{1}{1-r_i} \Big(\frac{\partial}{\partial r_i} \ln \mathfrak{M}_f(r) \Big)^{1+\delta} \right)^{1/2} \le$$

$$\le C_0 \mu_f(r) \Big(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \Big)^{\frac{(1+\delta)^2}{2}} \times$$

$$\times \left(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \ln^{2(1+\delta)^2} \mathfrak{M}_f(r) \right)^{1/2} =$$

$$= C_0 \mu_f(r) \Big(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} \Big)^{1+\delta+\delta^2/2} \times$$

$$\times \ln^{(1+\delta)^2} \mathfrak{M}_f(r) <$$

$$< \mu_f(r) \Big(\frac{\ln \mathfrak{M}_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \Big)^{1+\delta_1}, \tag{7}$$

де $\delta_1 = 2(\delta + \delta^2)$. З нерівності (6) випливає, що для всіх $r \in \triangle_{r^0} \setminus E$

$$\ln \mathfrak{M}_f(r) < \ln \mu_f(r) + (1+\delta_1) \times$$

$$\times \Big(\ln \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)} + \ln_2 \mathfrak{M}_f(r) \Big),$$

$$\ln \mathfrak{M}_f(r) - (1+\delta_1) \ln_2 \mathfrak{M}_f(r) <$$

$$< \ln \mu_f(r) + (1+\delta_1) \ln \frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}.$$

Тоді існує $r^1 \in [0,1)^2$ таке, що для всіх $r \in \triangle_{r^1} \setminus E$ маємо

$$\ln \mathfrak{M}_f(r) < 2 \ln \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)},$$

$$M_f(r) \le \mathfrak{M}_f(r) \le \mu_f(r) \times$$

$$\times \left(\frac{2}{(1-r_1)(1-r_2)} \ln \frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)} \right)^{1+\delta_1} \le$$

$$\leq \mu_f(r)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}\ln\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}\right)^{1+\delta_2},$$

де $\delta_2 = 2\delta_1$.

3. Приклади на точність нерівності (6). З теореми 2 випливає, що для кожного $\delta > 0$ множина

$$E = E(f,\delta) = \Bigg\{r \in [0,1)^2\colon M_f(r) > \mu_f(r)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{(1-r_1)(1-r_2)}\ln\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}\right)^{1+\delta}\Bigg\}$$

є множиною асимптотично скінченної логарифмічної міри на $[0,1)^2$. Доведемо, що показник $1+\delta$ у нерівності (6) не можна замінити числом меншим за 1.

Розглянемо функцію

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\sqrt{n}} z_1^n \cdot \sum_{m=1}^{+\infty} e^{\sqrt{m}} z_2^m.$$

Позначимо $f_0(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\sqrt{n}} z^n$. Для функції $f(z) = f_0(z_1)f_0(z_2)$ маємо $M_f(r) = M_{f_0}(r_1)M_{f_0}(r_2)$, $\mu_f(r) = \mu_{f_0}(r_1)\mu_{f_0}(r_2)$.

Як доведено в [6] для функції $f_0(z_1)$ існує стала $C_0 \in (0,1)$ така, що

$$C_0\frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1} \leq \frac{M_{f_0}(r_1)}{\sqrt{\ln M_{f_0}(r_1)}} \leq \frac{1}{C_0}\frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1}, \quad (8)$$

$r_1 \to 1-0$.

З нерівності (6) випливає, що для $r_1 \geq r_1'$ існує стала $C_1 < C_0$ така, що

$$M_{f_0}(r_1) \geq C_1\frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1}\ln^{1/2}\frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1}. \quad (9)$$

Доведемо нерівність

$$g^{-1}(3g(r_1)) - g^{-1}\Big(\frac{g(r_1)}{3}\Big) > 1 - g^{-1}(3g(r_1)), \quad (10)$$

$r_1 \to 1-0$, $g(r_1) = \ln\frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1}$.

Функція $g(r_1) = \ln\frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1}$ є додатною зростаючою на $(1/2,1)$, і $\lim\limits_{r_1\to 1-0} g(r_1) = +\infty$. Тоді існує зростаюча обернена до g функція $g^{-1}\colon \mathbb{R}_+ \to (1/2,1)$.

Для фіксованого r розглянемо функцію $l(x) = \sqrt{x} - x\ln\frac{1}{r_1}$. $x_{\max} = \frac{1}{4\ln^2\frac{1}{r_1}}$ — єдина точка максимуму цієї функції. $l_{\max} = \frac{1}{4\ln\frac{1}{r_1}}$. Тоді

$$g(r_1) = \ln\frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1} \sim \ln\mu_{f_0}(r_1) \sim \frac{1}{4\ln\frac{1}{r_1}} \sim$$

$$\sim \frac{1}{4(1-r_1)},\ r_1 \to 1-0.$$

З останнього співвідношення випливає, що $g(r_1) < 3g(2r_1-1)$, $r_1 \to 1-0$. Отже,

$$g(2r_1-1) > \frac{g(r_1)}{3},\ 2r_1 - 1 > g^{-1}\Big(\frac{g(r_1)}{3}\Big),$$

$$r_1 - g^{-1}\Big(\frac{g(r_1)}{3}\Big) > 1 - r_1$$

і використовуючи $g^{-1}(3g(r_1)) > g^{-1}(g(r_1)) = r_1$, одержимо при $r_1 \to 1-0$

$$g^{-1}(3g(r_1)) - g^{-1}\Big(\frac{g(r_1)}{3}\Big) >$$

$$> r_1 - g^{-1}\Big(\frac{g(r_1)}{3}\Big) >$$

$$> 1 - r_1 > 1 - g^{-1}(3g(r_1)).$$

Нерівність (10) доведена.

З (6) отримаємо, що існують стала $C_1 \in (0,1)$ і $r^* \in (1/2,1)$ такі, що для кожного $i \in \{1,2\}$ і всіх $z \in \{z\colon r^* < |z_j| < 1,\ j \in \{1,2\}\}$ виконуються нерівності

$$M_{f_0}(r_i) \geq C_1\frac{\mu_{f_0}(r_i)}{1-r_i}\sqrt{\ln\frac{\mu_{f_0}(r_i)}{1-r_i}},$$

$$g^{-1}\Big(\frac{g(r^*)}{3}\Big) > r^0. \quad (11)$$

Отже, для всіх $z \in \{z\colon r^* < |z_j| < 1,\ j \in \{1,2\}\}$ маємо

$$\prod_{i=1}^{2} M_{f_0}(r_i) \geq \prod_{i=1}^{2}\left(C_1\frac{\mu_{f_0}(r_i)}{1-r_i}\sqrt{\ln\frac{\mu_{f_0}(r_i)}{1-r_i}}\right),$$

$$M_f(r) \geq C_1^2\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}\times$$

$$\times\left(\ln\frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1}\ln\frac{\mu_{f_0}(r_2)}{1-r_2}\right)^{1/2}. \quad (12)$$

Для $r_1 \in (r^*, 1)$ визначимо

$$x = x(r_1) = g^{-1}\Big(\frac{g(r_1)}{3}\Big),$$
$$y = y(r_1) = g^{-1}(3g(r_1)).$$

Позначимо $E^* = \{r \in [0,1)^2\colon r_1 \in (r^*, 1),\ r_2 \in (x, y)\}$. Зафіксуємо $r_1 \in (r^*, 1)$. Тоді x і y є також фіксованими і $g(x) = g(r_1)/3$, $g(y) = 3g(r_1)$, $g(y) = 9g(x)$, $r_2 \in (x, y)$. Оскільки $r_1 > x$, то для всіх $r \in E^*$ отримаємо

$$g(r_1)g(r_2) \geq g^2(x) = \frac{g^2(y)}{81} =$$
$$= \frac{1}{324}(g(y) + g(y))^2 \geq \frac{1}{324}(g(r_1) + g(r_2))^2.$$

Тоді з нерівності (6) отримаємо для всіх $r \in E^*$

$$M_f(r) \geq \frac{C_1^2}{324}\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}\times$$
$$\times\left(\ln\frac{\mu_{f_0}(r_1)}{1-r_1} + \ln\frac{\mu_{f_0}(r_2)}{1-r_2}\right) =$$
$$= \frac{C_1^2}{324}\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}\ln\frac{\mu_f(r)}{(1-r_1)(1-r_2)}.$$

Доведемо, що множина E^* є множиною асимптотично нескінченної логарифмічної міри. Оскільки $g^{-1}\Big(\frac{g(r^*)}{3}\Big) > r^0$, то $E^* \cap \triangle_{r^0} = E^*$. Використавши нерівність (10) отримаємо

$$\nu_{\ln}(E^* \cap \triangle_{r^0}) = \nu_{\ln}(E^*) =$$
$$= \iint\limits_{E^*}\frac{dr_1 dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)} =$$
$$= \int\limits_{r^*}^{1}\int\limits_{x}^{y}\frac{dr_1 dr_2}{(1-r_1)(1-r_2)} =$$
$$= \int\limits_{r^*}^{1}\left(\ln\frac{1}{1-y} - \ln\frac{1}{1-x}\right)\frac{dr_1}{1-r_1} =$$
$$= \int\limits_{r^*}^{1}\left(\ln\frac{1}{1-g^{-1}(3g(r_1))} - \right.$$
$$\left. - \ln\frac{1}{1-g^{-1}(\frac{g(r_1)}{3})}\right)\frac{dr_1}{1-r_1} =$$
$$= \int\limits_{r^*}^{1}\ln\frac{1-g^{-1}(\frac{g(r_1)}{3})}{1-g^{-1}(3g(r_1))}\frac{dr_1}{1-r_1} =$$
$$= \int\limits_{r^*}^{1}\ln\Big(1 + \frac{g^{-1}(3g(r_1)) - g^{-1}(\frac{g(r_1)}{3})}{1-g^{-1}(3g(r_1))}\Big)\times$$
$$\times\frac{dr_1}{1-r_1} > \int\limits_{r^*}^{1}\ln 2\cdot\frac{dr_1}{1-r_1} = +\infty.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Valiron G.* Sur les fonctions entieres d'ordre fini et d'ordre null et en particulier les fonctions a correspondance reguliere // Ann Fac. Sci. Univ. Toulouse. – 1914. – **5**. – P.117–257.
2. *Wiman A.* Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Function und dem grössten Gliebe der zugehörigen Taylorischen Reiche // Acta Math. – 1914. – **37**. – P.305–326.
3. *Valiron G.* Fonctions analytiques. – Paris: Press. Univer. de France, 1954.
4. *Wittich H.* Neuere Untersuchungen über eindeutige analytische Funktionen. – Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag, 1955.
5. *Kővari T.* On the maximum modulus and maximal term of functions analytic in the unit disc // J. London Math. Soc. – 1966. – **41**. – P.129–137.
6. *Сулейманов Н.В.* Оценка типу Вимана–Валирона для степенних рядов с конечным радиусом сходимости и их точность // ДАН СССР. – 1980. – **253**, №4. – С.822–824.
7. *Куриляк А.О., Скасків О.Б.* Нерівність типу Вімана для аналітичних в крузі функцій і категорії Бера // Науковий вісник Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича. Серія: математика. - **1**, №4. - Чернівці: Чернівецький національний університет, 2011. – С.73–79.
8. *Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Chyzhykov I.E.* Baire categories and Wiman's inequality for analytic functions // Bull. Soc. Sc. et des letters de Lodz. – 2012. – **62**, №3. – P.17–33.
9. *Овчар І.Є., Скасків О.Б.* Один аналог нерівності Вімана для інтегралів Лапласа, залежних від малого параметра // Карпатські мат. публ. – 2013. – **5**, №2. – С.305–309.
10. *Kuryliak A.O., Shapovalovska L.O., Skaskiv O.B.* Wiman's type inequality for some double power series // Mat. Stud. – 2013. – **39**, №2. – P.134–141.

11. *Gopala Krishna J., Nagaraja Rao I.H.* Generalized inverse and probability techniques and some fundamental growth theorems in $\mathbb{C}^k$ // J. Indian Math. Soc. – 1977. – **41**. – P.203–219.