УДК 517.95

©2015 р. **Н.Є. Кінаш**

Львівський національний університет імені Івана Франка

# ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З НЕЛОКАЛЬНОЮ УМОВОЮ ПЕРЕВИЗНАЧЕННЯ

Досліджено обернену задачу визначення залежного від часу старшого коефіцієнта одновимірного параболічного рівняння із нелокальною умовою перевизначення. Встановлено умови існування та єдиності класичного розв'язку цієї задачі.

An inverse problem for a one-dimensional parabolic equation with unknown time-dependent leading coefficient with a nonlocal overdetermination condition is investigated. The existence and uniqueness conditions of the classical solution to the problem are obtained.

Теорія обернених задач набула значного поширення завдяки їх застосуванню у фізиці, біології, економіці, при моделюванні прикладних процесів та ін. Крайові задачі із нелокальними умовами описують такі явища, як дифузія частинок у турбулентній плазмі, процеси вологопереносу в капілярнопористих середовищах та ін. Зокрема, нелокальні умови, наведені у даній задачі, виникають у математичній моделі охолодження неоднорідного зігнутого стержня [1].

У працях [2]-[5] розглянуто обернені задачі із нелокальними умовами. Обернена задача для параболічного рівняння з умовами Неймана та нелокальною крайовою умовою була досліджена Березницькою І.Б. [6]. У даній роботі встановлено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі для параболічного рівняння з умовами Діріхле та нелокальною крайовою умовою.

**1. Формулювання задачі та припущення на вихідні дані.** В області $Q_T := \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ розглядаємо обернену задачу визначення пари невідомих функцій $(a(t), u(x,t))$ для параболічного рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t),\quad (x,t) \in Q_T \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T] \tag{3}$$

та нелокальною умовою перевизначення

$$\nu_1(t)u_x(0,t)+\nu_2(t)u_x(h,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Надалі часто використовується функція Гріна, тож наведемо її зображення:

$$G_k(x,t,\xi,\tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}\times$$
$$\times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{[\frac{k-1}{2}]n} \left(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right) + \right.$$
$$\left. +(-1)^k \exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\right),$$
$$\theta(t) = \int_0^t a(\tau)d\tau, \quad k = \overline{1,4}. \tag{5}$$

Коефіцієнт $k = 1$ відповідає крайовим умовам першого роду, $k = 2$ – другого роду, $k = 3$ – умовам вигляду $u(0,t) = \mu_1(t), \quad u_x(h,t) = \mu_4(t), t \in [0,T]$, $k = 4$ – умовам вигляду $u_x(0,t) = \mu_2(t), \quad u(h,t) = \mu_3(t), t \in [0,T]$.

Припустимо, що виконуються умови :

**(A1)** $b, c, f \in C^{1,0}(\overline{Q_T}), \quad \varphi \in C^{2+\alpha}([0,h])$, $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \nu_1, \nu_2 \in C^1([0,T])$;

**(A2)** $\varphi''(x) > 0$, $x \in [0,h]$, $\nu_1(t) < 0$, $\nu_2(t) > 0$, $\nu_1(t) + \nu_2(t) > 0$,
$\mu_3(t) - \dfrac{\nu_1(t)+\nu_2(t)}{h}(\mu_2(t)-\mu_1(t)) > 0,$

$b(0,t) \geqslant 0$, $\mu_1'(t) - c(0,t)\mu_1(t) -$ $f(0,t) - \dfrac{b(0,t)\mu_3(t)}{\nu_2(t)+\nu_1(t)} > 0$, $b(h,t) \geqslant 0$, $\mu_2'(t) - c(h,t)\mu_2(t) - f(h,t) - \dfrac{b(h,t)\mu_3(t)}{\nu_2(t)+\nu_1(t)} > 0$, $t \in [0,T]$;

**(A3)** $\varphi(0) = \mu_1(0)$, $\varphi(h) = \mu_2(0)$, $\nu_1(0)\varphi'(0) + \nu_2(0)\varphi'(h) = \mu_3(0)$.

**2. Оцінка функцій** $u(x,t), u_x(x,t)$**.** Оскільки $u(x,t)$ є розв'язком першої крайової задачі для параболічного рівняння, то за принципом максимуму ([7], с. 22) існує така стала $M_0$, яка визначається з вихідних даних задачі (1)-(4), що виконується нерівність:

$$|u(x,t)| \leqslant M_0, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T. \tag{6}$$

Інтегруючи частинами, з умови перевизначення (4) отримуємо рівність :

$$\int_0^h u_{xx}(x,t)\left(\frac{\nu_1(t)+\nu_2(t)}{h}x - \nu_1(t)\right)dx = \\ = \mu_3(t) - \frac{\nu_1(t)+\nu_2(t)}{h}(\mu_2(t)-\mu_1(t)), \\ t \in [0,T]. \tag{7}$$

Припустимо, що

$$u_{xx}(x,t) \geqslant 0 \quad (x,t) \in Q_T. \tag{8}$$

Враховуючи (8), із (7) оцінюємо $\int_0^h u_{xx}(x,t)dx$ за теоремою про середнє:

$$\frac{1}{\nu_2(t)}\left(\mu_3(t) - \frac{\nu_1(t)+\nu_2(t)}{h}(\mu_2(t)-\mu_1(t))\right) \leqslant \\ \leqslant \int_0^h u_{xx}(x,t)dx \leqslant \frac{1}{-\nu_1(t)}\left(\mu_3(t) - \frac{1}{h}(\nu_1(t)+\right. \\ \left. + \nu_2(t))(\mu_2(t)-\mu_1(t))\right), \quad t \in [0,T]. \tag{9}$$

Оскільки $u_x(x,t) = u_x(0,t) + \int_0^x u_{xx}(s,t)ds$ та $u_x(x,t) = u_x(h,t) - \int_x^h u_{xx}(s,t)ds$, із (4) отримуємо

$$u_x(x,t) = [\nu_2(t)+\nu_1(t)]^{-1}\left(\mu_3(t) + \nu_1(t)\times\right. \\ \left. \times \int_0^x u_{xx}(s,t)ds - \nu_2(t)\int_x^h u_{xx}(s,t)\right). \tag{10}$$

Враховуючи невід'ємність $u_{xx}(x,t)$ та оцінку $\int_0^h u_{xx}(x,t)dx$, із (10) знаходимо:

$$|u_x(x,t)| \leqslant \frac{1}{\nu_2(t)+\nu_1(t)}\left(|\mu_3(t)| + (\nu_2(t) -\right. \\ \left. - \nu_1(t))\int_0^h u_{xx}(x,t)dx\right) \leqslant M_1, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T. \tag{11}$$

Переконаємось, що умова (A2) забезпечує виконання нерівностей

$$\mu_1'(t) - b(0,t)u_x(0,t) - c(0,t)\mu_1(t) - f(0,t) > 0, \\ \mu_2'(t) - b(h,t)u_x(h,t) - c(h,t)\mu_2(t) - f(h,t) > 0, \\ t \in [0,T]. \tag{12}$$

Доводимо першу нерівність із (12), застосовуючи (10) та припущення (8):

$$\mu_1'(t) - b(0,t)u_x(0,t) - c(0,t)\mu_1(t) - f(0,t) = \\ = \mu_1'(t) - c(0,t)\mu_1(t) - f(0,t) + \left(-\mu_3(t) +\right. \\ \left. + \nu_2(t)\int_0^h u_{xx}(s,t)ds\right)\frac{b(0,t)}{\nu_2(t)+\nu_1(t)} \geqslant \\ \geqslant \mu_1'(t) - c(0,t)\mu_1(t) - f(0,t) - \mu_3(t)\times \\ \times \frac{b(0,t)}{\nu_2(t)+\nu_1(t)} \geqslant M_2. > 0$$

Друга нерівність доводиться аналогічно.

**3. Зведення задачі** (1)–(4) **до еквівалентної системи рівнянь.** Подамо функцію $u(x,t)$ у вигляді:

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t) + \varphi(x) + \frac{h-x}{h}(\mu_1(t) - \\ - \mu_1(0)) + \frac{x}{h}(\mu_2(t) - \mu_2(0)), \quad (x,t) \in Q_T. \tag{13}$$

Введемо позначення

$$\tilde{f}(x,t) := b(x,t)\Big(\varphi'(x) + \frac{1}{h}(\mu_2(t) - \mu_2(0)- - \mu_1(t) + \mu_1(0))\Big) + c(x,t)\Big(\varphi(x) + \frac{h-x}{h}\times \times(\mu_1(t) - \mu_1(0)) + \frac{x}{h}(\mu_2(t) - \mu_2(0))\Big) + + f(x,t) - \left(\frac{h-x}{h}\mu_1'(t) + \frac{x}{h}\mu_2'(t)\right), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{14}$$

$$\tilde{\mu}_3(t) := \mu_3(t) - \nu_1(t)\varphi'(0) - \nu_2(t)\varphi'(h) - \frac{1}{h}\times \times(\nu_1(t) + \nu_2(t))(\mu_2(t) - \mu_2(0) - \mu_1(t)+ + \mu_1(0)), \quad t \in [0,T]. \tag{15}$$

Зауважимо, що при такій заміні виконується рівність

$$b(x,t)\tilde{u}_x + c(x,t)\tilde{u} + \tilde{f}(x,t) = b(x,t)u_x+ + c(x,t)u + f(x,t) - \frac{(h-x)\mu_1'(t) + x\mu_2'(t)}{h}, \tag{16}$$

а пара функцій $(a(t), \tilde{u}(x,t))$ є розв'язком задачі

$$\tilde{u}_t = a(t)\tilde{u}_{xx} + b(x,t)\tilde{u}_x + c(x,t)\tilde{u} + \tilde{f}(x,t)+ + a(t)\varphi''(x), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{17}$$

$$\tilde{u}(x,0) = 0, \quad x \in [0,h], \tag{18}$$

$$\tilde{u}(0,t) = 0, \quad \tilde{u}(h,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{19}$$

$$\nu_1(t)\tilde{u}_x(0,t) + \nu_2(t)\tilde{u}_x(h,t) = \tilde{\mu}_3(t), \quad t \in [0,T]. \tag{20}$$

Позначимо

$$v(x,t) := \tilde{u}_x(x,t), \quad w(x,t) := \tilde{u}_{xx}(x,t), \quad (x,t) \in \overline{Q}_T. \tag{21}$$

Задача (17)–(19) еквівалентна рівнянню

$$\tilde{u}(x,t) = \int_0^t \int_0^h G_1(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)v(\xi,\tau)+ + c(\xi,\tau)\tilde{u}(\xi,\tau) + \tilde{f}(\xi,\tau) + a(\tau)\varphi''(\xi))d\xi d\tau. \tag{22}$$

Продиференціюємо (22) по $x$:

$$v(x,t) = \int_0^t \int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)v(\xi,\tau)+ + c(\xi,\tau)\tilde{u}(\xi,\tau) + \tilde{f}(\xi,\tau) + a(\tau)\varphi''(\xi))d\xi d\tau. \tag{23}$$

Аналогічно, з врахуванням інтегрування частинами, маємо:

$$w(x,t) = \int_0^h G_1(x,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi - \varphi''(x)+ + \int_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)(-b(0,\tau)v(0,\tau)- - \tilde{f}(0,\tau))d\tau - \int_0^t G_{1\xi}(x,t,h,\tau)(-b(h,\tau)\times \times v(h,\tau) - \tilde{f}(h,\tau))d\tau + \int_0^t \int_0^h G_{2x}(x,t,\xi,\tau)\times \times(b(\xi,\tau)w(\xi,\tau) + (b_\xi(\xi,\tau) + c(\xi,\tau))v(\xi,\tau)+ + c_\xi(\xi,\tau)\tilde{u}(\xi,\tau) + \tilde{f}_\xi(\xi,\tau))d\xi d\tau. \tag{24}$$

Із леми 2.1.2 [8] відомо

$$\int_\tau^t a(\sigma)G_4(0,t,0,\sigma)G_{1\xi}(0,\sigma,\xi,\tau)d\sigma = = G_4(0,t,0,\tau).$$

Враховуючи цю формулу та властивості теплового об'ємного потенціалу, для функції $g \in C^{\alpha,0}(\overline{Q}_T)$ обчислимо

$$\frac{d}{dt}\Bigg(\int_0^t a(\sigma)G_4(0,t,0,\sigma)\nu_1(\sigma)d\sigma\times \times \int_0^\sigma \int_0^h G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)g(\xi,\tau)d\xi d\tau\Bigg) = = \frac{d}{dt}\Bigg(\int_0^t \int_\tau^t \int_0^h (\nu_1(\sigma) - \nu_1(t))G_4(0,t,0,\sigma)\times \times G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)g(\xi,\tau)a(\sigma)d\xi d\sigma d\tau\Bigg) + \nu_1'(t)\times$$

$$\times \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_4(0,t,\xi,\tau)g(\xi,\tau)d\xi d\tau + \nu_1(t)\times$$

$$\times \frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t \int\limits_0^h G_4(0,t,\xi,\tau)g(\xi,\tau)d\xi d\tau\right)=$$

$$= -\nu_1'(t)\int\limits_0^t \int\limits_0^h G_4(0,t,\xi,\tau)g(\xi,\tau)d\xi d\tau-$$

$$- a(t)\int\limits_0^t \int\limits_\tau^t \int\limits_0^h (\nu_1(\sigma)-\nu_1(t))G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)\times$$

$$\times G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)g(\xi,\tau)d\xi d\sigma d\tau + \nu_1(t)g(0,t)+$$

$$+ \nu_1(t)\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^h G_{4t}(0,t,\xi,\tau)g(\xi,\tau)d\xi+$$

$$+ \nu_1'(t)\int\limits_0^t \int\limits_0^h G_4(0,t,\xi,\tau)g(\xi,\tau)d\xi d\tau =$$

$$= a(t)\int\limits_0^t \int\limits_\tau^t \int\limits_0^h (\nu_1(t)-\nu_1(\sigma))G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)\times$$

$$\times G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)g(\xi,\tau)d\xi d\sigma d\tau + \nu_1(t)g(0,t)+$$

$$+ \nu_1(t)a(t)\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^h G_{4xx}(0,t,\xi,\tau)g(\xi,\tau)d\xi. \tag{25}$$

Порахуємо (25) для $g(x,t)=a(t)\varphi''(x)$.

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t a(\sigma)G_4(0,t,0,\sigma)\nu_1(\sigma)d\sigma\times\right.$$

$$\left.\times \int\limits_0^\sigma \int\limits_0^h G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)a(\tau)\varphi''(\xi)d\xi d\tau\right)=$$

$$= \nu_1(t)a(t)\int\limits_0^h G_4(0,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi + a(t)\times$$

$$\times \int\limits_0^t \int\limits_\tau^t \int\limits_0^h (\nu_1(t)-\nu_1(\sigma))G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)\times$$

$$\times G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)a(\tau)\varphi''(\xi)d\xi d\sigma d\tau. \tag{26}$$

Якщо ж $g(x,t)\in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, то застосовуючи до (25) інтегрування частинами, отримаємо

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t a(\sigma)G_4(0,t,0,\sigma)\nu_1(\sigma)d\sigma\times\right.$$

$$\left.\times \int\limits_0^\sigma \int\limits_0^h G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)g(\xi,\tau)d\xi d\tau\right)= a(t)\times$$

$$\times \int\limits_0^t \int\limits_\tau^t \int\limits_0^h (\nu_1(t)-\nu_1(\sigma))G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)\times$$

$$\times G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)g(\xi,\tau)d\xi d\sigma d\tau + \nu_1(t)g(0,t)+$$

$$+ \nu_1(t)a(t)\int\limits_0^t G_{4\xi}(0,t,h,\tau)g(h,\tau)d\tau - \nu_1(t)\times$$

$$\times a(t)\int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{4\xi}(0,t,\xi,\tau)g_\xi(\xi,\tau)d\xi. \tag{27}$$

Щоб отримати рівняння стосовно $a(t)$, підставляємо (23) у (20). Заміняємо $t$ на $\sigma$, домножуємо цю рівність на $a(\sigma)G_4(0,t,0,\sigma)$, інтегруємо від 0 до $t$ за $\sigma$ та диференціюємо отриману рівність по $t$. Враховуючи вигляд $v(0,t)$ і $v(h,t)$ та застосовуючи (25), отримуємо рівняння стосовно $a(t)$:

$$a(t) = [-\nu_2(t)(b(h,t)v(h,t)+\tilde f(h,t))+$$

$$+ \nu_1(t)(b(0,t)v(0,t)+\tilde f(0,t))]\times$$

$$\times \left[\int\limits_0^t G_4(0,t,0,\sigma)\tilde\mu_3'(\sigma)d\sigma-\right.$$

$$- \nu_1(t)\int\limits_0^h G_4(0,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi+$$

$$+ \nu_2(t)\int\limits_0^h G_3(h,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi-$$

$$- \nu_1(t)\int\limits_0^t G_{4\xi}(0,t,h,\tau)(b(h,\tau)v(h,\tau)+$$

$$+ \tilde f(h,\tau))d\tau + \nu_1(t)\int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{4\xi}(0,t,\xi,\tau)\times$$

$$\times (b(\xi,\tau)w(\xi,\tau) + (b_x(\xi,\tau)+c(\xi,\tau))\times$$

$$\times v(\xi,\tau)+c_x(\xi,\tau)\tilde{u}(\xi,\tau)+\tilde{f}(\xi,\tau))d\xi d\tau-$$
$$-\nu_2(t)\int\limits_0^t G_{3\xi}(h,t,0,\tau)(b(0,\tau)v(0,\tau)+$$
$$+\tilde{f}(0,\tau))d\tau-\nu_2(t)\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{3\xi}(h,t,\xi,\tau)\times$$
$$\times(b(\xi,\tau)w(\xi,\tau)+v(\xi,\tau)(b_x(\xi,\tau)+$$
$$+c(\xi,\tau))+c_x(\xi,\tau)\tilde{u}(\xi,\tau)+\tilde{f}(\xi,\tau))d\xi d\tau-$$
$$-\int\limits_0^t\int\limits_\tau^t\int\limits_0^h G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)\big((\nu_1(t)-\nu_1(\sigma))\times$$
$$\times G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)+(\nu_2(t)-\nu_2(\sigma))\times$$
$$\times G_{1x}(h,\sigma,\xi,\tau)\big)(a(\tau)\varphi''(\xi)+b(\xi,\tau)v(\xi,\tau)+$$
$$\left.+c(\xi,\tau)\tilde{u}(\xi,\tau)+\tilde{f}(\xi,\tau))d\xi d\sigma d\tau\right]^{-1},$$
$$t\in[0,T]. \tag{28}$$

Із (21) та способу отримання системи (22), (23), (24), (28) бачимо, що вона еквівалентна задачі (17) – (20).

**4. Існування розв'язку задачі (17)-(20)**.

**Теорема 1.** *Нехай виконуються умови* **(A1)-(A3)**. *Тоді задача (17)-(20) має принаймні один розв'язок* $(a,\tilde{u})\in C([0,t^*])\times C^{2,1}(\overline{Q}_{t^*})$, *де* $t^*\in(0,T]$ *визначається з вихідних даних.*

*Доведення.* Щоб довести існування розв'язку задачі (17)–(20), за допомогою теореми Шаудера доведемо існування розв'язку системи рівнянь (22), (23), (24), (28). Для цього встановлюємо апріорні оцінки функцій $a(t),\tilde{u}(x,t),v(x,t),w(x,t)$.

Оскільки заміна (13), що пов'язує $u$ та $\tilde{u}$, лінійна, то, враховуючи обмеженість вихідних даних та нерівності (6), (11), отримуємо $|\tilde{u}(x,t)|\leqslant M_3,\quad |v(x,t)|\leqslant M_4,\quad (x,t)\in\overline{Q}_T$.

Використовуючи (13), (14) та (12), переконуємось, що виконується співвідношення:

$$-b(0,t)\tilde{v}(0,t)-\tilde{f}(0,t)=\mu_1'(t)-b(0,t)\times$$
$$\times u_x(0,t)-c(0,t)\mu_1(t)-f(0,t)\geqslant M_2>0,$$
$$-b(h,\tau)\tilde{v}(h,t)-\tilde{f}(h,t)=\mu_2'(t)-b(h,t)\times$$
$$\times u_x(h,t)-c(h,t)\mu_2(t)-f(h,t)\geqslant M_2>0,$$
$$t\in[0,T]. \tag{29}$$

Оцінюємо чисельник $R(t)$ виразу $a(t)$ з (28), враховуючи (A2):

$$0<C_1\leqslant R(t)\leqslant C_2,\quad t\in[0,T].$$

Тепер проведемо оцінку $a(t)$ зверху. Покажемо, що знаменник виразу $a(t)$ більший за додатну сталу. Для цього оцінимо вираз

$$-\nu_1(t)\int\limits_0^h G_4(0,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi+\nu_2(t)\times$$
$$\times\int\limits_0^h G_3(h,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi\geqslant\min_{[0,h]}\varphi''(x)\times$$
$$\times\min_{[0,T]}\{-\nu_1(t),\nu_2(t)\}\left(\int\limits_0^h G_3(h,t,\xi,0)d\xi+\right.$$
$$\left.+\int\limits_0^h G_4(0,t,\xi,0)d\xi\right).$$

Функція $u(x,t)\equiv 1$ є розв'язком крайової задачі:

$$u_t=a(t)u_{xx},\quad (x,t)\in Q_T,$$
$$u(x,0)=1,\quad x\in[0,h],$$
$$u(0,t)=1,\quad u_x(h,t)=0,\quad t\in[0,T].$$

Із єдиності розв'язку цієї задачі отримуємо

$$1=\int\limits_0^h G_3(x,t,\xi,0)d\xi+\int\limits_0^t G_{3\xi}(x,t,0,\tau)a(\tau)d\tau.$$

Аналогічні міркування застосовуємо до $\int\limits_0^h G_4(x,t,\xi,0)d\xi$ і отримуємо:

$$\int\limits_0^h(G_3(h,t,\xi,0)+G_4(0,t,\xi,0))d\xi=2-$$
$$-\int\limits_0^t G_{3\xi}(h,t,0,\tau)a(\tau)d\tau+$$
$$+\int\limits_0^t G_{4\xi}(0,t,h,\tau)a(\tau)d\tau.$$

Використаємо це, щоб продовжити оцінку інтеграла:

$$-\nu_1(t)\int_0^h G_4(0,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi+\nu_2(t)\times$$
$$\times\int_0^h G_3(h,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi\geqslant C_3\Big(2-\int_0^t a(\tau)\times$$
$$\times G_{3\xi}(h,t,0,\tau)d\tau+\int_0^t a(\tau)G_{4\xi}(0,t,h,\tau)d\tau\Big).$$

Усі інші доданки у знаменнику виразу $a(t)$ є інтегралами від 0 до $t$ і прямують до нуля при $t\to 0$ за властивостями інтегралів від функції Гріна. Отже, на деякому звуженому проміжку $[0,t_1]$ їх сума не перевищуватиме 1, тому знаменник виразу $a(t)$ буде не менший, ніж $C_3$. В результаті оцінка $a(t)$ матиме вигляд:

$$a(t)\leqslant C_2/C_3:=A_1,\quad t\in[0,t_1]. \tag{30}$$

Забезпечимо виконання припущення (8). Враховуючи заміну (13), $u_{xx}(x,t)=\varphi''(x)+\tilde{u}_{xx}(x,t)$, тому

$$u_{xx}(x,t)=\varphi''(x)+\int_0^t d\tau\int_0^h G_{1xx}(x,t,\xi,\tau)\times$$
$$\times(b(\xi,\tau)v(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)\tilde{u}(\xi,\tau)+\tilde{f}(\xi,\tau)+$$
$$+a(\tau)\varphi''(\xi))d\xi. \tag{31}$$

Оскільки $f\in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $b,c\in C^{1,0}(\overline{Q}_T),\varphi\in C^{2+\alpha}([0,h])$, то інтеграл у (31) є неперервною функцією за теоремою 4, с.21 із [9] і прямує до нуля при $t\to 0$. Тоді існує $t_2\in[0,T]$, що виконується

$$u_{xx}(x,t)\geqslant\frac{\min\limits_{x\in[0,h]}\varphi''(x)}{2}=C_4>0,$$
$$(x,t)\in Q_{t_2}.$$

Введемо функцію $a_{min}(t):=\min\limits_{\tau\in[0,t]}a(\tau)$, $t\in[0,T]$ та встановимо оцінку зверху $w(x,t)$ із рівняння (24), враховуючи обмеженість вихідних даних та вже встановлені оцінки:

$$w(x,t)\leqslant C_5+\frac{C_6}{a_{min}(t)}\int_0^t G_{1\xi}(x,t,0,\tau)\times$$
$$\times a(\tau)d\tau-\frac{C_7}{a_{min}(t)}\int_0^t a(\tau)G_{1\xi}(x,t,h,\tau)d\tau+$$
$$+\int_0^t\int_0^h|G_{1\xi}(x,t,\xi,\tau)|(|b(\xi,\tau)|w(\xi,\tau)+$$
$$+C_8)d\xi d\tau. \tag{32}$$

Враховуючи явний вигляд $G_{1\xi}(0,\sigma,\xi,\tau)$ та проводячи заміну $z=\frac{\xi+2nh}{2\sqrt{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}}$, отримаємо $\int_0^h|G_{1\xi}(x,t,\xi,\tau)|d\xi\leqslant\frac{C_9}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}$. Із властивостей функції Гріна першої крайової задачі маємо $\int_0^t a(\tau)G_{1\xi}(x,t,0,\tau)d\tau\leqslant 1$ та $-\int_0^t a(\tau)G_{1\xi}(x,t,h,\tau)d\tau\leqslant 1$. Вводимо позначення $W(t):=\max\limits_{x\in[0,h]}|w(x,t)|$ та застосовуємо оцінки $\tilde{u}(x,t)$, $v(x,t)$ і умови на вихідні дані, щоб отримати із (32) нерівність:

$$W(t)\leqslant C_5+\frac{C_{10}}{a_{min}(t)}+C_{11}\int_0^t\frac{W(\tau)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \tag{33}$$

Позначимо $r(t):=\int_0^t\frac{W(\tau)}{\sqrt{(\theta(t)-\theta(\tau))}}d\tau$ та застосуємо нерівність (33) саму до себе:

$$r(t)\leqslant C_5\int_0^t\frac{d\sigma}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}+C_{10}\times$$
$$\times\int_0^t\frac{d\sigma}{a_{min}(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}+C_{11}\times$$
$$\times\int_0^t\frac{d\sigma}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}\int_0^\sigma\frac{W(\tau)d\tau}{\sqrt{(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}}.$$

Змінюючи порядок інтегрування та враховуючи $\int\limits_{\tau}^{t} \frac{a(\sigma)d\sigma}{\sqrt{(\theta(t)-\theta(\sigma))(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}} = \pi$, отримуємо

$$r(t) \leqslant \frac{2\sqrt{t}C_5}{a_{\min}^{1/2}(t)} + \frac{2\sqrt{t}C_{10}}{a_{\min}^{3/2}(t)} + \frac{C_{11}\pi}{a_{\min}(t)} \int\limits_0^t W(\tau)d\tau. \tag{34}$$

Інтегруємо (33):

$$\int\limits_0^t W(\tau)d\tau \leqslant C_5 t + \frac{C_{10}t}{a_{min}(t)} + C_{11}\int\limits_0^t r(\tau)d\tau. \tag{35}$$

Підставляємо (35) у (34), враховуючи (30), та отримуємо наступну інтегральну нерівність стосовно $r(t)$:

$$r(t) \leqslant C_{12}\frac{t^{1/2}}{a_{\min}^{3/2}(t)} + \frac{C_{11}^2\pi}{a_{\min}(t)}\int\limits_0^t r(\tau)d\tau. \tag{36}$$

Застосовуємо до (36) лему 2.2.2 із [8], проводимо певні спрощення та отримуємо:

$$r(t) \leqslant C_{13}\frac{t^{1/2}}{a_{\min}^{2}(t)} + C_{14}\frac{t^2}{a_{\min}^{5/2}(t)}\exp\left(\frac{C_{11}^2\pi t}{a_{\min}(t)}\right). \tag{37}$$

Перейдемо до оцінки $a(t)$ знизу, для цього встановимо оцінку інтегралів, що знаходяться у знаменнику виразу (28). За [8] виконуються оцінки:

$$\left|\int\limits_0^t G_4(0,t,0,\sigma)\mu_3'(\sigma)d\sigma\right| \leqslant \frac{2\max\limits_{[0,T]}|\mu_3'(t)|t^{1/2}}{\sqrt{\pi a_{\min}(t)}},$$

$$-\nu_1(t)\int\limits_0^h G_4(0,t,\xi,0)\varphi''(\xi)d\xi \leqslant \max\limits_{[0,h]}\varphi''(x)\times$$
$$\times \max\limits_{[0,T]}(-\nu_1(t)),$$

$$\left|\nu_1(t)\int\limits_0^t G_{4\xi}(0,t,h,\tau)(b(h,\tau)v(h,\tau)+\right.$$
$$\left.+\tilde{f}(h,\tau))d\tau\right| \leqslant C_{15}t.$$

Застосуємо до наступного інтеграла теорему Лагранжа про середнє:

$$\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\tau^t |(\nu_1(\sigma)-\nu_1(t))G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)|d\sigma\times$$
$$\times\int\limits_0^h G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)d\xi \leqslant \max\limits_{[0,T]}|\nu_1'(t)|\int\limits_0^t d\tau\times$$
$$\times\int\limits_\tau^t (t-\sigma)a(\sigma)|G_{4xx}(0,t,0,\sigma)|d\sigma$$
$$\times\int\limits_0^h G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)d\xi.$$

Із вигляду $G_{4xx}(0,t,0,\sigma)$ маємо

$$|G_{4xx}(0,t,0,\sigma)| \leqslant \frac{C_{16}}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}\times$$
$$\times\left(1+\frac{1}{\theta(t)-\theta(\sigma)}\right).$$

Враховуючи отриману вище оцінку $\int\limits_0^h |G_{1\xi}(x,\sigma,\xi,\tau)|d\xi$, знаходимо

$$\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\tau^t |(\nu_1(t)-\nu_1(\sigma))G_{4\sigma}(0,t,0,\sigma)|d\sigma\times$$
$$\times\int\limits_0^h |G_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau)|d\xi \leqslant C_{17}\times$$
$$\times\int\limits_0^t d\tau\int\limits_\tau^t \frac{a(\sigma)(t-\sigma)}{\sqrt{(\theta(t)-\theta(\sigma))(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}}\times$$
$$\times\left(1+\frac{1}{a_{\min}(t)(t-\sigma)}\right)d\sigma \leqslant C_{18}\times$$
$$\times\left(t^2+\frac{t}{a_{\min}(t)}\right).$$

Нарешті, розглядаємо

$$\left|\nu_1(t)\int\limits_0^t\int\limits_0^h (b(\xi,\tau)w(\xi,\tau)+(b_\xi(\xi,\tau)+\right.$$
$$+c(\xi,\tau))v(\xi,\tau)+c_\xi(\xi,\tau)\tilde{u}(\xi,\tau)+\tilde{f}_\xi(\xi,\tau))\times$$

$$\times G_{4\xi}(0,t,\xi,\tau)d\xi d\tau\Bigg| \leqslant \int\limits_0^t \frac{(W(\tau)+1)d\tau}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}\times$$

$$\times C_{19} \leqslant C_{20}\left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{a_{\min}(t)}}+r(t)\right).$$

Інші доданки зі знаменника оцінюються аналогічно, тож отримуємо таку нерівність стосовно $a_{\min}(t)$:

$$a_{\min}(t) \geqslant C_{21}\left[1+C_{22}\frac{t^{1/2}}{a^2_{\min}(t)}+C_{23}\frac{t^2}{a^{5/2}_{\min}(t)}\times\right.$$

$$\left.\times \exp\left(\frac{C_{11}^2 t}{a_{\min}(t)}\right)\right]^{-1}.$$

Звідси випливає, що

$$a_{\min}(t) \geqslant \frac{1}{C_{21}}-\frac{C_{22}t^{1/2}}{C_{21}a_{\min}(t)}-\frac{C_{23}t^2}{C_{21}a^{3/2}_{\min}(t)}\times$$

$$\times \exp\left(\frac{C_{11}^2 t}{a_{\min}(t)}\right).$$

Тоді існує таке $t_3 \in [0,T]$, що $a_{\min}(t) \geqslant \frac{1}{2C_{21}} := A_0, \quad t\in[0,t_3]$.

Позначимо $t^* := \min\{t_1,t_2,t_3\}$. Маючи оцінку $a(t)$ знизу, із (33) та (37) отримуємо $W(t) \leqslant M_5$, а отже $|w(x,t)| \leqslant M_5, \quad (x,t)\in \overline{Q}_{t*}$. Отже, оцінки розв'язків системи рівнянь (22), (23), (24), (28) встановлено на деякому звуженому проміжку часу $[0,t^*]$. На множині

$$\mathcal{N} := \{(\tilde{u},v,w,a)\in (C(\overline{Q}_{t^*})^3\times C([0,t^*]) :$$
$$|\tilde{u}(x,t)|\leqslant M_3,\ |v(x,t)|\leqslant M_4,\ |w(x,t)|\leqslant M_5,$$
$$A_0\leqslant a(t)\leqslant A_1\}$$

розглянемо рівняння

$$\omega = P\omega, \tag{38}$$

в якому $\omega = (\tilde{u},v,w,a)$, а оператор $P=(P_1,P_2,P_3,P_4)$ визначається правими частинами (22)-(24), (28). З оцінок, що були встановлені в ході доведення теореми, випливає, що оператор $P$ переводить множину $\mathcal{N}$ у себе. Аналогічно до [8] встановлюємо, що $P$ цілком неперервний на $\mathcal{N}$. За теоремою Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора отримуємо існування неперервного розв'язку (38). Враховуючи зв'язок (21) між розв'язком системи (22), (23), (24), (28) та задачі (17) – (20), отримуємо існування розв'язку (17)-(20) , тобто пари функцій $(a(t),\tilde{u}(x,t))\in C([0,t^*])\times C^{2,1}(\overline{Q}_{t^*})$. Теорему доведено.

Зауважимо, що знак нерівності в умові $\nu_1(t)+\nu_2(t)>0$ можна змінити на протилежний. Зробивши належні припущення щодо інших величин, які входять до (A2), аналогічно можна довести відповідну теорему існування.

У випадку $\nu_1(t)+\nu_2(t)=0$ умова перевизначення (4) набуває вигляду $u_x(h,t)-u_x(0,t)=\mu_4(t), \quad t\in[0,T]$. Система рівнянь (22)-(24), (28) отримується аналогічно, з відповідними спрощеннями у рівнянні стосовно $a(t)$. У доведенні існуваня розв'язку оцінки розв'язків даної системи випливають із інтегральних нерівностей, що частково повторюють доведення теореми 1.

## 6. Єдиність розв'язку.

**Теорема 2.** *Якщо $b,c\in C^{\alpha,0}(\overline{Q}_T)$ і виконується умова*

$$\nu_2(t)\varphi''(h)-\nu_1(t)\varphi''(0)\neq 0, \quad t\in[0,T],$$

*то розв'язок (1)-(4) единий у класі $C([0,T_0])\times C^{2+\alpha,1}(\overline{Q}_{T_0})$, де $T_0\in(0,T]$ визначається з вихідних даних.*

*Доведення.* Припустимо, що існують дві пари функцій $(a_1(t),u_1(x,t))$ та $(a_2(t),u_2(x,t))$ – розв'язки (1)-(4). Введемо нові функції $\hat{a}(t)=a_1(t)-a_2(t)$ та $\hat{u}(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$. Тоді пара функцій $(\hat{a}(t),\hat{u}(x,t))$ є розв'язком задачі

$$\hat{u}_t = a_1(t)\hat{u}_{xx}+b(x,t)\hat{u}_x+c(x,t)\hat{u}+\hat{a}(t)u_{2xx},$$
$$(x,t)\in Q_T, \tag{39}$$

$$\hat{u}(x,0)=0, \quad x\in[0,h], \tag{40}$$

$$\hat{u}(0,t)=0, \quad \hat{u}(h,t)=0, \quad t\in[0,T], \tag{41}$$

$$\nu_1(t)\hat{u}_x(0,t)+\nu_2(t)\hat{u}_x(h,t)=0, \quad t\in[0,T]. \tag{42}$$

Позначимо $\hat{G}_k(x,t,\xi,\tau)$ функцію Гріна рівняння $\hat{u}_t=a_1(t)\hat{u}_{xx}$, що задовольняє відповідні крайові умови. Оскільки $a_1(t)$ – відома функція, $\hat{u}(x,t)$ є розв'язком задачі (39)-(41), то виконується рівність:

$$\hat{u}(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^h \hat{G}_1(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)\hat{v}(\xi,\tau)+$$

$$+ c(\xi,\tau)\hat{u}(\xi,\tau) + \hat{a}(\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau))d\xi d\tau, \quad (43)$$

де $\hat{v}(x,t) = \hat{u}_x(x,t)$. Диференціюємо (43) та отримуємо :

$$\hat{v}(x,t) = \int_0^t \int_0^h \hat{G}_{1x}(x,t,\xi,\tau)(b(\xi,\tau)\hat{v}(\xi,\tau)+$$
$$+ c(\xi,\tau)\hat{u}(\xi,\tau) + \hat{a}(\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau))d\xi d\tau. \quad (44)$$

Підставляємо (44) у (42) та застосовуємо (25), в результаті чого отримаємо:

$$\hat{a}(t) = \frac{1}{\nu_2(t)u_{2xx}(h,t) - \nu_1(t)u_{2xx}(0,t)}\times$$
$$\times \int_0^t d\tau \int_0^h (b(\xi,\tau)\hat{v}(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)\hat{u}(\xi,\tau)+$$
$$+ \hat{a}(\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau))\Big((b(0,t)+b(h,t))\nu_1(t)\times$$
$$\times \hat{G}_{1x}(0,t,\xi,\tau) + \nu_1(t)a_1(t)\hat{G}_{4xx}(0,t,\xi,\tau)-$$
$$-\nu_2(t)a_1(t)\hat{G}_{3xx}(h,t,\xi,\tau) + \int_\tau^t a_1(\sigma)\times$$
$$\times \hat{G}_{4t}(0,t,0,\sigma)\big((\nu_1(t)-\nu_1(\sigma))\times$$
$$\times \hat{G}_{1x}(0,\sigma,\xi,\tau) + (\nu_2(t)-\nu_2(\sigma))\times$$
$$\hat{G}_{1x}(h,\sigma,\xi,\tau))d\sigma\Big)d\xi. \quad (45)$$

Залишилось показати, що $\nu_2(t)u_{2xx}(h,t) - \nu_1(t)u_{2xx}(0,t) \neq 0$. Оскільки $(a_2,u_2)$ є розв'язком задачі (1)–(4), то, застосовуючи (13)-(16) до (31), отримаємо

$$u_{2xx}(x,t) = \varphi''(x) + \int_0^t d\tau \int_0^h G^*_{1xx}(x,t,\xi,\tau)\times$$
$$\times \Big(b(\xi,\tau)u_{2\xi}(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u_2(\xi,\tau) + f(\xi,\tau)-$$
$$-\frac{(h-\xi)\mu_1'(\tau)+\xi\mu_2'(\tau)}{h} + a_2(\tau)\varphi''(\xi)\Big)d\xi,$$

де $G^*_k(x,t,\xi,\tau)$ – функція Гріна рівняння $u^*_t = a_1(t)u^*_{xx}$, що задовольняє відповідні крайові умови.

Розглянемо різницю

$$\nu_2(t)u_{2xx}(h,t) - \nu_1(t)u_{2xx}(0,t) = \nu_2(t)\varphi''(h)-$$
$$-\nu_1(t)\varphi''(0) + \int_0^t d\tau \int_0^h (\nu_2(t)G^*_{1xx}(h,t,\xi,\tau)-$$
$$-\nu_1(t)G^*_{1xx}(0,t,\xi,\tau))\Big(b(\xi,\tau)u_{2x}(\xi,\tau)+$$
$$+ c(\xi,\tau)u_2(\xi,\tau) + f(\xi,\tau) - \frac{(h-\xi)\mu_1'(\tau)}{h}-$$
$$-\frac{\xi\mu_2'(\tau)}{h} + a_2(\tau)\varphi''(\xi)\Big)d\xi.$$

Подвійний інтеграл у даній рівності є неперервною функцією за теоремою 4, с.21 із [9], оскільки $u_2 \in C^{2+\alpha,1}(\overline{Q}_T)$, $b,c \in C^{\alpha,0}(\overline{Q}_T)$, та прямує до нуля при $t \to 0$.

З умов теореми $\nu_2(t)\varphi''(h) - \nu_1(t)\varphi''(0) \neq 0$. Нехай, наприклад, $\nu_2(t)\varphi''(h) - \nu_1(t)\varphi''(0) > 0$. Тоді існує таке $T_0 \in [0,T]$, що

$$\nu_2(t)u_{2xx}(h,t) - \nu_1(t)u_{2xx}(0,t) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\nu_2(t)\varphi''(h) - \nu_1(t)\varphi''(0)}{2} > 0, \quad (x,t) \in Q_{T_0}.$$

Таким чином отримуємо додатність знаменника (45).

Отримали систему інтегральних рівнянь Вольтерра II роду (43)-(45). Оскільки $u_2 \in C^{2+\alpha,1}(\overline{Q}_T)$, $b,c \in C^{\alpha,0}(\overline{Q}_T)$, то $b(x,t)\hat{v}(x,t) + c(x,t)\hat{u}(x,t) + \hat{a}(t)u_{2xx}(x,t)$ задовольняє умову Гельдера по $x$. Тоді за теоремою 4, с.21 із [9] ядра системи (43)-(45) інтегровні, тому із властивостей інтегральних рівнянь Вольтерра II роду, (43)-(45) має єдиний розв'язок $\hat{u}(x,t) = 0, \hat{v}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \overline{Q}_{T_0}, \quad \hat{a}(t) = 0, \quad t \in [0,T_0]$. Звідси випливає, що розв'язок (1)-(4) єдиний у класі $C([0,T_0]) \times C^{2+\alpha,1}(\overline{Q}_{T_0})$.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. М.: Высш.шк. – 1995. – 301 с.

2. *Іванчов М.І.* Обернені задачі теплопровідності з нелокальними умовами: Препринт. - К.: ІСДО, – 1995. – 84 с.

3. *Ismailov M.I., Kanca F.* An inverse coefficient problem for a parabolic equation in the case of nonlocal boundary and overdetermination conditions// Math. Meth. Apl. Sci. – 2011. – **34**. – P. 692–702.

4. *Lesnic D., Yousefi S.A., Ivanchov M.* Determination of a time-dependent diffusivity from nonlocal

conditions // J. Appl. Math. Comput. – 2013. – **41**. – P. 301–320.

5. *Lukshin A.V. , Reznik B.I.* Unique solvability of the inverse problem for the heat equation with nonlocal boundary conditions. // Appl. Math. Inf. Sci. – 2007. – **18**, N1. – P. 29-41.

6. *Березницька І.Б.* Обернена задача для параболічного рівняння з нелокальною умовою перевизначення// Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, N1. – С. 54-62.

7. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука. – 1967. – 736 с.

8. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type //Math. Studies: Monograph Ser. – 2003. – **10**, N1. – 238 p.

9. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. М.: Мир, – 1967. – 428 с.

10. *Березницька І., Дребот А., Макар Ю.* Обернені задачі для рівняння теплопровідності з нелокальними та інтегральними умовами // Вісн. Львів ун-ту. Серія мех.-мат. – 1999. – **54**. – С. 27-37.

11. *Hryntsiv N.M.* Nonlocal inverse problems for a weakly degenerate parabolic equation // Вісн. нац. ун-ту "Львівська політехніка". Фіз.-мат. науки. – 2011. – **696**, N696. – С. 32-39.