УДК 517.9

©2015 р. Т.І.Вдовенко, М.Є.Дудкін

Національний Технічний Університет України "КПІ"

ХВИЛЬОВІ ОПЕРАТОРИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО НЕСИМЕТРИЧНОГО ЗБУРЕННЯ САМОСПРЯЖЕНОГО ОПЕРАТОРА

Записані хвильові оператори для рангу один сингулярного несиметричного збурення $\tilde{A} = A + \alpha \langle \cdot, \omega_1 \rangle \omega_2$ самоспряженого напівобмеженого оператора A, тобто оператора A збуреного несиметричним потенціалом ($\omega_1 \neq \omega_2$). Вирази подані у сильному сенсі. Наведено матрицю розсіяння.

We provide with the wave operators for a rank one of singular non-symmetric perturbation $\tilde{A} = A + \alpha \langle \cdot, \omega_1 \rangle \omega_2$ of a self-adjoint semi-bounded operator A, that is, the operator which is perturbed by a non-symmetric potential ($\omega_1 \neq \omega_2$). The expressions are given in the strong sense. The scattering matrix is also given.

Вступ

В цій роботі продовжуються дослідження сингулярного рангу один збурення самоспряженого оператора косим проектором. Таке збурення відповідає формальному виразу

$$A + \alpha\langle \cdot, \omega_1\rangle\omega_2,$$

де $A = A^*$ – необмежений самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, $\alpha \in \mathbb{C}$, а вектори ω_i, $i = 1, 2$ належать деякому негативному простору $\mathcal{H}_{-1}$, взятому зі шкали, побудованої за оператором A. Такі збурення є логічним продовження досліджень задач про нелокальні взаємодії [7,8].

Істотно грунтуючись на результаті з [5], можна довести існування хвильових операторів для пари A і $\tilde{A}$ і записати дію у слабкому сенсі (у сенсі скалярного добутку). В цій роботі наведено дію хвильових операторів у сильному сенсі та записано матрицю розсіяння для таких операторів.

Попередні відомості

Нехай $A = A^*$ – самоспряжений необмежений оператор, визначений на $\mathrm{Dom}A = \mathfrak{D}(A)$ у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ зі скалярним добутком $(\cdot, \cdot)$ і нормою $\|\cdot\|$. Позначимо $\rho(\cdot)$ множину регулярних точок відповідного оператора.

Нагадаємо, що

$$\mathcal{H}_{-2} \supset \mathcal{H}_{-1} \supset \mathcal{H}_0 \equiv \mathcal{H} \supset \mathcal{H}_1 \supset \mathcal{H}_2$$

позначає частину асоційованої із оператором A-шкали гільбертових просторів [3,6], де простори

$$\mathcal{H}_k := \mathcal{H}_k(A) = \mathfrak{D}(|A|^{k/2}),\ k = 1, 2$$

із нормою

$$\|\varphi\|_k = \|(|A| + I)^{k/2}\varphi\|$$

(I – позначає одиничний оператор) $\varphi \in \mathcal{H}_k(A)$ і $\mathcal{H}_{-k} := \mathcal{H}_{-k}(A)$ негативні (дуальні) простори – поповнення $\mathcal{H}$ за нормою

$$\|f\|_{-k} = \|(|A| + I)^{-k/2} f\|,\ f \in \mathcal{H}.$$

Надалі, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ позначає дуальний скалярний добуток – спарення просторів $\mathcal{H}_k$ і $\mathcal{H}_{-k}$.

Використовуючи A-шкалу, оператор A продовжується на $\mathcal{H}_{+1}$ і розуміється тепер як обмежений оператор зі всього $\mathcal{H}_{+1}$ у $\mathcal{H}_{-1}$. Продовжений оператор позначено як $\mathbf{A}$. Позначимо також $\mathbf{R}_z = (\mathbf{A} - z)^{-1}$ відповідну резольвенту $z \in \rho(\mathbf{A})$.

Розглянемо в A-шкалі оператор вигляду $V = \langle \cdot, \omega_1\rangle\omega_2$, такого що

$$\mathfrak{D}(V) \subseteq \mathcal{H}_{+1},\ \mathfrak{R}(V) \subseteq \mathcal{H}_{-1}.$$

Сума $\mathbf{A} + V$ є обмежений оператор з $\mathcal{H}_{+1}$ в $\mathcal{H}_{-1}$. Тепер формальний вираз $A+\alpha\langle \cdot, \omega_1\rangle\omega_2$ можна розуміти як оператор $\mathbf{A} + \langle \cdot, \omega_1\rangle\omega_2$ з $\mathcal{H}_{+1}$ в $\mathcal{H}_{-1}$, звужений на $\mathcal{H}$:

$$A^{\omega_1,\omega_2} = (\mathbf{A} + \langle \cdot, \omega_1\rangle\omega_2) \restriction_{\mathcal{H}} . \qquad (1)$$

Означення [4]. *Оператор* A^{ω_1,ω_2} *називається рангу один несиметричним слабо сингулярним збуренням самоспряженого оператора* A *у сепарабельному гільбертовому просторі* $\mathcal{H}$*, якщо для*

$$\eta_i = \mathbf{A}^{-1}\omega_i,\ \omega_i \in \mathcal{H}_{-1} \setminus \mathcal{H},\ \omega_1 \neq \omega_2 :$$

область визначення задається у вигляді:

$$\mathfrak{D}(A^{\omega_1,\omega_2}) = \{\psi = \varphi + b\eta_2 \mid \varphi \in \mathfrak{D}(A),$$

де

$$b = \frac{(A\varphi,\eta_1)}{1+(A^{1/2}\eta_2, A^{1/2}\eta_1)}\}$$

для випадку $(A^{1/2}\eta_2, A^{1/2}\eta_1) \neq -1$*; і у вигляді:*

$$\mathfrak{D}(A^{\omega_1,\omega_2}) = \mathfrak{D}_{\mathcal{H}_1}\dot{+}\{c\eta_2\},$$

де

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{H}_1} = \{\varphi \in \mathfrak{D}(A) \mid (A\varphi,\eta_1) = 0\}$$

для випадку $(A^{1/2}\eta_2, A^{1/2}\eta_1) = -1$*; а дія задається виразом:*

$$A^{\omega_1,\omega_2}\psi = A\varphi.$$

Далі ми розглядаємо збурення із параметром $\alpha \in \mathbb{C}$ і позначаємо його

$$\tilde{A} = A + \alpha\langle\cdot,\omega_1\rangle\omega_2,$$

де $\omega_i \in \mathcal{H}_{-1}\setminus\mathcal{H}$ і $\|\omega_i\|_{-1} = 1$, $i = 1,2$. Множину таких операторів позначимо $\mathcal{P}_{ws,ws}(A)$ що означає ”weakly-weakly” ”слабо-слабо” сингулярне збурення ((ws,ws)-збурення).

Якщо в означенні $\omega_1 = \omega_2$, то отримуємо відомий випадок самоспряжених сингулярних збурень [2,3,6].

Теорема 1 [4]. *Для резольвент* $R_z = (A-z)^{-1}$ *і* $\tilde{R}_z = (\tilde{A}-z)^{-1}$ *операторів* A *і* $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$ *у сепарабельному гільбертовому просторі* $\mathcal{H}$ *виконується формула типу М.Крейна* $z,\xi,\zeta \in \rho(A)\cap\rho(\tilde{A})$*:*

$$\tilde{R}_z = R_z + b_z(\cdot, n_{\bar{z}})m_z, \tag{2}$$

з дефектними векторами

$$n_z = (A-\xi)(A-z)^{-1}n_\xi$$

$$m_z = (A-\zeta)(A-z)^{-1}m_\zeta,$$

де $n_z, m_z \in \mathcal{H}_{+1}\setminus\mathcal{H}_{+2}$*; та умовою для скалярної функції* b_z*:*

$$b_z^{-1} - b_\xi^{-1} = (\xi - z)(m_\xi, n_{\bar{z}}).$$

Вектори n_z*,* m_z *і число* b_z *при кожному фіксованому* z *пов'язані із* ω_1 *і* ω_2 *співвідношеннями*

$$n_z = R_z\omega_1,\ m_z = R_z\omega_2,$$

$$-b_z^{-1} = \alpha^{-1} + \langle\omega_2, R_{\bar{z}}\omega_1\rangle,\ \alpha \neq 0.$$

Хвильові оператори

Для A та $\tilde{A}$ визначимо хвильові оператори у стандартний спосіб [1,3]:

$$\begin{aligned} W_\pm(A,\tilde{A}) &= s - \lim_{t\to\pm\infty} U_t \\ &= s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{i\tilde{A}t}e^{-iAt}P^{ac}, \end{aligned} \tag{3}$$

якщо границі існують, де

$$P^{ac}f = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^{ac}(\lambda)dE^{ac}(\lambda)(A+i)^{-1}\omega_2,$$

тут позначимо через P^{ac}, і зокрема $\tilde{P}^{ac}$, спектральні проектори на абсолютно неперервні частини спектрів операторів A і $\tilde{A}$ та $\mathcal{H}^{ac}$ і $\tilde{\mathcal{H}}^{ac}$ відповідні підпростори:

$$\mathcal{H}^{ac} = P^{ac}\mathcal{H},\ \tilde{\mathcal{H}}^{ac} = \tilde{P}^{ac}\mathcal{H}.$$

Згідно роботи Като Т. [5] оператори A та $\tilde{A}$ мають хвильові оператори. У подальших дослідженнях наслідуємо, здебільшого, за [3].

Лема [1,3]. *Для* $f \in L_2(\mathbb{R})$ *і борелевих мір* $d\lambda, d\mu$ *маємо:*

$$\lim_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{it(\mu-\lambda)}-1}{\mu-\lambda}f(\lambda)d\lambda - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\lambda)d\lambda}{\lambda-(\mu+i0)}\Big|^2 d\mu = 0,$$

де $\hat{f}$ *позначає звичайне перетворення Фур'є.*

Позначимо

$$U_t = e^{i\tilde{A}t}e^{-iAt}P^{ac}.$$

Не порушуючи загальності вважатимемо надалі $\pm i \in \rho(\tilde{A})$.

Нехай вектор

$$g = (A+i)^{-1}\omega_1, \ \|g\| = 1$$

є генератором в $\mathcal{H}$ для A і $\tilde{A}$. Тоді

$$\tilde{g} = (\tilde{A}+i)^{-1}\omega_1 = \frac{1}{1+\alpha F(-i)} g$$

також генератор.

Кожний вектор $f \in \mathcal{H}$ має два зображення

$$f = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\lambda) dE(\lambda) g, \ f = \int_{\mathbb{R}} \hat{\tilde{f}}(\lambda) d\tilde{E}(\lambda)\tilde{g},$$

асоційовані з A і A_α відповідно.

Тоді скалярний добуток $f, g \in \mathcal{H}$ теж має два зображення

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(\lambda)} \hat{g}(\lambda) d\rho(\lambda),$$

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{\tilde{f}}(\lambda)} \hat{\tilde{g}}(\lambda) d\tilde{\rho}(\lambda),$$

де $\rho(\lambda) = \langle g, E(\lambda) g\rangle$ та $\tilde{\rho}(\lambda) = \langle \tilde{g}, \tilde{E}(\lambda)\tilde{g}\rangle$ є неспадними функціями обмеженої варіації.

Якщо $\omega_2 \in \mathcal{H}_{-1}(A)$, то $\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda| d\rho(\lambda) < \infty$. Для $f \in \mathcal{H}, \ \omega_1 \in \mathcal{H}_{-1}$ можна записати:

$$\langle (A-z)^{-1}\omega_2, f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - i}{\lambda - z} \hat{f}(\lambda) d\rho(\lambda),$$
$$\langle (\tilde{A}-z)^{-1}\omega_2, f\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - i}{\lambda - z} \hat{\tilde{f}}(\lambda) d\tilde{\rho}(\lambda).$$

Із формули М.Крейна (2) маємо:

$$\langle (\tilde{A}-z)^{-1}\omega_2, f\rangle = \frac{1}{1+\alpha F(z)} \langle (A-z)^{-1}\omega_2, f\rangle,$$

де $F(z) = \langle (A-z)^{-1}\omega_2, \omega_1\rangle$; та у спектральному зображенні

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - i}{\lambda - z} \hat{\tilde{f}}(\lambda) d\tilde{\rho}(\lambda) = \frac{1}{1+\alpha F(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - i}{\lambda - z} \hat{f}(\lambda) d\rho(\lambda),$$

та для (майже всіх) $\mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\pm \pi i(\mu - i)\hat{\tilde{f}}(\mu)\tilde{\rho}\prime(\mu) \\ &\quad + \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - i}{\lambda - \mu} \hat{\tilde{f}}(\lambda) d\tilde{\rho}(\lambda) \\ &\quad = \frac{1}{1+\alpha F(\mu \pm i0)} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - i}{\lambda - (\mu \pm i0)} \hat{f}(\lambda) d\rho(\lambda). \end{aligned} \tag{4}$$

З останніх двох рівностей, шляхом простих перетворень, маємо

$$\begin{aligned} &2\pi i(\mu - i)\hat{\tilde{f}}(\mu)\tilde{\rho}\prime(\mu) \\ &\quad = \frac{2\pi i \alpha F(\mu^2+1)\rho\prime(\mu)}{|1+\alpha F(\mu + i0)|^2} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda - i}{\lambda - (\mu + i0)} \hat{f}(\lambda) d\rho(\lambda) \\ &\quad + \frac{2\pi i(\mu - i)}{1+\alpha F(\mu - i0)} \hat{f}(\mu)\rho\prime(\mu). \end{aligned} \tag{5}$$

Після диференціювання останньої рівності майже скрізь по $\mu \in \mathbb{R}$ виконується

$$\pi\alpha(\mu^2+1)\rho\prime(\mu) = \mathrm{Im} F(\mu + i0),$$

що випливає з зображення

$$F(z) = \langle (A_{-} z)^{-1}\omega_2, \omega_1\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2+1}{\lambda - z} d\rho(\lambda),$$

для $\omega_1, \ \omega_2 \in \mathcal{H}_{-1}$.

Для запису зв'язку між абсолютно неперервними частинами спектрів $d\rho(\lambda)$ та $d\tilde{\rho}(\lambda)$ знову почнемо з формули М.Крейна (2) у вигляді:

$$(\tilde{A}-z)^{-1}\omega = \frac{1}{1+\alpha F(z)} (A-z)^{-1}\omega,$$

яка дає

$$\begin{aligned} &\langle (\tilde{A}-z)^{-1}\omega_2, (\tilde{A}-z)^{-1}\omega_1\rangle \\ &= \frac{1}{|1+\alpha F(z)|^2} \langle (A-z)^{-1}\omega_2, (A-z)^{-1}\varphi\omega_1\rangle \end{aligned}$$

та використовуючи спектральне зображення

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2+1}{(\lambda - z)(\lambda - \bar{z})} d\tilde{\rho}(\lambda)$$

$$= \frac{1}{|1+\alpha F(z)|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda^2+1}{(\lambda-z)(\lambda-\bar{z})} d\rho(\lambda)$$

звідки майже скрізь на $\mathbb{R}$:

$$\tilde{\rho}\prime(\mu) = \frac{1}{|1+\alpha F(\mu+i0)|^2} \rho\prime(\mu), \qquad (6)$$

яке виконується для абсолютно неперервних частин спектральних мір $d\rho$ і $d\tilde{\rho}$.

З (5) та (6) випливає зв'язок для зображень $\hat{f}$ та $\hat{\tilde{f}}$ функції f

$$\hat{\tilde{f}}(\mu) = -\alpha(\mu+i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda-i}{\lambda-(\mu+i0)} \hat{f}(\lambda) d\rho(\lambda) + (1+\alpha F(\mu+i0))\hat{f}(\mu). \qquad (7)$$

Теорема 2. *Нехай в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ задано самоспряжений оператор A та його сингулярне збурення косим проектором*

$$\tilde{A} = A + \alpha\langle\cdot,\omega_1\rangle\omega_2, \ \omega_1,\omega_2 \in \mathcal{H}_{-1}\setminus\mathcal{H}, \alpha\in\mathbb{C}.$$

Тоді існують хвильові оператори $W_\pm$, визначені в (3), для яких виконується рівність:

$$W_\pm f = \int_{-\infty}^{\infty} (1+\alpha F(\lambda\pm i0))\hat{f}^{ac}(\lambda) \times \tilde{E}(\lambda)(\tilde{A}+i)^{-1}\omega_2, \quad (8)$$

де

$$P^{ac} f = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}^{ac}(\lambda) dE(\lambda)(A+i)^{-1}\omega_2,$$

Доведення. Оскільки оператори U_t та $W_\pm$ є нульовими на ортогональному доповненні до $\mathcal{H}^{ac}$, то для кожного $f\in\mathcal{H}^{ac}$ маємо $\hat{f}^{ac} = \hat{f}$.

Незалежно від того, що існування хвильових операторі (3) у слабкому сенсі можна показати за допомогою [5], покажемо це для W_+ незалежно.

Для довільних

$$f\in\mathfrak{D}(A)\cap\mathcal{H}^{ac}, \ g\in\mathfrak{D}(\tilde{A})\cap\tilde{\mathcal{H}}^{ac} \qquad (9)$$

маємо

$$\langle g, U_t f\rangle - \langle g, f\rangle = i\alpha \int_0^t \langle e^{-i\tau\tilde{A}} g, \omega_1\rangle\langle\omega_2, e^{-i\tau A} f\rangle,$$

оскільки $\mathfrak{D}(A)$ і $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ та $\mathcal{H}^{ac}$ та $\tilde{\mathcal{H}}^{ac}$ інваріантні відносно дії e^{-iAt} та $e^{-i\tilde{A}t}$ відповідно.

Оскільки $\sigma^{ac}(\tilde{A})\subseteq\mathbb{R}$, то інтегрування залишається на $\mathbb{R}$.

Використовуючи спектральне зображення та змінивши порядок інтегрування, отримуємо

$$\begin{aligned}\langle g, U_t f\rangle - \langle g, f\rangle &= i\alpha \int_0^t \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda}\overline{\hat{\tilde{g}}(\lambda)}(\lambda+i)d\tilde{\rho}(\lambda)\right] \\ &\times \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau\mu}\hat{f}(\mu)(\mu-i)d\rho(\mu)\right] d\tau \\ &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it(\lambda-\mu)}-1}{\lambda-\mu} \\ &\times \hat{f}(\mu)(\mu-i)\overline{\hat{\tilde{g}}(\lambda)}(\lambda+i)d\tilde{\rho}(\lambda)d\rho(\mu).\end{aligned}$$

Додатково припустимо,що

$$\hat{f}\rho\prime\in L_2(\mathbb{R}), \ \hat{\tilde{g}}\tilde{\rho}\prime\in L_2(\mathbb{R}). \qquad (10)$$

Тоді за Лемою

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}\langle g, U_t f\rangle &= \langle g, f\rangle \\ &+ \alpha \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(\mu)(\mu-i)\overline{\hat{\tilde{g}}(\lambda)}(\lambda+i)}{\mu-(\lambda+i0)} \\ &\times \tilde{\rho}\prime(\lambda)\rho\prime(\mu)d\lambda d\mu \\ &= \langle g, f\rangle \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty}(1+\alpha F(\lambda+i0))\hat{f}(\lambda)\overline{\hat{\tilde{g}}(\lambda)}\tilde{\rho}\prime(\lambda)d\lambda \\ &- \int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(\lambda)\overline{\hat{\tilde{g}}(\lambda)}\tilde{\rho}\prime(\lambda)d\lambda = \langle g, W_+ f\rangle,\end{aligned}$$

де використано (7).

Отже (8) у слабкому сенсі показано для функцій f, g, які задовольняють умови (9) та (10). Такі функції утворюють щільну підмножину у $\mathcal{H}^{ac}$ та $\tilde{\mathcal{H}}^{ac}$ відповідно. Отже у слабкому сенсі границя

$$\lim_{t\to\infty}\tilde{P}^{ac}U_t = W_+$$

існує.

Для доведення існування границі у сильному сенсі потрібно показати, що

$$\|W_+ f\| = \|P^{ac} f\|.$$

Дійсно, з (8) та (6):

$$
\begin{aligned}
&\|W_+ f\|^2 \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} |1+\alpha F(\lambda+i0)|^2 |\hat f(\lambda)|^2 d\tilde\rho(\lambda) \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} |1+\alpha F(\lambda+i0)|^2 |\hat f(\lambda)|^2 \tilde\rho\prime(\lambda) d\lambda \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat f(\lambda)|^2 \rho\prime(\lambda) d\lambda = \|f\|^2.
\end{aligned}
$$

Доведення для W_- аналогічне. □

Для обчислення W_+^* розглянемо

$$
f \in \mathcal{H}^{ac},\ g \in \tilde{\mathcal{H}}^{ac}.
$$

Отримуємо

$$
\begin{aligned}
&\langle g, W_+ f\rangle \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{\tilde g}(\lambda)} (1+\alpha F(\lambda+i0)) \hat f(\lambda) \tilde\rho\prime(\lambda) d\lambda \\
&\quad = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{\hat{\tilde g}(\lambda)}}{1+\alpha F(\lambda-i0)} \hat f(\lambda) \rho\prime(\lambda) d\lambda.
\end{aligned}
$$

Отже спряжений оператор має вигляд

$$
W_+^* g = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\alpha F(\lambda+i0)} \hat{\tilde g}^{ac} dE(A+i)^{-1}\omega_1,
$$

де

$$
\tilde P^{ac} g = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tilde g}^{ac} d\tilde E(\tilde A+i)^{-1}\omega_1 \in \tilde{\mathcal{H}}^{ac}.
$$

Тоді $S(\tilde A, A) = W_+^* W_-$ – оператор розсіяння, а

$$
S(\tilde A, A, \lambda) = \frac{1+\alpha F(\lambda-i0)}{1+\alpha F(\lambda+i0)} \tag{11}
$$

– матриця розсіяння, яка у даному випадку складається із одного елемента, а її дія – це множення на (11).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Н.И. Ахиезер* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 544 с.

2. *S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, H. Holden* Solvable models in quantum mechanics.Second edition, With an appendix by Pavel Exner, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2005. xiv+488 pp.

3. *S. Albeverio, and P. Kurasov*, Singular perturbations of differential operators. Solvable Schrödinger type operators, London Mathematical Society Lecture Note Series, 271, Cambridge University Press, Cambridge, 2000. xiv+429 pp.

4. *Т.І. Вдовенко, М.Є. Дудкін* Сингулярні рангу один несиметричні збурення самоспряженого оператора // в "Спектральна теорія операторів та наборів операторів" Збірник праць Інституту Математики НАН України, 2015. – т.12. – № 1: – С. 57-73.

5. *T. Kato* Wave Operators and Similarity for Some Non-selfadjoint Operators // Math. Annalen. – 1966. – **162**. – P. 258–279.

6. *V Koshmanenko* Singular quadratic forms in perturbation theory. Translated from the 1993 Russian original. Mathematics and its Applications, 474. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1999. viii+308 pp.

7. *L. Nizhnik* Inverse nonlocal Sturm-Liouville problem // Inverse problems.– 2010. – **26**. – 9 p.

8. *L. Nizhnik* Inverse spectral nonlocal problem for the first order ordinary differential equation // Tamkang Journal of Mathematics. – 2011. **42**, no. 3. – P. 385–394.