УДК 519.21

©2015 р. А.В. Кінаш

Національний університет "Львівська політехніка"

ФЛУКТУАЦІЇ АСИМПТОТИЧНО ДИСИПАТИВНОГО ПРОЦЕСУ З МАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕННЯМИ

В роботі розглянуто флуктуації асимптотично дисипативного процесу з марковськими переключеннями в схемі дифузійної апроксимації в умовах балансу на сингулярне збурення через малий параметр серій. Умова балансу є ключовою для отримання граничного генератора при розв'язувані проблеми сингулярного збурення. Достатні умови дисипативності, отриманого граничного дифузійного процесу, сформульовані в термінах властивостей функції Ляпунова усередненої за стаціонарним розподілом марковського процесу переключень системи. Отримано граничний генератор флуктуацій системи.

In the article we conside fluctuations of an asymptotic dissipative process with Markov switching in the diffusion approximation scheme under balance conditions on singular perturbation by a small series parameter. The balance condition is crucial for obtaining of a limiting generator in the solution of the singular perturbation problem. Sufficient conditions for the dissipativity of obtaining of limiting diffusion process are formulated in terms of Lyapunov function of the system. The Lyapunov function is averaged over the stationary distribution of Markov switching process. The limited generator of system fluctuations was obtained.

Вступ

Дисипативність, як асимптотична властивість вихідного процесу детермінованих та випадкових систем з адитивним випадковим збуренням, розглядалась в роботах Хасмінського Р.З.[1], Мазурова О.Ю.[2], Самойленка А.М. і Станжицького[3], Brogliato B.[4], тощо. Зокрема, в [1, §4] дисипативність визначається як обмеженість розв'язку стохастично диференціального рівняння за ймовірністю рівномірно по t.

В роботі Королюка B.C. та Limnios N.[5] встановлено асимптотичну дифузійність випадкової еволюції в схемі дифузійної апроксимації з марковськими переключеннями.

Флуктуації асимптотичного дифузійного процесу з марковськими переключеннями розглядалися в роботі Чабанюка Я.М., Королюка B.C. та Limnios N.[6].

В роботі [7] було встановлено асимптотичну дисипативність випадкової еволюції з марковськими збуреннями.

Асимптотична нормальність процедури стохастичної апроксимації з марковськими переключеннями розглядалася в [8].

Встановлення властивостей флуктуацій випадкових процесів відносно усереднень є одним з головних завдань досліджень випадкових процесів, зокрема і дисипативних.

В даній роботі отримано граничний генератор флуктуацій асимптотично дисипативної системи відносно граничного детермінованого процесу. Властивості функції Ляпунова даного процесу зумовлюють дисипативність граничної еволюції.

1. Формулювання задачі

Стохастична система визначена розв'язком еволюційного рівняння[6]

$$\begin{aligned} du^\varepsilon/dt = C(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^4))+ \\ +\varepsilon^{-1}C_0(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^4)), \end{aligned} \tag{1}$$

де $u^\varepsilon(t)$ - випадкова еволюція, $t \geq 0$; $C_0(u,\cdot) \in C^3(R)$ - сингулярне збурення функції регресії $C(u,\cdot) \in C^2(R)$; $x(t)$ - марковський процес в фазовому просторі станів $(X, \mathbf{X})$ зі стаціонарним розподілом $\pi(B)$, де $B \in \mathbf{X}$.

Генератор марковського процесу визначається рівністю[5]

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}\varphi(x) = q(x)\int_X Q(x,dy)[\varphi(y)-\varphi(x)], \\ \varphi \in \mathbf{B}(X), \end{aligned} \tag{2}$$

де $\mathbf{B}(X)$ - банаховий простір дійсних обмежених функцій з супремум-нормою $\|\varphi\| =$

$= \sup_{x\in\mathbf{X}} |\varphi(x)|.$

Для генератора $\mathbf{Q}$ визначено потенціал

$$\mathbf{R}_0 = \Pi - (\Pi + \mathbf{Q})^{-1},$$

де $\Pi\varphi(x) = \int_X \pi(dy)\varphi(y)$ - проектор на нуль-простір $N_{\mathbf{Q}} = \{\varphi : \mathbf{Q}\varphi = 0\}$ оператора $\mathbf{Q}$.

Усереднена система задається розв'язком рівняння

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \hat{a}(\hat{u}), \qquad (3)$$

де

$$\hat{a}(u) = \Pi C_0(u,x)\mathbf{R}_0 C_0'(u,x) + \Pi C(u,x). \quad (4)$$

Нехай також виконується умова балансу

$$\int_X \pi(dx)C_0(u,x) = 0. \qquad (5)$$

Флуктуації системи (1) визначені співвідношенням

$$v^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-1}[u^\varepsilon(t) - \hat{u}(t)]. \qquad (6)$$

2. Асимптотична дисипативність вихідного процесу

Система (1) розглядається в умовах асимптотичної дисипативності, що мають вигляд[7]

$$|C_0(u,x)\mathbf{R}_0[\tilde{L}(u,x)V'(u)]'| < M_1 V(u);$$

$$|C(u,x)\mathbf{R}_0[C_0(u,x)V'(u)]'| < M_2 V(u);$$

$$|C(u,x)\mathbf{R}_0[\tilde{L}(u,x)V'(u)]'| < M_3 V(u);$$

$$a(u)V'(u) < -c_1 V(u);$$

$$\sup_{u\in R^d} \parallel \sigma(u) \parallel < c_2,$$

де $V(u) \in C^3(R^d)-$ функція Ляпунова системи (3) і $c_1 > 0, c_2 > 0$ і $M_i > 0, i = \overline{1,4}$.

Функція $\tilde{L}(u,x)V'(u)$ має вигляд

$$\tilde{L}(u,x)V'(u) =$$

$$= [a(u) - C_0(u,x)\mathbf{R}_0 C_0'(u,x) - C(u,x)]V'(u) +$$

$$+ [B(u)/2 - C_0(u,x)\mathbf{R}_0 C_0(u,x)]\, V''(u).$$

Коефіцієнт граничної дифузії $\sigma(u)$ визначається зі співвідношення

$$\sigma(u)\sigma^*(u) = B(u),$$

де

$$B(u) = 2\int_X C_0(u,x)\mathbf{R}_0 C_0(u,x)\pi(dx). \qquad (7)$$

3. Асимптотика флуктуацій дисипативної системи

Теорема. За умови балансу (5) має місце слабка збіжність

$$v^\varepsilon(t) \to \xi(t), \varepsilon \to 0.$$

Граничний процес $\xi(t), \hat{u}(t), t \geq 0$ визначається генератором

$$\begin{gathered}\mathbf{L}\varphi(v,w) = c_1(w)\varphi_w'(v,w) + \\ + c_2(v,w)\varphi_v'(v,w) + \tfrac{1}{2}B(w)\varphi_v''(v,w)\end{gathered} \qquad (8)$$

на тест-функціях $\varphi(v,w) \in C^{3,3}(R^d \times R^d)$, де

$$c_1(w) = \int_X \pi(dx)C(w,x), \qquad (9)$$

$$c_2(v,w) = v\int_X \pi(dx)C'(w,x). \qquad (10)$$

Зауваження 1. З умов асимптотичної дисипативності вихідної системи слідує асимптотична дисипативність флуктуацій системи.

Доведення теореми базується на наступних результатах.

Лема 1. Генератор трьохкомпонентного марковського процесу

$$v^\varepsilon(t), \hat{u}(t), x(t/\varepsilon^4), t \geq 0$$

має представлення

$$\begin{gathered}\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(v,w,x) = \varepsilon^{-4}\mathbf{Q}\varphi(v,w,x) + \\ + \varepsilon^{-2}\tilde{\mathbf{C}}_0(x)\varphi(v,w,x) + \\ + \varepsilon^{-1}\tilde{\mathbf{C}}(x)\varphi(v,w,x) + \mathbf{A}_w\varphi(v,w,x),\end{gathered} \qquad (11)$$

де

$$\tilde{\mathbf{C}}_0(x)\varphi(v,w,x) = C_0(w+\varepsilon v,x)\varphi_v'(v,w,x),$$

$$\tilde{\mathbf{C}}(x)\varphi(v,w,x) =$$

$$= [C(w+\varepsilon v,x) - \hat{a}(w)]\varphi_v'(v,w,x),$$

$$\mathbf{A}_w\varphi(v,w,x) = \hat{a}(w)\varphi_w'(v,w,x).$$

Доведення. Нехай $v^\varepsilon(t) = v_t, \hat{u}(t) = w_t$, $x(t/\varepsilon^4) = x_t$. Обчислимо умовне математичне сподівання

$$E[\varphi(v_{t+\triangle t}, w_{t+\triangle t}, x_{t+\triangle t}) - \varphi(v_t, w_t, x_t)|v^\varepsilon(t) =$$
$$= v_t, \hat{u}(t) = w_t, x(t/\varepsilon^4) = x_t] =$$
$$= E[\varphi(v_{t+\triangle t}, w_{t+\triangle t}, x_{t+\triangle t}) -$$
$$-\varphi(v_{t+\triangle t}, w_t, x_{t+\triangle t})] +$$
$$+E[\varphi(v_t, w_t, x_{t+\triangle t}) - \varphi(v_t, w_t, x_t)] +$$
$$+E[\varphi(v_{t+\triangle t}, w_t, x_{t+\triangle t}) - \varphi(v_t, w_t, x_{t+\triangle t})].$$

Розкладемо $E[\varphi(v_{t+\triangle t}, w_{t+\triangle t}, x_{t+\triangle t})]$ відносно другої компоненти за формулою Тейлора

$$E[\varphi(v_{t+\triangle t}, w_{t+\triangle t}, x_{t+\triangle t})] =$$
$$= E[\varphi(v_{t+\triangle t}, w_t, x_{t+\triangle t})] +$$
$$+E[\hat{a}(w)\varphi'_w(v_{t+\triangle t}, w_t, x_{t+\triangle t})\triangle t] + o(\triangle t).$$

Враховуючи розподіл часу перебування θ_x в стані x та (2) для доданку $E[\varphi(v_t, w_t, x_{t+\triangle t}) - \varphi(v_t, w_t, x_t)]$ отримаємо

$$E[\varphi(v_t, w_t, x_{t+\triangle t}) - \varphi(v_t, w_t, x_t)] =$$
$$= E[\varphi(v_t, w_t, x_{t+\triangle t}) -$$
$$-\varphi(v_t, w_t, x_t)][(\theta_x > \varepsilon^{-4}\triangle t) + (\theta_x \le \varepsilon^{-4}\triangle t)] =$$
$$= E[\varphi(v_t, w_t, x_{t+\triangle t}) -$$
$$-\varphi(v_t, w_t, x_t)][\varepsilon^{-4}q(x)\triangle t + o(\triangle t)] =$$
$$= \varepsilon^{-4}q(x)E[\varphi(v_t, w_t, x_{t+\triangle t}) - \varphi(v_t, w_t, x_t)]\triangle t +$$
$$+o(\triangle t) =$$
$$= \varepsilon^{-4}\mathbf{Q}\varphi(v, w, x)\triangle t + o(\triangle t).$$

Підставимо отримані результати в співвідношення умовного математичного сподівання

$$E[\varphi(v_{t+\triangle t}, w_{t+\triangle t}, x_{t+\triangle t}) - \varphi(v_t, w_t, x_t)|v^\varepsilon(t) =$$
$$= v_t, \hat{u}(t) = w_t, x(t/\varepsilon^4) = x_t] =$$
$$= \varepsilon^{-4}\mathbf{Q}\varphi(v, w, x)\triangle t +$$
$$+E[\hat{a}(w)\varphi'_w(v_{t+\triangle t}, w_t, x_{t+\triangle t})\triangle t] +$$
$$+E[\varphi(v_{t+\triangle t}, w_t, x_{t+\triangle t}) - \varphi(v_t, w_t, x_{t+\triangle t})|v^\varepsilon(t) =$$
$$= v_t, \hat{u}(t) = w_t, x(t/\varepsilon^4) = x_t] + o(\triangle t).$$

Розглянемо окремо останній доданок

$$E[\varphi(v_{t+\triangle t}, w_t, x_{t+\triangle t}) - \varphi(v_t, w_t, x_{t+\triangle t})|v^\varepsilon(t) =$$
$$= v_t, \hat{u}(t) = w_t, x(t/\varepsilon^4) = x_t] + o(\triangle t) =$$
$$= E[\varphi(v_t + \triangle v_t, w_t, x_{t+\triangle t}) -$$
$$-\varphi(v_t, w_t, x_{t+\triangle t})] + o(\triangle t) =$$
$$= E[\varphi(v_t + \varepsilon^{-1}[\triangle u^\varepsilon(t) - \triangle\hat{u}(t)], w_t, x_{t+\triangle t}) -$$
$$-\varphi(v_t, w_t, x_{t+\triangle t})] + o(\triangle t) =$$
$$= E[\varphi(v_t + \varepsilon^{-1}\triangle u^\varepsilon(t), w_t, x_{t+\triangle t}) -$$
$$-\varepsilon^{-1}\varphi'(v_t + \varepsilon^{-1}\triangle u^\varepsilon(t), w_t, x_{t+\triangle t})\triangle\hat{u}(t) -$$
$$-\varphi(v_t, w_t, x_{t+\triangle t})] + o(\triangle t) =$$
$$= E[\varphi(v_t + \varepsilon^{-1}\triangle u^\varepsilon(t), w_t, x_{t+\triangle t}) -$$
$$-\varphi(v_t, w_t, x_{t+\triangle t})] -$$
$$-\varepsilon^{-1}E[\hat{a}(w)\varphi'_v(v_t, w_t, x_{t+\triangle t})\triangle t] + o(\triangle t).$$

Враховуючи (1), маємо

$$E[\varphi(v_{t+\triangle t}, w_t, x_{t+\triangle t}) - \varphi(v_t, w_t, x_{t+\triangle t})|v^\varepsilon(t) =$$
$$= v_t, \hat{u}(t) = w_t, x(t/\varepsilon^4) = x_t] =$$
$$= E[\varphi(v_t + \varepsilon^{-1}(C(u^\varepsilon(t), x_{t+\triangle t}) +$$
$$+\varepsilon^{-1}C_0(u^\varepsilon(t), x_{t+\triangle t})), w_t, x_{t+\triangle t}) -$$
$$-\varphi(v_t, w_t, x_{t+\triangle t})] -$$
$$-\varepsilon^{-1}E[\hat{a}(w)\varphi'_v(v_t, w_t, x_{t+\triangle t})\triangle t] + o(\triangle t) =$$
$$= \varepsilon^{-1}E[C(u^\varepsilon(t), x_{t+\triangle t}) +$$
$$+\varepsilon^{-1}C_0(u^\varepsilon(t), x_{t+\triangle t})\varphi'_v(v_t, w_t, x_{t+\triangle t})|v^\varepsilon(t) =$$
$$= v_t, \hat{u}(t) = w_t, x(t/\varepsilon^4) = x_t]\triangle t -$$
$$-\hat{a}(w)\varphi'_v(v_t, w_t, x_{t+\triangle t})\triangle t + o(\triangle t).$$

З означення генератора

$$\mathbf{L}^\varepsilon\varphi(v, w, x) =$$
$$= \lim_{\triangle t \to 0}\frac{1}{\triangle t}E[\varphi(v_{t+\triangle t}, w_{t+\triangle t}, x_{t+\triangle t}) -$$
$$-\varphi(v_t, w_t, x_t)|v^\varepsilon(t) = v_t, \hat{u}(t) = w_t,$$
$$x(t/\varepsilon^4) = x_t] = \varepsilon^{-4}\mathbf{Q}\varphi(v, w, x) +$$
$$+\hat{a}(w)\varphi'_w(v, w, x) +$$
$$+\varepsilon^{-1}C(w + \varepsilon v, x)\varphi'_v(v, w, x) +$$
$$+\varepsilon^{-2}C_0(w + \varepsilon v, x)\varphi'_v(v, w, x) +$$
$$+\varepsilon^{-1}\hat{a}(w)\varphi'_v(v, w, x).$$

Отже,

$$\mathbf{L}^\varepsilon\varphi(v,w,x)=\varepsilon^{-4}\mathbf{Q}\varphi(v,w,x)+$$

$$+\varepsilon^{-2}C_0(w+\varepsilon v,x)\varphi_v^{'}(v,w,x)+$$

$$+\varepsilon^{-1}[C(w+\varepsilon v,x)-\hat{a}(w)]\varphi_v^{'}(v,w,x)+$$

$$+\hat{a}(w)\varphi_w^{'}(v,w,x).$$

Таким чином отримуємо генератор (11).

Лема 2. Генератор (11) має асимптотичне представлення

$$\begin{gathered}\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(v,w,x)=\varepsilon^{-4}\mathbf{Q}\varphi(v,w,x)+\\+\varepsilon^{-2}\mathbf{C}_0(x)\varphi(v,w,x)+\\+\varepsilon^{-1}\mathbf{C}_2(x)\varphi(v,w,x)+\\+\mathbf{C}_3(x)\varphi(v,w,x)+\theta^\varepsilon(x)\varphi(v,w,x),\end{gathered}\tag{12}$$

де

$$\mathbf{C}_0(x)\varphi(v,w,x)=C_0(w,x)\varphi_v^{'}(v,w,x),\tag{13}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{C}_2(x)\varphi(v,w,x)=[vC_0^{'}(w,x)+\\+C(w,x)-\hat{a}(w)]\varphi_v^{'}(v,w,x),\end{gathered}\tag{14}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{C}_3(x)\varphi(v,w,x)=\mathbf{A}_w\varphi(v,w,x)+\\+v^2C_0^{''}(w,x)\varphi_v^{'}(v,w,x)/2+\\+vC^{'}(w,x)\varphi_v^{'}(v,w,x).\end{gathered}\tag{15}$$

Доведення. Підставимо розклад функцій $C(u,x)$ і $C_0(u,x)$ в околі точки $u=w$ в ряд Тейлора в (11)

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi(v,w,x)=\varepsilon^{-4}\mathbf{Q}\varphi(v,w,x)+$$

$$+\varepsilon^{-2}[C_0(w,x)+\varepsilon vC_0^{'}(w,x)+$$

$$+\varepsilon^2v^2C_0^{''}(w,x)/2]\varphi_v^{'}(v,w,x)+$$

$$+\varepsilon^{-1}[C(w,x)+\varepsilon vC^{'}(w,x)-$$

$$-\hat{a}(w)]\varphi_v^{'}(v,w,x)+\mathbf{A}_w\varphi(v,w,x)+o(\varepsilon).$$

Враховуючи співвідношення (13)-(15), отримаємо генератор (12).

Лема 3 Розв'язок проблеми сингулярного збурення зрізаного оператора

$$\begin{gathered}\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(v,w,x)=\varepsilon^{-4}\mathbf{Q}\varphi(v,w,x)+\\+\varepsilon^{-2}\mathbf{C}_0(x)\varphi(v,w,x)+\\+\varepsilon^{-1}\mathbf{C}_2(x)\varphi(v,w,x)+\\+\mathbf{C}_3(x)\varphi(v,w,x)\end{gathered}\tag{16}$$

за локальної умови балансу

$$\Pi C_0(u,x)\mathbf{R}_0C_0^{'}(u,x)=0$$

на тест-функціях

$$\begin{gathered}\varphi^\varepsilon(v,w,x)=\varphi(v,w)+\varepsilon^2\varphi_1(v,w,x)+\\+\varepsilon^3\varphi_2(v,w,x)+\varepsilon^4\varphi_3(v,w,x)\end{gathered}\tag{17}$$

має вигляд

$$\begin{gathered}\mathbf{L}_0^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(v,w,x)=\\=\mathbf{L}\varphi(v,w)+\varepsilon\hat{\theta}(x)\varphi(v,w),\end{gathered}\tag{18}$$

де

$$\mathbf{L}=\Pi\mathbf{C}_0(x)\mathbf{R}_0\mathbf{C}_0(x)+\Pi\mathbf{C}_3(x).\tag{19}$$

Залишковий член $\hat{\theta}(x)$ має представлення

$$\begin{gathered}\hat{\theta}(x)=\\=\mathbf{C}_0(x)\mathbf{R}_0\mathbf{C}_2(x)+\mathbf{C}_2(x)\mathbf{R}_0\mathbf{C}_0(x)+\\+\varepsilon\mathbf{C}_0(x)\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x)+\varepsilon\mathbf{C}_2(x)\mathbf{R}_0\mathbf{C}_2(x)+\\+\varepsilon\mathbf{C}_3(x)\mathbf{R}_0\mathbf{C}_0(x)+\varepsilon^2\mathbf{C}_2(x)\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x)+\\+\varepsilon^2\mathbf{C}_3(x)\mathbf{R}_0\mathbf{C}_2(x)+\varepsilon^3\mathbf{C}_3(x)\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x).\end{gathered}\tag{20}$$

Доведення. Підставимо (17) в (16)

$$\mathbf{L}^\varepsilon(x)\varphi^\varepsilon(v,w,x)=\varepsilon^{-4}\mathbf{Q}\varphi(v,w)+$$

$$+\varepsilon^{-2}[\mathbf{Q}\varphi_1(v,w,x)+\mathbf{C}_0(x)\varphi(v,w)]+$$

$$+\varepsilon^{-1}[\mathbf{Q}\varphi_2(v,w,x)+\mathbf{C}_2(x)\varphi(v,w)]+$$

$$+\mathbf{Q}\varphi_3(v,w,x)+\mathbf{C}_0(x)\varphi_1(v,w,x)+$$

$$+\mathbf{C}_3(x)\varphi(v,w)+$$

$$+\varepsilon[\mathbf{C}_0(x)\varphi_2(v,w,x)+\mathbf{C}_2(x)\varphi_1(v,w,x)+$$

$$+\varepsilon\mathbf{C}_0(x)\varphi_3(v,w,x)+\varepsilon\mathbf{C}_2(x)\varphi_2(v,w,x)+$$

$$+\varepsilon\mathbf{C}_3(x)\varphi_1(v,w,x)+$$

$$+\varepsilon^2\mathbf{C}_2(x)\varphi_3(v,w,x)+\varepsilon^2\mathbf{C}_3(x)\varphi_2(v,w,x)]+$$

$$+\varepsilon^3\mathbf{C}_3(x)\varphi_3(v,w,x)].$$

Оскільки $\varphi(v,w)\in N_{\mathbf{Q}}$, то

$$\mathbf{Q}\varphi(v,w)=0.$$

За умови балансу (5)

$$\mathbf{Q}\varphi_1(v,w,x)+\mathbf{C}_0(x)\varphi(v,w)=0,$$

$$\mathbf{Q}\varphi_1(v,w,x)=-\mathbf{C}_0(x)\varphi(v,w),$$

$$\varphi_1(v,w,x)=\mathbf{R}_0\mathbf{C}_0(x)\varphi(v,w).\tag{21}$$

Для $\mathbf{C}_2(x)$ виконується наступна умова

$$\Pi\mathbf{C}_2(x)=\Pi[vC_0^{'}(w,x)+C(w,x)-\hat{a}(w)]=$$

$$=v\Pi C_0^{'}(w,x)+\Pi C(w,x)-$$

$$-\Pi\Pi C_0(u,x)\mathbf{R}_0 C_0'(u,x) - \Pi\Pi C(u,x) = 0.$$

Розглянемо доданок при ε^{-1} з урахуванням останньої умови

$$\mathbf{Q}\varphi_2(v,w,x) + \mathbf{C}_2(x)\varphi(v,w) = 0,$$

$$\varphi_2(v,w,x) = \mathbf{R}_0\mathbf{C}_2(x)\varphi(v,w). \qquad (22)$$

З другої умови розв'язку проблеми сингулярного збурення

$$\mathbf{Q}\varphi_3(v,w,x) + \mathbf{C}_0(x)\varphi_1(v,w,x) +$$

$$+\mathbf{C}_3(x)\varphi(v,w) = \mathbf{L}\varphi(v,w).$$

Покладемо

$$\mathbf{C}_0(x)\mathbf{R}_0\mathbf{C}_0(x) + \mathbf{C}_3(x) = \mathbf{L}(x).$$

Тоді $\mathbf{Q}\varphi_3(v,w,x) = [\mathbf{L} - \mathbf{L}(x)]\varphi(v,w)$.
З умови розв'язності

$$\Pi[\mathbf{L} - \mathbf{L}(x)]\varphi(v,w) = 0,$$

а отже

$$\mathbf{L} = \Pi\mathbf{L}(x) =$$

$$= \Pi[\mathbf{C}_0(x)\mathbf{R}_0\mathbf{C}_0(x) + \mathbf{C}_3(x)] =$$

$$= \Pi\mathbf{C}_0(x)\mathbf{R}_0\mathbf{C}_0(x) + \Pi\mathbf{C}_3(x).$$

Для $\varphi_3(v,w,x)$ отримаємо

$$\varphi_3(v,w,x) = \mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x)\varphi(v,w), \qquad (23)$$

де $\tilde{\mathbf{L}}(x) = \mathbf{L} - \mathbf{L}(x)$.

Підставимо вирази (21)-(23) в доданок при ε у співвідношення для генератора $\mathbf{L}^\varepsilon(x)$

$$\mathbf{C}_0(x)\varphi_2(v,w,x) + \mathbf{C}_2(x)\varphi_1(v,w,x) +$$

$$+\varepsilon\mathbf{C}_0(x)\varphi_3(v,w,x) + \varepsilon\mathbf{C}_2(x)\varphi_2(v,w,x) +$$

$$+\varepsilon\mathbf{C}_3(x)\varphi_1(v,w,x) +$$

$$+\varepsilon^2\mathbf{C}_2(x)\varphi_3(v,w,x) + \varepsilon^2\mathbf{C}_3(x)\varphi_2(v,w,x) +$$

$$+\varepsilon^3\mathbf{C}_3(x)\varphi_3(v,w,x) =$$

$$= [\mathbf{C}_0(x)\mathbf{R}_0\mathbf{C}_2(x) + \mathbf{C}_2(x)\mathbf{R}_0\mathbf{C}_0(x) +$$

$$+\varepsilon\mathbf{C}_0(x)\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x) + \varepsilon\mathbf{C}_2(x)\mathbf{R}_0\mathbf{C}_2(x) +$$

$$+\varepsilon\mathbf{C}_3(x)\mathbf{R}_0\mathbf{C}_0(x) +$$

$$+\varepsilon^2\mathbf{C}_2(x)\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x) + \varepsilon^2\mathbf{C}_3(x)\mathbf{R}_0\mathbf{C}_2(x) +$$

$$+\varepsilon^3\mathbf{C}_3(x)\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x)]\varphi(v,w),$$

що співпадає з виглядом залишкового члена (20). Зважаючи на отримані результати генератор має вигляд (18).

Доведення теореми.

Обчислимо (19) з використанням співвідношень (13) і (15)

$$\mathbf{L}\varphi(v,w) = \Pi\mathbf{C}_0(x)\mathbf{R}_0\mathbf{C}_0(x)\varphi(v,w) +$$

$$+\Pi\mathbf{C}_3(x)\varphi(v,w) =$$

$$= \Pi C_0(w,x)\mathbf{R}_0 C_0'(w,x)\varphi_w''(v,w,x) +$$

$$+\Pi C(w,x)\varphi_w'(v,w,x) +$$

$$+\Pi C_0(w,x)\mathbf{R}_0 C_0(w,x)\varphi_v''(v,w,x) +$$

$$+v\Pi C'(w,x)\varphi_v'(v,w,x) =$$

$$= \Pi C(w,x)\varphi_w'(v,w,x) +$$

$$+\Pi C_0(w,x)\mathbf{R}_0 C_0(w,x)\varphi_v''(v,w,x) +$$

$$+v\Pi C'(w,x)\varphi_v'(v,w,x).$$

Враховуючи вирази (7),(9) та (10), маємо генератор вигляду (8).

Далі необхідно отримати обмеженість залишкового члена (20). Така обмеженість випливає з умов асимптотичної дисипативності. Зокрема, обмеженість доданку $\mathbf{C}_0(x)\mathbf{R}_0\tilde{\mathbf{L}}(x)$ на тест-функціях $\varphi(v,w)$ слідує з першої умови асимптотичної дисипативності вихідного процесу. Аналогічно отримаємо обмеженість усіх доданків залишкового члена $\hat{\theta}(x)$.

Отже, за Модельною граничною теоремою Королюка, отримуємо збіжність процесу[5, с.197].

Таким чином, достатні умови асимптотичної дисипативності вихідного процесу визначають вигляд граничного процесу флуктуацій.

Висновок

Флуктуації процесу розглянуто в схемі дифузійної апроксимації з малим параметром серій. Достатніми умовами існування асимптотичного представлення генератора трьохкомпонентного марковського процесу є глобальна та локальна умови балансу. Встановлений вигляд флуктуацій дозволяє побудувати стохастичний дифузійний процес. В окремих випадках отримаємо процес Орнштейна-Уленбека для опису таких флуктуацій. Отриманий результат може бути використаний при встановленні оцінок та швидкостей збіжності вихідного процесу до асимптотично дисипативного.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров // Москва: "Наука¨ – 1969. – 368 с.

2. *A. Mazurov and P. Pakshin* Stochastic dissipativity with risk-sensitive storage function and related control problems // ICIC Express Letters – 2008. –**3**, N1. – P. 53-60.

3. *Самойленко А.М., Станжицький О.М.* Якісний та асимптотичний аналіз диференціальних рівнянь з випадковими збуреннями: Монографія // К.: Наукова думка – 2009. – 336 с.

4. *B. Brogliato* Dissipative Systems Analysis and Control // Springer – 2005. – 585 p.

5. *V. Koroliuk and N. Limnious* Stochastic Systems in Merging Phase Space. // World Scientific Publishing – 2005.

6. *Y. M. Chabaniuk and V. Koroliuk and N. Limnios* Fluctuation of stochastic systems with average equilibrium point // C. R. Acad. Sci. – 2007. – **1**, N345. – P. 405-410.

7. *А.В. Кінаш, Я.М. Чабанюк, У.Т. Хімка* Асимптотична дисипативність дифузійного процесу // Математичне та компютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки. Кам'янець-Подільський. – 2014. – N11. – С. 77-87.

8. *Чабанюк Я.М.* Асимптотична нормальність стрибкової процедури стохастичної апроксимації у марковському середовищі // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Математика. Чернівці. – 2007. – N 349. – С. 128-133.