УДК 517.9

©2015 р. І.І. Клевчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

БІФУРКАЦІЯ ЦИКЛІВ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ ТА МАЛОЮ ДИФУЗІЄЮ

Доведено існування періодичних розв'язків автономної параболічної системи диференціальних рівнянь із запізненням та малою дифузією на колі. Вивчено питання існування та стійкості біжучих хвиль, одержано біфуркаційні рівняння.

We prove the existence of periodic solutions in autonomous parabolic system of differential equations with retarded argument and small diffusion on the circle. We consider the problem of the existence and stability of traveling waves. We obtain the bifurcation equations.

Питання стійкості та біфуркації розв'язків диференціально-функціональних рівнянь, параболічних та гіперболічних систем з перетвореним аргументом розглядалися, зокрема, в [1 – 5]. У цій статті досліджено існування та стійкість як завгодно великого скінченного числа циклів параболічної системи із запізненням та малою дифузією. Подібні задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними вивчалися у працях [6 – 8] та ін.

1. Періодичні режими та їх стійкість. Нехай $\mathbb{R}^n$ – n-вимірний простір з нормою $|u| = \sqrt{u_1^2 + ... + u_n^2}$, $\mathbb{C} = \mathbb{C}[-\Delta, 0]$ – простір неперервних функцій із значеннями в $\mathbb{R}^n$ з нормою $||\varphi|| = \sup\limits_{-\Delta \le \theta \le 0} |\varphi(\theta)|$. Позначимо через u_t – елемент простору $\mathbb{C}$, заданий функцією $u_t(\theta, x) = u(t + \theta, x)$, $-\Delta \le \theta \le 0$.

Розглянемо параболічну систему із запізнюючим аргументом та малою дифузією

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + L(\varepsilon)u_t + f(u_t, \varepsilon) \qquad (1)$$

і періодичною умовою

$$u(t, x + 2\pi) = u(t, x), \qquad (2)$$

де ε – малий додатний параметр, $u \in \mathbb{R}^n$, $L(\varepsilon) : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^n$ – лінійний неперервний оператор, $f : \mathbb{C} \times [0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^n$, $f(\varphi, \varepsilon) = O(||\varphi||^2)$ при $||\varphi|| \to 0$, оператор f п'ять раз неперервно диференційовний відносно своїх аргументів. Припустимо, що нульовий розв'язок рівняння (1) при $\varepsilon = 0$ асимптотично стійкий.

Поряд з (1) розглянемо лінійні рівняння

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = L(\varepsilon)\tilde{u}_t, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = L(0)\tilde{u}_t. \qquad (4)$$

Згідно з теоремою Рісса оператор $L(\varepsilon)$ можна зобразити у вигляді інтеграла Стілтьєса

$$L(\varepsilon)\varphi = \int_{-\Delta}^{0} [d\eta(\theta, \varepsilon)]\varphi(\theta),$$

де матриця $\eta(\theta, \varepsilon)$ має обмежену варіацію відносно θ. Нехай $\eta(\theta, \varepsilon)$ двічі неперервно диференційовна відносно ε. Характеристичне рівняння для рівняння (3) має вигляд

$$det\Lambda_\varepsilon(\lambda) = 0,\ \Lambda_\varepsilon(\lambda) = \lambda I - \int_{-\Delta}^{0} e^{\lambda\theta} d\eta(\theta, \varepsilon), \qquad (5)$$

де I – одинична матриця. Припустимо, що рівняння (5) має одну пару коренів вигляду $\xi(\varepsilon) \pm i\zeta(\varepsilon)$, $\xi(0) = 0$, $\xi'(0) > 0$, $\zeta(0) > 0$, а інші корені лежать у півплощині $Re\lambda \le \lambda_0 < 0$.

Рівняння (1) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L(0)u_t + F(u_t, \varepsilon), \qquad (6)$$

де $F(u_t, \varepsilon) = \varepsilon D \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + L(\varepsilon)u_t - L(0)u_t + f(u_t, \varepsilon)$. Позначимо через $\tilde{u}_t(\varphi)$ розв'язок рівняння (4) з початковою функцією $\varphi \in \mathbb{C}$. Визначимо оператор зсуву за розв'язками рівняння (4) співвідношенням $T(t)\varphi = \tilde{u}_t(\varphi)$. Сім'я $\{T(t), t \geq 0\}$ утворює сильно неперервну півгрупу. Твірний оператор півгрупи є оператором диференціювання $A\varphi(\theta) = \dfrac{d\varphi(\theta)}{d\theta}$, $-\Delta \leq \theta \leq 0$, з областю визначення

$$D(A) = \{\varphi \in \mathbb{C}, \frac{d\varphi}{d\theta} \in \mathbb{C}, \frac{d\varphi(0)}{d\theta} = L(0)\varphi\}.$$

Позначимо через $\mathbb{P}$ власний підпростір в $\mathbb{C}$, породжений розв'язками рівняння (4), що відповідають кореням $\pm i\zeta(0)$. Розкладемо простір $\mathbb{C}$ в пряму суму $\mathbb{C} = \mathbb{P} \oplus \mathbb{Q}$. Нехай $\Phi = \Phi(\theta)$ – базис в $\mathbb{P}$. Розглядаючи спряжене до (4) рівняння, можна аналогічно визначити функцію $\Psi = \Psi(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \Delta$. Тоді кожний елемент $u_t \in \mathbb{C}$ можна зобразити у вигляді $u_t = \Phi y(t) + z_t$, де $y(t) = (\Psi, u_t)$, $z_t = u_t - \Phi y(t)$, $y(t) \in \mathbb{R}^2$, $z_t \in \mathbb{Q}$, (Ψ, u_t) – деякий білінійний функціонал. Рівняння (1) еквівалентне системі рівнянь [1, 2]:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = By + \Psi(0)F(\Phi y + z_t, \varepsilon),$$

$$z_t = T(t-\sigma)z_\sigma + \int_\sigma^t T(t-s)X_0^Q F(\Phi y(s) + \\ + z_s, \varepsilon)ds.$$

Тут X_0^Q – проекція на підпростір Q функції $X_0(\theta) = 0$, $-\Delta \leq \theta < 0$, $X_0(0) = I$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \zeta(0) \\ -\zeta(0) & 0 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно [2] можна довести існування функції $g : \mathbb{R}^2 \times [0, \varepsilon_0) \to \mathbb{Q}$, що задовольняє умови $g(0, \varepsilon) = 0$, $||g(y, \varepsilon) - g(y', \varepsilon)|| \leq \dfrac{1}{2}|y - y'|$ і такої, що множина $S_\varepsilon = \{(\varphi, \varepsilon)|\varepsilon \in [0, \varepsilon_0), \varphi = \Phi y + \vartheta, y \in \mathbb{R}^2, \vartheta = g(y, \varepsilon), \vartheta \in \mathbb{Q}\}$ є локальним інтегральним многовидом рівняння (6). Функція $g(y, \varepsilon)$ буде чотири рази неперервно диференційовною відносно y. Поведінка розв'язків рівняння (6) на інтегральному многовиді S_ε описується рівнянням

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Bv + \Psi(0)F(\Phi v + g(v, \varepsilon), \varepsilon), \qquad (7)$$

де $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Для кожного розв'язку $u_t = \Phi y(t) + z_t$ рівняння (6) існує розв'язок $\chi_t = \Phi v(t) + g(v(t), \varepsilon)$, що належить S_ε і такий, що правильна оцінка

$$||u_t - \chi_t|| \leq Ke^{-\nu t}, \quad K > 0, \quad \nu > 0.$$

У рівнянні (7) збережемо в лінійних доданках члени порядку $O(\varepsilon)$. Тоді одержимо рівняння

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Bv + \varepsilon\Psi(0)D\Phi(0)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \varepsilon\Psi(0)\times \\ \times L'(0)\Phi v + \Psi(0)f(\Phi v + g(v, \varepsilon), \varepsilon). \qquad (8)$$

Перейшовши до комплексних змінних $w = v_1 + iv_2$, $\overline{w} = v_1 - iv_2$, одержимо рівняння вигляду

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon(\gamma_1 + i\delta_1)\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial x^2} - i\zeta(0)w + \\ + \varepsilon(\alpha + i\beta)w + \varepsilon(\alpha_1 + i\beta_1)\overline{w} + W(w, \overline{w}, \varepsilon), \quad (9)$$

де

$$(\gamma + i\delta)w + (\gamma_1 + i\delta_1)\overline{w} = (1, i)\Psi(0)D\Phi(0)v,$$

$$(\alpha + i\beta)w + (\alpha_1 + i\beta_1)\overline{w} = (1, i)\Psi(0)\times \\ \times L'(0)\Phi v, \ \alpha = \xi'(0), \ \beta = \zeta'(0),$$

$$W(w, \overline{w}, \varepsilon) = (1, i)\Psi(0)f(\Phi v + g(v, \varepsilon), \varepsilon).$$

Перетворимо рівняння (9) за допомогою підстановки

$$w = s + V_2(s, \overline{s}) + V_3(s, \overline{s}), \qquad (10)$$

де V_2 і V_3 – форми відповідно другого і третього порядку. Перетворення (10) можна підібрати так, що рівняння для s набере вигляду

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \varepsilon(\gamma + i\delta)\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \varepsilon(\gamma_1 + i\delta_1)\frac{\partial^2 \overline{s}}{\partial x^2} - i\zeta(0)s + \\ + \varepsilon(\alpha + i\beta)s + \varepsilon(\alpha_1 + i\beta_1)\overline{s} + (d_0 + ic_0)s^2\overline{s} + \ldots \qquad (11)$$

Тут у лінійних доданках збережено члени порядку $O(\varepsilon)$, а в нелінійних – $O(1)$.

Дослідимо існування і стійкість хвильових розв'язків задачі (1), (2). Розв'язок рівняння (11) будемо шукати у вигляді біжучої хвилі $s = \theta(y)$, $y = \sigma t + x$, де функція $\theta(y)$ має період 2π. Тоді одержимо рівняння

$$\sigma\frac{d\theta}{dy} = \varepsilon(\gamma+i\delta)\frac{d^2\theta}{dy^2}+\varepsilon(\gamma_1+i\delta_1)\frac{d^2\overline{\theta}}{dy^2}-i\zeta(0)\theta+$$

$$+\varepsilon(\alpha+i\beta)\theta+\varepsilon(\alpha_1+i\beta_1)\overline{\theta}+(d_0+ic_0)\theta^2\overline{\theta}+\ldots$$

Це рівняння заміною $\dfrac{d\theta}{dy} = \theta_1$ зведемо до вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = \theta_1,\ \sigma\theta_1 = \varepsilon(\gamma+i\delta)\frac{d\theta_1}{dy}+\varepsilon(\gamma_1+$$

$$+i\delta_1)\frac{d\overline{\theta}_1}{dy}-i\zeta(0)\theta+\varepsilon(\alpha+i\beta)\theta+\varepsilon(\alpha_1+$$

$$+i\beta_1)\overline{\theta}+(d_0+ic_0)\theta^2\overline{\theta}+\ldots. \qquad (12)$$

Інтегральний многовид системи (12) можна зобразити у вигляді

$$\theta_1 = -\frac{\zeta(0)}{\sigma}i\theta+\frac{\varepsilon}{\sigma}\Bigg[-\frac{\zeta^2(0)}{\sigma^2}(\gamma+i\delta)\theta-\frac{\zeta^2(0)}{\sigma^2}\times$$

$$\times(\gamma_1+i\delta_1)\overline{\theta}+(\alpha+i\beta)\theta+(\alpha_1+i\beta_1)\overline{\theta}\Bigg]+$$

$$+\frac{d_0+ic_0}{\sigma}\theta^2\overline{\theta}+\ldots.$$

Тут в лінійних доданках збережено члени порядку $O(\varepsilon)$, а в нелінійних – $O(1)$. Рівняння на цьому многовиді набере вигляду

$$\frac{d\theta}{dy} = -\frac{\zeta(0)}{\sigma}i\theta+\frac{\varepsilon}{\sigma}\Bigg[-\frac{\zeta^2(0)}{\sigma^2}(\gamma+i\delta)\theta-\frac{\zeta^2(0)}{\sigma^2}\times$$

$$\times(\gamma_1+i\delta_1)\overline{\theta}+(\alpha+i\beta)\theta+(\alpha_1+i\beta_1)\overline{\theta}\Bigg]+$$

$$+\frac{d_0+ic_0}{\sigma}\theta^2\overline{\theta}+\ldots.$$

У цьому рівнянні зробимо заміну $\theta = p\exp\left(-\dfrac{\zeta(0)}{\sigma}iy\right)$ і усереднимо одержане рівняння відносно y [9]. Тоді одержимо автономне рівняння вигляду

$$\frac{dp}{dy} = \frac{\varepsilon}{\sigma}\left[-\frac{\zeta^2(0)}{\sigma^2}(\gamma+i\delta)p+(\alpha+i\beta)p\right]+$$

$$+\frac{d_0+ic_0}{\sigma}p^2\overline{p}. \qquad (13)$$

Перейшовши у рівнянні (13) до полярних координат $p = r\exp(i\varphi)$, отримаємо рівняння

$$\frac{dr}{dy} = -\varepsilon\frac{\zeta^2(0)\gamma}{\sigma^3}r+\varepsilon\frac{\alpha}{\sigma}r+\frac{d_0}{\sigma}r^3. \qquad (14)$$

Нехай виконуються нерівності $\gamma > 0$, $d_0 < 0$, $\alpha\sigma^2 > \zeta^2(0)\gamma$. Тоді рівняння (14) має стаціонарний розв'язок

$$r = \sqrt{\varepsilon}R_0, \quad R_0 = \sqrt{\left(\alpha-\frac{\zeta^2(0)\gamma}{\sigma^2}\right)|d_0|^{-1}},$$

отже, періодичний розв'язок системи (12) має вигляд $\theta = \sqrt{\varepsilon}R_0\exp\left(-\dfrac{\zeta(0)}{\sigma}iy\right)+O(\varepsilon)$, $\theta_1 = \dfrac{d\theta}{dy}$. Враховуючи, що функція θ повинна мати період 2π, одержуємо $\sigma = -\dfrac{\zeta(0)}{n}+O(\varepsilon)$, $n = \pm1, \pm2, \ldots$, отже, періодичний розв'язок рівняння (11) має вигляд

$$s_n = s_n(t,x) = \sqrt{\varepsilon}r_n\exp(i(\chi_n(\varepsilon)t+nx)), \qquad (15)$$

де $r_n = \sqrt{(\alpha-n^2\gamma)\,|d_0|^{-1}}$, $\chi_n(\varepsilon) = -\zeta(0)+\varepsilon\beta+\varepsilon c_0r_n^2-\varepsilon\delta n^2$. Звідси одержимо періодичний розв'язок задачі (1), (2)

$$u_n = u_n(t,x) = \sqrt{\varepsilon}r_n\cos(\chi_n(\varepsilon)t+nx). \qquad (16)$$

Рівняння у варіаціях в околі розв'язку (15) рівняння (11) має вигляд

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -i\zeta(0)v+\varepsilon(\gamma+i\delta)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\varepsilon(\gamma_1+$$

$$+i\delta_1)\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial x^2}+\varepsilon(\alpha+i\beta)v+\varepsilon(\alpha_1+i\beta_1)\overline{v}+$$

$$+(d_0+ic_0)(2\varepsilon r_n^2v+s_n^2\overline{v}).$$

Зробивши заміну $v = w\exp(i\chi_n(\varepsilon)t)$ і усереднивши одержане рівняння відносно t, одержимо рівняння

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \varepsilon[(\gamma+i\delta)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(\alpha+i\delta n^2+d_0r_n^2)w+$$

$$+(d_0+ic_0)r_n^2(w+\overline{w}\exp(2inx))]. \qquad (17)$$

Розв'язок рівняння (17) будемо шукати у вигляду ряду Фур'є в комплексній формі

$$w(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k(t)\exp(ikx),$$

$$\overline{w}(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k(t)\exp(ikx). \qquad (18)$$

Підставляючи (18) в (17) і зрівнюючи коефіцієнти при $\exp(ikx)$, одержимо рівняння відносно коефіцієнтів ряду Фур'є

$$\frac{dy_{k+n}}{dt} = \varepsilon[(\alpha + i\delta n^2 + d_0 r_n^2)y_{k+n} - (\gamma + i\delta)(k+$$

$$+n)^2 y_{k+n} + (d_0 + ic_0)r_n^2(y_{k+n} + v_{k-n})]. \quad (19)$$

Аналогічно підставляючи (18) у спряжене до (17) рівняння, одержимо

$$\frac{dv_{k-n}}{dt} = \varepsilon[(\alpha - i\delta n^2 + d_0 r_n^2)v_{k-n} - (\gamma - i\delta)(k-$$

$$-n)^2 v_{k-n} + (d_0 - ic_0)r_n^2(v_{k-n} + y_{k+n})]. \quad (20)$$

Стійкість хвильових розв'язків задачі (1), (2) визначається стійкістю системи (19), (20) з параметром $k \in \mathbb{Z}$. У системі (19), (20) зробимо заміну $y_{k+n} = z_{k+n}\exp(2i\delta kn)$, $v_{k-n} = w_{k-n}\exp(2i\delta kn)$. Тоді одержимо лінійну систему з матрицею $\varepsilon A = \begin{pmatrix} \varepsilon a_{11} & \varepsilon a_{12} \\ \varepsilon a_{21} & \varepsilon a_{22} \end{pmatrix}$. Оскільки $\alpha - \gamma n^2 = -d_0 r_n^2$, то матриця A має нульове власне значення при $k = 0$. Оскільки сума діагональних елеменетів матриці A від'ємна, $a = a_{11} + a_{22} < 0$, то для орбітальної експоненціальної стійкості хвильового розв'язку $u_n(t,x)$ необхідно і досить, щоб при $k \neq 0$ виконувалась умова $a^2 c > f^2$, де $c = Re(det(A))$, $f = Im(det(A))$, $f = 4\gamma kn(c_0 r_n^2 - \delta k^2)$, тобто

$$(d_0 r_n^2 - \gamma k^2)^2(\gamma^2 k^2 + \delta^2 k^2 - 2\gamma d_0 r_n^2 -$$

$$-4\gamma^2 n^2 - 2\delta c_0 r_n^2) > 4\gamma^2 n^2 (c_0 r_n^2 - \delta k^2)^2. \quad (21)$$

Тому правильне наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $\gamma > 0$, $d_0 < 0$ і для деякого цілого n виконується нерівність $\alpha > \gamma n^2$. Тоді знайдеться таке $\varepsilon_0 > 0$, що при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ задача (1), (2) має періодичні відносно t розв'язки (16), де $n \in \mathbb{Z}$. Ці розв'язки експоненціально орбітально стійкі тоді і тільки тоді, коли виконується умова (21) при всіх $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$.*

Для наближеного знаходження циклів задачі (1), (2) досить обмежитися членами другого і третього порядку розкладу функції $\Psi(0)f(\Phi v + g(v,0),0)$ в ряд за степенями v. А для цього досить визначити члени другого порядку в розкладі функції $g(v,0)$. Перше наближення функції $g(v,0)$ має вигляд

$$g_1(v,0) = \int_{-\infty}^{0} T(-s)X_0^Q f(\Phi e^{Bs}v, 0)ds.$$

Зобразимо функцію $f(\Phi y, 0)$ у вигляді $f(\Phi y,0) = c_1 y_1^2 + c_2 y_1 y_2 + c_3 y_2^2 + O(|y|^3)$. Тоді знаходження функції $g_1(v,0)$ зводиться до обчислення інтеграла

$$z = \int_{-\infty}^{0} T(-s)X_0^Q e^{i\omega s}ds,$$

де $\omega \in \{0, 2\zeta(0), -2\zeta(0)\}$. Зауважимо, що інтеграл z збіжний.

Теорема 2 [10]. *При довільних дійсних ω функція $z(\theta)$ належить $\mathbb{Q}\bigcap D(A)$ і виконується рівність*

$$i\omega z - Az = X_0^Q. \qquad (22)$$

Для знаходження z потрібно розв'язати рівняння (22) відносно z. Це рівняння рівносильне такій системі

$$\frac{dz(\theta)}{d\theta} - i\omega z(\theta) = -X_0^Q(\theta),\ -\Delta \leq \theta < 0, \quad (23)$$

$$\int_{-\Delta}^{0} [d\eta(\theta,0)]z(\theta) - i\omega z(0) = -X_0^Q(0). \quad (24)$$

Можна показати [10], що система (23), (24) має єдиний розв'язок.

2. Біфуркаційні рівняння для задачі про інваріантні тори. Нехай тепер рівняння (5) має прості корені $\xi_m(\varepsilon) \pm i\zeta_m(\varepsilon)$, $\xi_m(0) = 0$, $\xi_m'(0) > 0$, $\zeta_m(0) > 0$, $m \in \{1,\ldots,p\}$, а решта коренів лежать у півплощині $Re\lambda \leq \lambda_0 < 0$. У цьому випадку власний підпростір $\mathbb{P}$ буде мати розмірність $2p$, причому існує інтегральний многовид $S_\varepsilon = \{(\varphi,\varepsilon)|\,\varepsilon \in [0,\varepsilon_0),\ \varphi = \Phi y + \vartheta,\ y \in \mathbb{R}^{2p},\ \vartheta = g(y,\varepsilon),\ \vartheta \in \mathbb{Q}\}$ рівняння (6). Тоді рівняння на многовиді зводиться до вигляду (8), де $v \in \mathbb{R}^{2p}$, а матриця B має власні значення $\pm i\zeta_m(0)$, $m \in \{1,\dots,p\}$. За допомогою невиродженого перетворення T матрицю B можна звести до вигляду $B = TGT^{-1}$, де G – діагональна матриця з елементами $\pm i\zeta_m(0)$ на головній діагоналі. Зробивши в системі (8) заміну $v = Tw$, одержимо систему

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Gw + \varepsilon T^{-1}\Psi(0)D\Phi(0)T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+ \\ +\varepsilon T^{-1}\Psi(0)L'(0)\Phi T w + T^{-1}\Psi(0)f(\Phi T w+ \\ +g(Tw,\varepsilon),\varepsilon). \tag{25}$$

Нехай виконується умова A:

$$n_1\zeta_1(0) + \dots + n_p\zeta_p(0) \neq 0$$

$$\text{при}\quad 0 < |n_1| + \dots + |n_p| < 6,$$

де n_1, ..., n_p – цілі.

Перетворимо систему (25) за допомогою підстановки

$$w = s + \sum_{i=2}^{4} W_i(s,\overline{s},\varepsilon), \tag{26}$$

де W_2, W_3, W_4 – форми відповідно другого, третього і четвертого порядку. Перетворення (26) можна підібрати так, що рівняння для s та $\overline{s}$ набудуть вигляду [6, 9]

$$\frac{\partial s}{\partial t} = Gs + \varepsilon T^{-1}\Psi(0)D\Phi(0)T\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+ \\ +\varepsilon T^{-1}\Psi(0)L'(0)\Phi T s + S(s,\overline{s},\varepsilon) + O(|s|^5), \tag{27}$$

де $S(s,\overline{s},\varepsilon)$ – вектор-функція з елементами $S_m = s_m\sum_{j=1}^{p} a_{mj}(\varepsilon)s_j\overline{s}_j$. У рівнянні (27) зробимо заміну $s = \exp(Gt)\chi$ і усереднимо одержане рівняння відносно t. Тоді отримаємо рівняння

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = \varepsilon H\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \varepsilon J\chi + S(\chi,\overline{\chi},\varepsilon) + O(|\chi|^5), \tag{28}$$

де H та J – діагональні матриці з діагональними елементами h_m та j_m відповідно. Розв'язок рівняння (28) будемо шукати у вигляду ряду Фур'є в комплексній формі. Якщо в рівнянні для кофіцієнтів Фур'є перейти до полярних координат, то отримаємо біфуркаційні рівняння вигляду $B(\varepsilon)r^2+\varepsilon\Theta-\varepsilon n^2\Gamma = 0$, де $n \in \mathbb{Z}$, Θ та Γ – вектори з елементами $Re\,j_m$ та $Re\,h_m$ відповідно, $B(\varepsilon)$ – матриця з елементами $Re\,a_{mj}$, r^2 – шуканий вектор з елементами r_j^2. Якщо існує розв'язок біфуркаційного рівняння, то існує інваріантний тор задачі (1), (2).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
2. *Фодчук В.И., Клевчук И.И.* Интегральные множества и принцип сведения для дифференциально-функциональных уравнений// Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 3. – С. 334 – 340.
3. *Клевчук І.І.* Гомоклінічні точки для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 4. – С. 563 – 567.
4. *Клевчук И.И.* Бифуркация положения равновесия в системе нелинейных параболических уравнений с преобразованным аргументом // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 10. – С. 1342 – 1351.
5. *Клевчук І.І.* Існування зліченного числа циклів у гіперболічних системах диференціальних рівнянь з перетвореним аргументом // Нелінійні коливання. – 2015. – **18**, № 1. – С. 71 – 78.
6. *Белан Е.П., Самойленко А.М.* Динамика периодических режимов феноменологического уравнения спинового горения // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 1. – С. 21 – 43.
7. *Мищенко Е.Ф., Колесов Ю.С., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. – М.: Физматлит, 1995. – 336 с.
8. *Мищенко Е.Ф., Садовничий В.А., Колесов А.Ю., Розов Н.Х.* Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией. – М.: Физматлит, 2005. – 430 с.
9. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 502 с.
10. *Клевчук И.И., Фодчук В.И.* Бифуркация особых точек дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 3. – С. 324 – 330.