

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

## ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ГАРМОНІЙНИМ ОСЦИЛЯТОРОМ

Встановлено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для одного класу еволюційних рівнянь з гармонійним осцилятором та граничною умовою у просторах типу  $S'$ .

We prove the well solvability of a nonlocal multi-point on time problem for a class of the evolution equations with a harmonic oscillator and boundary condition in the spaces of type  $S'$ .

Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу з необмежено зростаючими при  $|x| \rightarrow +\infty$  коефіцієнтами у різних просторах узагальнених функцій (розподілів, ультрарозподілів, гіперфункцій, тощо) досліджені М.Л. Горбачуком, В.І. Горбачук, П.І. Дудниковим, О.І. Кашпіровським, В.В. Городецьким, І.І. Дрінь та ін. (див., наприклад, [1–3]). При цьому описані множини початкових даних задачі Коші, при яких розв'язки є нескінченно диференційовними за просторовими змінними функціями.

Узагальненням задачі Коші є нелокальна багатоточкова за часом задача, коли початкова умова  $u(t, \cdot)|_{t=0} = f$  замінюється умовою  $\sum_{k=0}^m \alpha_k u(t, \cdot)|_{t=t_k} = f$ , де  $t_0 = 0$ ,  $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, T]$ ,  $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  – фіксовані числа (якщо  $\alpha_0 = 1$ ,  $\alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$ , то, маємо, очевидно, задачу Коші). На доцільність використання нелокальних умов з точки зору загальної теорії крайових задач вказав О.О. Дезін [4], який досліджував розв'язні розширення диференціальних операторів, породжених загальною диференціальною операцією зі сталими коефіцієнтами. Він показав, що для постановки коректної крайової задачі необхідно використовувати поруч з локальними і нелокальні умови. А.Х. Мамян [5] встановив, що існують рівняння з частинними похідними в шарі, для яких неможливо сформулювати жодної коректної локальної зада-

чі, водночас коректні задачі існують, якщо залучити нелокальні умови.

У даній роботі встановлюється коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для одного класу еволюційних рівнянь з гармонійним осцилятором у випадку, коли гранична функція є узагальненою функцією типу ультрарозподілів і отожднюється з певним формальним рядом Фур'є-Ерміта. Знайдено аналітичне зображення розв'язку вказаної задачі.

1. Формальні ряди Фур'є-Ерміта. Простори типу  $S$  та  $S'$ 

Позначимо

$$\Phi_m = \left\{ \varphi \in L_2(\mathbb{R}) \mid \varphi = \sum_{k=0}^m c_{k,\varphi} h_k, c_{k,\varphi} \in \mathbb{C} \right\},$$

$$\Phi = \bigcup_m \Phi_m,$$

де

$$h_n(x) = (-1)^n \pi^{-1/4} (2^n n!)^{-1/2} e^{x^2/2} (e^{-x^2/2})^{(n)},$$

$$n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}, -$$

функції Ерміта (які утворюють ортонормований базис в  $L_2(\mathbb{R})$ ), а через  $\Phi'$  – простір усіх антилінійних неперервних функціоналів на  $\Phi$  зі слабюкою збіжністю. Зіставлення

$$\Phi \ni \varphi \rightarrow f_\varphi \in \Phi' : \langle f_\varphi, \psi \rangle = (\varphi, \psi)_{L_2(\mathbb{R})}, \varphi \in \Phi,$$

визначає вкладення  $\Phi \subset \Phi'$  ( $\langle f, \psi \rangle$  позначає дію функціоналу  $f$  на елемент  $\psi \in \Phi$ ). Елементи з  $\Phi'$  називатимемо узагальненими функціями.

Ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k$ , де  $c_k = \langle f, h_k \rangle$ , називається рядом Фур'є-Ерміта функціоналу  $f \in \Phi'$ , а числа  $c_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , – його коефіцієнтами Фур'є. Для довільного елемента  $f \in \Phi'$  його ряд Фур'є-Ерміта збігається в  $\Phi'$  до  $f$ . Навпаки, довільний ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k h_k$  збігається в  $\Phi'$  до деякого елемента  $f \in \Phi'$  і цей ряд є рядом Фур'є-Ерміта для  $f$  [1]. Отже,  $\Phi'$  можна розуміти як простір формальних рядів вигляду  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k h_k$ . Звідси випливає також, що  $\Phi$  лежить щільно в  $\Phi'$ .

І.М. Гельфанд та Г.Є. Шілов ввели в [6] серію просторів, названих ними просторами типу  $S$ . Означимо деякі з них.

Для довільно фіксованих  $\alpha, \beta > 0$  покладемо

$$S_{\alpha}^{\beta}(\mathbb{R}) \equiv S_{\alpha}^{\beta} := \left\{ \varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \mid \exists c > 0 \exists A > 0 \right. \\ \left. \exists B > 0 \forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+ \forall x \in \mathbb{R} : \right. \\ \left. |x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c A^k B^n k^{k\alpha} n^{n\beta} \right\}.$$

Введені простори можна охарактеризувати ще й так [6].  $S_{\alpha}^{\beta}$  складається з тих й лише тих нескінченно диференційовних на  $\mathbb{R}$  функцій, які задовольняють нерівності

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leq c B^n n^{n\beta} \exp(-a|x|^{1/\alpha}), \\ n \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R},$$

з деякими додатними сталими  $c, B$  і  $a$ , залежними лише від функції  $\varphi$ .

Якщо  $0 < \beta < 1$  і  $\alpha \geq 1 - \beta$ , то  $S_{\alpha}^{\beta}$  складається з тих й тільки тих функцій  $\varphi$ , які аналітично продовжуються в  $\mathbb{C}$  і задовольняють нерівність

$$|\varphi(x + iy)| \leq c \exp(-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}),$$

$c, a, b > 0$ .

Простори  $S_{\alpha}^{\beta}$  не є тривіальними за умови  $\alpha + \beta \geq 1$  і утворюють щільні в  $L_2(\mathbb{R})$  множини. При  $\beta > 1$  простір  $S_{\alpha}^{\beta}$  містить фінітні функції.

Топологічна структура в просторі  $S_{\alpha}^{\beta}$  визначається так. Символом  $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ ,  $A, B > 0$ ,

позначимо сукупність функцій  $\varphi \in S_{\alpha}^{\beta}$ , які задовольняють умову:

$$\forall \delta > 0 \forall \rho > 0 \exists c_{\delta\rho} > 0 :$$

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_{\delta\rho} (A + \delta)^k (B + \rho)^n k^{k\alpha} n^{n\beta}, \\ \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}.$$

Ця множина перетворюється в повний зліченно нормований простір, якщо в ній ввести систему норм

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x, k, n} \frac{|x^k \varphi^{(n)}(x)|}{(A + \delta)^k (B + \rho)^n k^{k\alpha} n^{n\beta}},$$

$$\{\delta, \rho\} \subset \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}.$$

Якщо  $A_1 < A_2, B_1 < B_2$ , то  $S_{\alpha, A_1}^{\beta, B_1}$  неперервно вкладається в  $S_{\alpha, A_2}^{\beta, B_2}$  і  $S_{\alpha}^{\beta} = \bigcup_{A, B > 0} S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ .

Якщо  $P$  – деякий фіксований многочлен, то у просторі  $S_{\alpha}^{\beta}$  визначена і неперервна операція множення на  $P$ . Звідси, зокрема, випливає, що функції Ерміта  $h_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , належать до простору  $S_{1/2}^{1/2}$ . Справді,  $|\exp(-z^2/2)| = \exp(-x^2/2 + y^2/2)$ , якщо  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  і  $1/\alpha = 1/(1 - \beta) = 2$ , тобто  $\alpha = \beta = 1/2$ ,  $\exp(-x^2/2) \in S_{1/2}^{1/2}$ , а кожна функція Ерміта має вигляд  $P(x) \exp(-x^2/2)$ , де  $P$  – многочлен Ерміта.

В  $S_{\alpha}^{\beta}$  визначені і неперервні операції зсуву аргументу і диференціювання, які переводять  $S_{\alpha}^{\beta}$  в себе. Відзначимо також, що простори  $S_{\alpha}^{\beta}$  є досконалими [6], тобто просторами, усі обмежені множини яких компактні.

Простір усіх лінійних неперервних функціоналів на  $S_{\alpha}^{\beta}$  зі слабкою збіжністю позначатимемо символом  $(S_{\alpha}^{\beta})'$ . Елементи з  $(S_{\alpha}^{\beta})'$  називаються узагальненими функціями типу ультрарозподілів.

У праці [1] доведено, що  $S_{\beta/2}^{\alpha/2} = G_{\{\beta\}}(A)$  при  $\beta \geq 1$ , де  $A$  – гармонійний осцилятор – невід'ємний самоспряжений оператор в  $H = L_2(\mathbb{R})$ , який є замиканням в  $H$  оператора  $-d^2/dx^2 + x^2$ , заданого на множині фінітних нескінченно диференційовних на  $\mathbb{R}$  функцій,

$$G_{\{\beta\}}(A) := \left\{ \varphi \in S \mid \exists c, B > 0 \forall n \in \mathbb{N} : \right.$$

$$\|A^n \varphi\|_H \leq cB^n n^{n\beta} \}.$$

Спектр оператора  $A$  суто дискретний, його власні значення  $\lambda_k = 2k+1$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$ , відповідними власними функціями є функції Ерміта  $h_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}_+$  [1].

Із загальної теорії невід'ємних самоспряжених операторів з дискретним спектром випливає, що простори  $S_{\beta/2}^{\beta/2}$ ,  $(S_{\beta/2}^{\beta/2})'$  при  $\beta \geq 1$  можна охарактеризувати так [1].

Якщо  $f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k h_k \in \Phi'$ ,  $c_k = \langle f, h_k \rangle$ , то правильними є такі співвідношення еквівалентності:

$$\text{а) } (f \in S_{\beta/2}^{\beta/2}) \Leftrightarrow (\exists \mu > 0 \exists c > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+ :$$

$$|c_k| \leq c \exp(-\mu \lambda_k^{1/\beta}), \quad \lambda_k = 2k + 1);$$

$$\text{б) } (f \in (S_{\beta/2}^{\beta/2})') \Leftrightarrow (\forall \mu > 0 \exists c = c(\mu) > 0 \forall k \in \mathbb{Z}_+ :$$

$$|c_k| \leq c \exp(\mu \lambda_k^{1/\beta}), \quad \lambda_k = 2k + 1).$$

**2. Нелокальна багатоточкова задача.** Розглянемо еволюційне рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha(t)Au = 0, \quad (t, x) \in (0, T] \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \quad (1)$$

де  $A$  – гармонійний осцилятор,  $\alpha: (0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  – неперервна додатна функція, яка задовольняє умову

$$\exists L_1, L_2, p > 0 \forall t \in (0, T] :$$

$$L_1 t^p \leq \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \leq L_2 t^p,$$

тобто, розглядається випадок "слабкого виводження" [7].

Під розв'язком рівняння (1) розумітимемо функцію  $u(t, \cdot) \in C^1((0, T], S_{1/2}^{1/2})$ , яка задовольняє рівняння (1).

Для (1) поставимо нелокальну багатоточкову за часом задачу: знайти розв'язок рівняння (1), який задовольняє умову

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot) - \sum_{n=1}^m \mu_n \lim_{t \rightarrow t_k} u(t, \cdot) = g, \quad (2)$$

$$g \in (S_{1/2}^{1/2})',$$

де  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, \infty)$ ,  $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, \infty)$  – фіксовані числа,  $\mu > \sum_{n=1}^m \mu_n$ ,  $t_1 < t_2 < \dots < t_m$ , граничні співвідношення (2) розглядаються в просторі  $(S_{1/2}^{1/2})'$ .

Із результатів, наведених в [8] випливає, що задача (1), (2) коректно розв'язна, розв'язок дається формулою

$$u(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(g) h_k(x) = \langle g, G_{t,x}(\cdot) \rangle, \quad \lambda_k = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}_+,$$

де

$$Q_1(t, \lambda_k) = \exp(-\gamma(t)\lambda_k), \quad \gamma(t) = \int_0^t \alpha(\tau) d\tau,$$

$$Q_2(\lambda_k) = \left( \mu - \sum_{n=1}^m \mu_n \exp(-\gamma(t_n)\lambda_k) \right)^{-1} \equiv \left( \mu - \sum_{n=1}^m \mu_n Q_1(t_n, \lambda_k) \right)^{-1},$$

$$G_{t,x}(y) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) h_k(x) h_k(y),$$

при цьому  $u(t, \cdot) \in S_{1/2}^{1/2}$ ,  $G_{t,x}(\cdot) \in S_{1/2}^{1/2}$  при кожному  $t > 0$  і  $x \in \mathbb{R}$ .

Оскільки

$$\mu - \sum_{n=1}^m \mu_n \exp(-\gamma(t_n)\lambda_k) = \mu \left( 1 - \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^m \mu_n \exp(-\gamma(t_n)\lambda_k) \right),$$

причому

$$\frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^m \mu_n \exp(-\gamma(t_n)\lambda_k) \leq \frac{1}{\mu} \sum_{n=1}^m \mu_n < 1,$$

то, скориставшись поліноміальною формулою, знайдемо, що

$$Q_2(\lambda_k) = \frac{1}{\mu} \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-r} \left( \sum_{n=1}^m \mu_n e^{-\gamma(t_n)\lambda_k} \right)^r =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r!}{r_1! \dots r_m!} \left( \mu_1 e^{-\gamma(t_1)\lambda_k} \right)^{r_1} \times \text{Зокрема, якщо } g = \delta \in (S_{1/2}^{1/2})', \text{ де } \delta - \\
&\quad \times \dots \left( \mu_m e^{-\gamma(t_m)\lambda_k} \right)^{r_m} = \text{дельта-функція Дірака, то} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r! \mu_1^{r_1} \dots \mu_m^{r_m}}{r_1! \dots r_m!} \times \\
&\quad \times e^{-(\gamma(t_1)r_1+\dots+\gamma(t_m)r_m)\lambda_k}.
\end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned}
G_{t,x}(y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \mu^{-(r+1)} \times \\
&\times \sum_{r_1+\dots+r_m=r} \frac{r! \mu_1^{r_1} \dots \mu_m^{r_m}}{r_1! \dots r_m!} e^{-\lambda(t,r)\lambda_k} h_k(x) h_k(y),
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\lambda(t,r) &= \gamma(t_1)r_1 + \dots + \gamma(t_m)r_m + \gamma(t), \\
\lambda_k &= 2k + 1, k \in \mathbb{Z}_+.
\end{aligned}$$

Зауважимо, що у випадку двоточнової задачі ( $m = 1, \mu > \mu_1, \mu_2 = \dots = 0$ )

$$\begin{aligned}
Q_2(\lambda_k) &= (\mu - \mu_1 e^{-\gamma(t_1)\lambda_k})^{-1} = \\
&= \mu^{-1} \left( 1 - \frac{\mu_1}{\mu} e^{-\gamma(t_1)\lambda_k} \right)^{-1} = \\
&= \mu^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} \left( \frac{\mu_1}{\mu} \right)^r e^{-\gamma(t_1)r\lambda_k},
\end{aligned}$$

$$G_{t,x}(y) = \mu^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} \left( \frac{\mu_1}{\mu} \right)^r \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(\gamma(t_1)r+\gamma(t))\lambda_k} \times \\
\times h_k(x) h_k(y).$$

Урахувавши результати, наведені в [3, с. 53–54] знайдемо, що

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} e^{-(\gamma(t_1)r+\gamma(t))\lambda_k} h_k(x) h_k(y) &= (2\pi \operatorname{sh}(2(\gamma(t_1)r + \\
&+ \gamma(t))))^{-1/2} \exp(\operatorname{sh}^{-1}(2(\gamma(t_1)r + \gamma(t))xy - \\
&- \frac{1}{2} \operatorname{cth}(2(\gamma(t_1)r + \gamma(t))))(x^2 + y^2)) \equiv K_r(t, x, y).
\end{aligned}$$

Отже,

$$G_{t,x}(y) = \mu^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} \left( \frac{\mu_1}{\mu} \right)^r K_r(t, x, y).$$

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= \langle \delta, G_{t,x}(\cdot) \rangle = G_{t,x}(0) = \\
&= \mu \sum_{r=0}^{\infty} \left( \frac{\mu_1}{\mu} \right)^r K_r(t, x, 0), (t, x) \in \Omega.
\end{aligned}$$

Якщо ж  $\mu = 1, \mu_1 = 0$  (випадок задачі Коші),  $g = \delta \in (S_{1/2}^{1/2})'$ , то

$$\begin{aligned}
u(t, x) &= (2\pi \operatorname{sh}(2\gamma(t)))^{-1/2} \times \\
&\times \exp\left(-\frac{1}{2} \operatorname{cth}(2\gamma(t))x^2\right), (t, x) \in \Omega.
\end{aligned}$$

Рівняння (1) є базовим при дослідженні рівняння вигляду

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \alpha(t) \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\varphi(x) \frac{\partial u}{\partial x} + \right. \\
&\left. + (\varphi^2(x) + \varphi'(x) - x^2)u \right], (t, x) \in \Omega, \quad (3)
\end{aligned}$$

де  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – нескінченно диференційовна функція така, що функція  $e^F$ , де  $F$  – первісна для  $\varphi$ , є мультиплікатором у просторі  $S_{1/2}^{1/2}$ , тобто [6]

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon > 0 \exists c = c(\varepsilon) > 0 \forall q \in \mathbb{Z}_+ \forall x \in \mathbb{R} : \\
|D_x^q(\exp(F(x)))| &\leq c_\varepsilon \varepsilon^q q^{q/2} \exp(\varepsilon x^2).
\end{aligned}$$

Зауважимо, що рівняння вигляду (3) виникають у сучасній теорії сигналів (див. [9]).

Для рівняння (3) задамо умову (2). Для доведення коректної розв'язності  $m$ -точнової задачі (3), (2) здійснимо заміну  $u(t, x) = e^{-F(x)}v(t, x)$ ,  $(t, x) \in \Omega$ . У результаті прийдемо до  $m$ -точнової за часом задачі

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \alpha(t)Av = 0, (t, x) \in \Omega, \quad (4)$$

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} v(t, \cdot) - \sum_{n=0}^m \mu_n \lim_{t \rightarrow t_n} v(t, \cdot) = ge^F, \quad (5)$$

при цьому  $ge^F \in (S_{1/2}^{1/2})'$ , оскільки  $e^F$  – мультиплікатор у просторі  $(S_{1/2}^{1/2})'$ . Отже, задача (4), (5) коректно розв'язна, її розв'язок дається формулою

$$v(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k (ge^F) h_k(x) =$$

$$= \langle ge^F, G_{t,x}(\cdot) \rangle = \langle g, e^{F(y)} G_{t,x}(y) \rangle,$$

$$\lambda_k = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}_+.$$

Зауважимо, що  $e^F G_{t,x} \in S_{1/2}^{1/2}$  при кожному  $t > 0$  і  $x \in \mathbb{R}$ , оскільки, за умовою,  $e^F$  – мультиплікатор у просторі  $S_{1/2}^{1/2}$ . Врахувавши тепер, що  $u = e^{-F}v$ , дістаємо таке твердження.

**Теорема 1.** При вказаних обмеженнях на функції  $\alpha$  і  $\varphi$  багатоточкова задача (3), (2) коректно розв'язна, розв'язок дається формулою

$$u(t, x) = \langle g, e^{-F(x)+F(\cdot)} G_{t,x}(\cdot) \rangle,$$

$$g \in (S_{1/2}^{1/2})', (t, x) \in \Omega,$$

$$u(t, \cdot) \in S_{1/2}^{1/2} \text{ при кожному } t > 0.$$

Розглянемо тепер рівняння

$$f_0(x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} =$$

$$= \alpha(t) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (f_0(x)u(t, x)), (t, x) \in \Omega, \quad (6)$$

для якого задамо умову

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot) - \sum_{n=1}^m \mu_n \lim_{t \rightarrow t_n} u(t, \cdot) = g, \quad (7)$$

$$g \in (S_{1/2}^{1/2})'$$

обмеження на параметри  $\mu, \mu_1, \dots, \mu_m, t_1, \dots, t_m$  та функцію  $\alpha$  такі ж, як і у випадку задачі (1), (2) (або (3), (2)),  $f_0$  – фіксована функція з простору  $C^\infty(\mathbb{R})$ , яка задовольняє умови:

1)  $f_0$  – мультиплікатор у просторі  $S_{1/2}^{1/2}$ , 2)  $\frac{1}{f_0} \in C^\infty(\mathbb{R})$ .

Здійснивши заміну  $f_0(x)u(t, x) = v(t, x)$ ,  $(t, x) \in \Omega$ , прийдемо до  $m$ -точкової задачі вигляду (4), (5) з граничною функцією  $f_0g \in (S_{1/2}^{1/2})'$ . Звідси вже випливає, що багатоточкова задача (6), (7) коректно розв'язна, при цьому

$$u(t, x)f_0(x) \equiv v(t, x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} Q_1(t, \lambda_k) Q_2(\lambda_k) c_k(f_0g) h_k(x) =$$

$$= \langle f_0g, G_{t,x}(\cdot) \rangle = \langle g, f_0(\cdot) G_{t,x}(\cdot) \rangle, (t, x) \in \Omega.$$

Отже,

$$u(t, x) = \left\langle g, \frac{f_0(\cdot)}{f_0(x)} G_{t,x}(\cdot) \right\rangle, (t, x) \in \Omega.$$

Зазначимо, що рівняння (6) можна подати у вигляді

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \alpha(t) \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{2f_0'(x)}{f_0(x)} \frac{\partial}{\partial x} + \left( \frac{f_0''(x)}{f_0(x)} - x^2 \right) \right] u(t, x). \quad (8)$$

Якщо за функцію  $f_0$  взяти функцію вигляду  $e^F$ , то (8) перетворюється у рівняння (3).

Зауважимо також, що простір  $(S_{1/2}^{1/2})'$  є максимальним простором граничних даних, які забезпечують коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння (8) у вказаному розумінні.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 283 с.
2. Горбачук М.Л., Дудников П.И. О начальных данных задачи Коши для параболических уравнений, при которых решения бесконечно дифференцируемы // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 4. – С. 9–11.
3. Городецький В.В. Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 219 с.
4. Дезин А.А. Операторы с первой производной по "времени" и нелокальные граничные условия // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1967. – Т. 31, № 1. – С. 61–86.
5. Мамян А.Х. Общие граничные задачи в слое // Докл. АН СССР. – 1982. – Т. 267, № 2. – С. 292–296.
6. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.
7. Горбачук М.Л., Пивторак Н.И. О решениях эволюционных уравнений параболического типа с вырождением // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 8. – С. 1317–1324.

- 
8. *Городецький В.В., Широковських А.О.* Нелокальна багаточкова задача для еволюційних рівнянь з гармонійним осцилятором // Буковинський математичний журнал. – Т. 3, № 1. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2015. – С. 30–44.
  9. *Тихонов В.И., Кульман Н.К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. – М.: Сов. радио, 1975. – 703 с.