УДК 517.925

©2016 р. О.О. Чепок

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ ПОВІЛЬНО ЗМІННИХ РОЗ'ЯЗКІВ ДВОЧЛЕННИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З НЕЛІНІЙНОСТЯМИ РІЗНИХ ТИПІВ

Роботу присвячено дослідженню достатньо широкого класу повільно змінних розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з правильно та швидко змінними нелінійностями. Отримано необхідні і достатні умови існування, а також асимптотичні зображення таких розв'язків та їх похідних першого порядку при прямуванні аргументу до особливої точки.

The work is devoted to researching of the sufficiently wide class of slowly varying solutions of the second order differential equations with regularly and rapidly varying nonlinearities. We have The necessary and sufficient conditions of the existence of such solutions were obtained. The representations for such solutions and their derivatives of the first order as the argument tends to the singulary point were also found.

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1}$$

у якому $\alpha_0 \in \{-1;1\}, p : [a,\omega[\to]0,+\infty[$ $(-\infty < a < \omega \le +\infty)$ — неперервно диференційовна функція, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0,+\infty[$ – неперервні функції $(i \in \{0,1\})$, $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_{Y_i} – або проміжок $[y_i^0, Y_i[$, або – $]Y_i, y_i^0]$. При $Y_i = +\infty$ $(Y_i = -\infty)$ вважаємо, що $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ відповідно.

Крім того, будемо вважати, що функція φ_1 є правильно змінною (див.,напрклад, [1,2]) при $z \to Y_1 (z \in \Delta_{Y_1})$ порядку σ_1, а функція φ_0 двічи неперервно диференційовна, монотонна на Δ_{Y_0} і така, що:

$$\lim_{\substack{z\to Y_0\\ z\in\Delta_{Y_0}}} \varphi_0(z) \in \{0, +\infty\} \tag{2}$$

та

$$\lim_{\substack{z\to Y_0\\ z\in\Delta_{Y_0}}} \frac{\varphi_0(z)\varphi_0''(z)}{(\varphi_0'(z))^2} = 1. \tag{3}$$

Розв'язок y рівняння (1) будемо називати $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язком $(-\infty \le \lambda_0 \le +\infty)$, якщо він визначений на $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$ та при кожному $i \in \{0,1\}$ виконуються умови

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i, \tag{4}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0. \tag{5}$$

У даній роботі роглядаються особливі розв'язки, для яких $\lambda_0 = 0$. За властивостями таких розв'язків (див., наприклад, [3]) маємо, що кожен з них є повільно змінною функцією при $t \uparrow \omega$. За рахунок цього випадок $\lambda_0 = 0$ є одним з найскладніших для вивчення. Наразі задача дослідження $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язків для рівнянь з швидко змінною нелінійністю ускладнена тим, що композиція швидко та повільно змінних функцій може бути швидко, правильно, або повільно змінною при прямуванні аргументу до особливої точки.

Введемо необхідні надалі означення.

Нехай $Y \in \{0, \pm\infty\}$, Δ_Y — деякий однобічний окіл Y. Неперервно диференційовна функція $L : \Delta_Y \to]0;+\infty[$ називається нормалізованою повільно змінною функцією (див., наприклад,[2]) при $z \to Y \quad (z \in \Delta_Y)$, якщо

$$\lim_{\substack{z\to Y_1\\ z\in\Delta_{Y_i}}} \frac{zL'(z)}{L(z)} = 0.$$

Говорять, що повільно змінна при $z \to Y$ $(z \in \Delta_Y)$ функція $\theta : \Delta_Y \to]0;+\infty[$ задовільняє умову S, якщо для будь-якої нормалізованої повільно змінної при $z \to Y \quad (z \in \Delta_Y)$ функції $L : \Delta_Y \to]0;+\infty[$ має місце співвідношення при $z \to Y \quad (z \in \Delta_Y)$:

$$\theta(zL(z)) = \theta(z)[1 + o(1)].$$

Введемо наступні позначення:

$$\pi_\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{якщо } \omega = +\infty, \\ t - \omega, & \text{якщо } \omega < +\infty. \end{cases}$$

$$\theta_1(z) = \varphi_1(z)|z|^{-\sigma_1},$$

$$I(t) = \operatorname{sign}(y_1^0) \times$$

$$\times \int_{B_\omega^0}^{t} \left| \pi_\omega(\tau) p(\tau) \theta_1 \left(\frac{\operatorname{sign}(y_1^0)}{|\pi_\omega(\tau)|} \right) \right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau,$$

$B_\omega^0 = b$, якщо

$$\int_b^\omega \left| \pi_\omega(\tau) p(\tau) \theta_1 \left(\frac{\operatorname{sign}(y_1^0)}{|\pi_\omega(\tau)|} \right) \right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau = +\infty,$$

та $B_\omega^0 = \omega$, якщо

$$\int_b^\omega \left| \pi_\omega(\tau) p(\tau) \theta_1 \left(\frac{\operatorname{sign}(y_1^0)}{|\pi_\omega(\tau)|} \right) \right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau < +\infty,$$

$$\Phi_0(z) = \int_{A_\omega^0}^{z} |\varphi_0(y)|^{\frac{1}{\sigma_1 - 1}} dy,$$

$$A_\omega^0 = \begin{cases} y_0^0, & \text{якщо } \int_{y_0^0}^{Y_0} |\varphi_0(y)|^{\frac{1}{\sigma_1-1}} dy = +\infty, \\ Y_0, & \text{якщо } \int_{y_0^0}^{Y_0} |\varphi_0(y)|^{\frac{1}{\sigma_1-1}} dy < +\infty, \end{cases}$$

$$q_1 = \lim_{\substack{z \to Y_0 \\ z \in \Delta_{Y_0}}} \Phi(z).$$

Зауваження 1. Справедливим є твердження

$$\Phi(z) = (\sigma_1 - 1) \frac{\varphi_0^{\frac{\sigma_1}{\sigma_1 - 1}}(y)}{\varphi_0'(y)} [1 + o(1)]$$

при $z \to Y_0 \quad (z \in \Delta_{Y_0})$, звідки, при $z \in \Delta_{Y_0}$

$$\operatorname{sign}(\varphi_0'(z)\Phi(z)) = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - 1}.$$

Зауваження 2. З умов (2) та (3) на функцію φ_0 випливає, що $q_1 \in \{0, +\infty\}$ та

$$\lim_{\substack{z \to Y_0 \\ z \in \Delta_{Y_0}}} \frac{\Phi''(z) \cdot \Phi(z)}{(\Phi'(z))^2} = 1.$$

Отримана наступна теорема.

Теорема. *Нехай $\sigma_1 \neq 1$, константа γ_0 така, що $(\gamma_0 + 1) < 0$, при $Y_0 = 0$, та $(\gamma_0 + 1) > 0$ у іншому випадку, функція θ_1 задовольняє умову S та існує скінченна чи нескінченна границя $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) I'(t)}{I(t)}$. Тоді для існування у рівняння* (1) *$P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язків таких, що існує скінченна чи нескінченна границя $\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)}$, необхідно виконання умов*

$$\alpha_0 \pi_\omega(t) y_1^0 < 0 \quad \text{при } t \in [a; \omega[, \tag{6}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{y_1^0}{|\pi_\omega(t)|} = Y_1, \tag{7}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} I(t) = q_1, \quad \lim_{t \uparrow \omega} \Phi^{-1}(I(t)) = Y_0, \tag{8}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{I'(t)\pi_\omega(t)}{\Phi'\left(\Phi^{-1}(I(t))\right) \Phi^{-1}(I(t))} = 0. \tag{9}$$

Якщо функція $\frac{\pi_\omega(t) \cdot I'(t)}{I(t)}$ є нормалізованою повільно змінною функцією при $t \uparrow \omega$ функція $\left(\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right)$ є правильно змінною порядку γ_0 при $z \to Y_0$ $(z \in \Delta_{Y_0})$ та або

$$\lim_{t \uparrow \omega} \left| \frac{\pi_\omega(t) I'(t)}{I(t)} \right| < +\infty, \tag{10}$$

або має місце наступна умова при $t \in [a, \omega[$

$$\pi_\omega(t) \cdot I(t) \cdot I'(t)(1 - \sigma_1) > 0, \tag{11}$$

то (6) – (9) *є достатніми умовами для існування у рівняння* (1) *таких розв'язків. Більше того, для кожного $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язку мають місце при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення*

$$\Phi(y(t)) = I(t)[1 + o(1)], \tag{12}$$

$$\frac{y'(t)\Phi'(y(t))}{\Phi(y(t))} = \frac{I'(t)}{I(t)}[1 + o(1)]. \tag{13}$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай $y : [t_0, \omega[\to \Delta_{Y_0}$ є $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язком рівняння (1), для якого існує скінченна чи нескінченна границя $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \dfrac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)}$. За властивостями таких розв'язків (див., наприклад, [4], лема 1.4), маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} = 0, \tag{14}$$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y''(t)}{y'(t)} = -1, \tag{15}$$

звідки випливає умова (6).

З (15) також маємо, що функція $y'(t)$ є правильно змінною функцією порядку (-1) при $t \uparrow \omega$, тобто, може бути подана у вигляді $y'(t) = |\pi_\omega(t)|^{-1} L_1(t)$ ([2]), де $L_1(t)$ — повільно змінна при $t \uparrow \omega$ функція. Звідси, з урахуванням властивостей повільно змінних функцій [2], отримуємо справедливість умови (7).

З (1) та (15) випливає при $t \uparrow \omega$

$$\frac{\alpha_0 \pi_\omega(t) p(t) \varphi_0(y(t)) \varphi_1(y'(t))}{y'(t)} = -[1+o(1)]. \tag{16}$$

Оскільки функція L_1 є повільно змінною, то й функція $L_1(Z(t))$, де функція Z є оберненою до функції $\dfrac{\operatorname{sign}(y_1^0)}{|\pi_\omega(t)|}$, є повільно змінною при $t \uparrow \omega$ як композиція повільно та правильно змінної функції [1] , а тому в силу умови S, якій задовольняє функція θ_1, можемо переписати (16) у наступному вигляді при $t \uparrow \omega$:

$$\frac{y'(t)}{|\varphi_0(y(t))|^{\frac{1}{1-\sigma_1}}} = \operatorname{sign}(y_1^0) \times$$

$$\times \left| \pi_\omega(t) \theta_1 \left(\frac{\operatorname{sign}(y_1^0)}{|\pi_\omega(t)|} \right) p(t) \right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} [1 + o(1)]. \tag{17}$$

З (17) у випадку, коли

$$\int\limits_{B_\omega^0}^{\omega} |\pi_\omega(\tau) \theta_1 \left(\frac{\operatorname{sign}(y_1^0)}{|\pi_\omega(t)|} \right) p(\tau)|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau = +\infty,$$

маємо при $t \uparrow \omega$

$$\Phi(y(t)) = I(t)[1 + o(1)]. \tag{18}$$

Якщо

$$\int\limits_{B_\omega^0}^{\omega} \left| \pi_\omega(\tau) \theta_1 \left(\frac{\operatorname{sign}(y_1^0)}{|\pi_\omega(t)|} \right) p(\tau) \right|^{\frac{1}{1-\sigma_1}} d\tau < +\infty,$$

отримаємо або (18), або

$$\lim_{t\uparrow\omega} \Phi(y(t)) = const \neq 0,$$

що не може мати місце, бо з урахуванням зауваження 2:

$$\lim_{t\uparrow\omega} \Phi_0(y(t)) \in \{0; +\infty\}.$$

Таким чином, (18) має місце в обох випадках, а отже, має місце (12) та перша з умов (8).

З (17) та (18) маємо

$$\frac{y'(t)\Phi'(y(t))}{\Phi(y(t))} = \frac{I'(t)}{I(t)} [1 + o(1)] \text{ при } t \uparrow \omega,$$

тобто справедливе асимптотичне зображення (13).

Зауважимо, що функція $\Phi^{-1}(z)$ є повільно змінною $z \to q_1$, як обернена до швидко змінної функції $\Phi(y)$ при $y \to Y_0$ ($Y_0 \in \Delta_{Y_0}$). З урахуванням цього та (17), використовуючи властивості повільно змінних функцій, отримаємо при $t \uparrow \omega$

$$y(t) = \Phi^{-1}(I(t))[1 + o(1)],$$

звідки випливає друга з умов (8).

Розглянемо рівність

$$\lim_{z\to q_1} \frac{\Phi''(\Phi^{-1}(z))z}{(\Phi'(\Phi^{-1}(z)))^2} =$$

$$= \lim_{\substack{z\to q_1 \\ \Phi_1(r)=z}} \frac{\Phi''(\Phi^{-1}(\Phi_1(r)))\Phi_1(r)}{(\Phi'(\Phi^{-1}(\Phi_1(r))))^2} =$$

$$= \lim_{\substack{z\to q_1 \\ \Phi_1(r)=z}} \frac{\Phi''(r)\Phi_1(r)}{\Phi'(r)} = 1.$$

З урахуванням цієї рівності, позначивши

$$\psi(y) = \frac{\Phi'(y)}{\Phi(y)},$$

маємо

$$\lim_{z\to q_1} \frac{z \cdot (\psi(\Phi^{-1}(z)))'}{\psi(\Phi^{-1}(z))} =$$

$$= \lim_{z\to q_1} \frac{z \cdot \left(\dfrac{\Phi'(\Phi^{-1}(z))}{\Phi(\Phi^{-1}(z))}\right)'}{\dfrac{\Phi'(\Phi^{-1}(z))}{\Phi(\Phi^{-1}(z))}} =$$

$$= \lim_{z\to q_1} \frac{z \cdot \left(\dfrac{\Phi'(\Phi^{-1}(z))}{z}\right)'}{\dfrac{\Phi'(\Phi^{-1}(z))}{z}} =$$

$$= \lim_{z\to q_1} \frac{\Phi''(\Phi^{-1}(z))z}{(\Phi'(\Phi^{-1}(z)))^2} - 1 = 0.$$

З останнього випливає, що функція $\psi(\Phi_1^{-1})$ є повільно змінною $z \to q_1$.

З урахуванням (13) та (14), отримаємо при $t \uparrow \omega$

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)y'(t)}{y(t)} \cdot \frac{I'(t)\Phi(y(t))}{y'(t)I(t)\Phi'(y(t))} = 0.$$

З цього співвідношення (13), (18) та того, що функція $\psi(\Phi_1^{-1})$ є повільно змінною $z \to q_1$ маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{\Phi^{-1}(I(t))\Phi'(\Phi^{-1}(I(t)))} = 0.$$

Таким чином доведено виконання умови (9).

Достатність. Нехай функція $\dfrac{\pi_\omega(t)\cdot I'(t)}{I(t)}$ є нормалізованою повільно змінною функцією при $t \uparrow \omega$, функція $\left(\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right)$ є правильно змінною порядку γ_0 при $z \to Y_0$ $(z \in \Delta_{Y_0})$, та виконуються умови (6) — (9) та (10) або (11).

До рівняння (1) застосуємо перетворення

$$\Phi(y(t)) = I(t)[1 + z_1(x)], \tag{19}$$

$$\frac{y'(t)\Phi'(y(t))}{\Phi(y(t))} = \frac{I'(t)}{I(t)}[1 + z_2(x)], \tag{20}$$

де

$$x = \beta \ln|I_0(t)|,\ \beta = \begin{cases} 1, \lim\limits_{t\uparrow\omega} I_0(t) = \infty, \\ \\ -1, \lim\limits_{t\uparrow\omega} I_0(t) = 0, \end{cases} \tag{21}$$

$$I_0(t) = \begin{cases} I(t), & \text{при } \lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)} = \infty, \\ \pi_\omega(t), & \text{при } \lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)} < \infty, \end{cases}$$

Приведемо систему (19)-(21) до системи диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} z_1' = \beta G_1(t(x))\,[z_2 + z_1 z_2]\,; \\ z_2' = \beta G_2(t(x)) \cdot [1 + z_2](N(t(x), z_1, z_2)\times \\ \times(1+z_1)^{\sigma_1 - 1}\cdot(1+z_2)^{\sigma_1-1} + M(t(x), z_1)\times \\ \times \cdot \frac{(1+z_2)\pi_\omega(t(x))I'(t(x))}{\Phi_1'(\Phi_1^{-1}(I(t(x))))\Phi_1^{-1}(I(t(x)))} + Q(t(x))), \end{cases} \tag{22}$$

у якій

$$G_1(t) =$$
$$= \begin{cases} 1, & \text{при } \lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)} = \infty, \\ \frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)}, & \text{при } \lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)} < \infty, \end{cases}$$

$$G_2(t) =$$
$$= \begin{cases} \frac{I(t)}{\pi_\omega(t)I'(t)}, & \text{при } \lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)} = \infty, \\ 1, & \text{при } \lim\limits_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)} < \infty, \end{cases}$$

$$Q(t(x)) = \frac{\pi_\omega(t(x)) \cdot \left(\dfrac{I(t(x))}{I'(t(x))}\right)'}{\dfrac{I(t(x))}{I'(t(x))}},$$

$$N(t, z_1, z_2) =$$
$$= -\frac{\theta_1\left(\dfrac{I'(t(x))\Phi\left(Y(t,z_1)\right)(1+z_2)}{I(t)\Phi'\left(Y(t,z_1)\right)}\right)}{\theta_1\left(|\pi_\omega(t)|^{-1}\mathrm{sign}(y_1^0)\right)},$$

$$Y(t(x), z_1) = \Phi^{-1}(I(t(x))[1 + z_1]),$$

$$\psi(z) = \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)},$$

$$M(t(x), z_1) = \frac{\psi(Y(t, z_1))}{\psi(\Phi^{-1}(I(t(x))))}\times$$
$$\times \frac{\Phi^{-1}(I(t(x))}{\Phi^{-1}(Y(t, z_1))}.$$

Оскільки функція $\dfrac{\pi_\omega(t)\cdot I'(t)}{I(t)}$ є нормалізованою повільно змінною функцією при $t \uparrow \omega$, то

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t)\left(\dfrac{\pi_\omega(t)\cdot I'(t)}{I(t)}\right)'}{\dfrac{\pi_\omega(t)\cdot I'(t)}{I(t)}} = 0. \tag{23}$$

З іншого боку,

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\left(\dfrac{\pi_\omega(t)\cdot I'(t)}{I(t)}\right)'}{\dfrac{\pi_\omega(t)\cdot I'(t)}{I(t)}}=$$

$$=1+\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\left(\dfrac{I'(t)}{I(t)}\right)'}{\dfrac{I'(t)}{I(t)}}.$$

З цієї рівності враховуючи (23) маємо:

$$\lim_{t\uparrow\omega}Q(t)=1. \tag{24}$$

За рахунок того, що функція Φ_1^{-1} є повільно змінною при $z\to q_1$, з урахуванням другої з умов (8) маємо $\lim\limits_{t\uparrow\omega}Y(t,z_1)=Y_0$ рівномірно по $|z_1|<\frac{1}{2}$, $|z_2|<\frac{1}{2}$.

Оскільки $\psi(z)$ — правильно змінна функція порядку γ_0 при $z\to Y_0$ $(z\in\Delta_{Y_0})$, а $\Phi^{-1}(z)$ — повільно змінна при $z\to Y_0$ $(z\in\Delta_{Y_0})$, то функція $\psi(\Phi^{-1}(z))$ є повільно змінною при $z\to q_1$, а тому, і функція $\Phi^{-1}(z)\psi(\Phi^{-1}(z))$ є повільно змінною при $z\to q_1$ як добуток повільно змінних функцій. Таким чином,

$$\lim_{t\uparrow\omega}M(t,z_1)=1 \tag{25}$$

рівномірно по $z_1:|z_1|<\dfrac{1}{2}$.

Для дослідження поведінки функції $N(t,z_1,z_2)$ вивчимо відношення аргументів функції θ_1. Позначимо

$$N_1(t,z_1,z_2)=$$

$$=\frac{I'(t)\Phi\left(Y(t,z_1)\right)\cdot|\pi_\omega(t)|\mathrm{sign}(y_1^0)}{I(t)\Phi'\left(Y(t,z_1)\right)}(1+z_2).$$

Розглянемо рівність

$$\frac{\pi_\omega(t)\left(N_1(t,z_1,z_2)\right)'_t}{N_1(t,z_1,z_2)}=$$

$$=\frac{\pi_\omega(t)\left(\dfrac{I'(t)|\pi_\omega(t)|}{I(t)\mathrm{sign}(y_1^0)}\psi\left(\Phi^{-1}(I(t)[1+z_1])\right)\right)'_t}{\dfrac{I'(t)|\pi_\omega(t)|}{I(t)}\psi(\Phi^{-1}(I(t)[1+z_1])\mathrm{sign}(y_1^0)}=$$

$$=\frac{\pi_\omega(t)\left(\dfrac{I'(t)\cdot|\pi_\omega(t)|}{I(t)}\right)'}{\dfrac{I'(t)\cdot|\pi_\omega(t)|}{I(t)}}+$$

$$+\frac{\Phi^{-1}(I(t)[1+z_1])\psi'(\Phi^{-1}(I(t)[1+z_1]))}{\psi(\Phi^{-1}(I(t)[1+z_1]))}\times$$

$$\times\frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{\Phi^{-1}(I(t)[1+z_1])\Phi'(\Phi^{-1}(I(t)[1+z_1]))}.$$

З цієї рівності з урахуванням (23), (25), умови (9) та повільної зміни та інших властивостей функції ψ випливає, що

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)\left(N_1(t,z_1,z_2)\right)'_t}{N_1(t,z_1,z_2)}=0$$

рівномірно по $|z_1|<\frac{1}{2}$. Звідси маємо, що функція $N_1(t,z_1,z_2)$ є нормалізованою повільно змінною функцією при $t\uparrow\omega$ рівномірно по $|z_1|<\frac{1}{2}$, $|z_2|<\frac{1}{2}$. Тому, оскільки функція θ_1 задовольняє умову S, маємо

$$\lim_{t\uparrow\omega}N(t,z_1,z_2)=-1 \tag{26}$$

рівномірно по $|z_1|<\frac{1}{2}$, $|z_2|<\frac{1}{2}$.

У силу другої з умов (8) з урахуванням того, що функція Φ^{-1} є повільно змінною, існує $t_0\in[a,\omega[$ таке, що

$$\Phi^{-1}(I(t)(1+z_1))\in\Delta_{Y_0}$$

$$\text{при } t\in[t_0,\omega[,|z_1|\le\frac{1}{2}.$$

Розглянемо систему диференціальних рівнянь (22) на множині

$$\Omega=[x_0,+\infty[\times D,\quad \text{где}\quad x_0=\beta\ln|\pi_\omega(t_0)|,$$

$$D=\left\{(z_1,z_2):|z_i|\le\frac{1}{2},\ i=1,2\right\}.$$

Перепишемо систему (22) у виді

$$z_1'=\beta G_1(t(x))\left[z_2+z_1z_2\right], \tag{28}$$

$$z_2'=\beta G_2(t(x))[A_{21}z_1+A_{22}(x)z_2+$$
$$+R_1(x,z_1,z_2)+R_2(x,z_1,z_2)], \tag{29}$$

в якій

$$A_{21}=1-\sigma_1,\quad A_{22}=1-\sigma_1;$$

$$R_1(x,z_1,z_2)=(1+z_2)\Bigg[N(t(x),z_1,z_2)+Q(t)+$$
$$+M(t(x),z_1)\cdot\frac{\pi_\omega(t(x))I'(t(x))}{\Phi_1'(\Phi^{-1}(I(t(x))))\Phi^{-1}(I(t(x)))}\Bigg]+$$
$$+(N(t(x),z_1,z_2)+1)\cdot(\sigma_1-1)(z_1+z_2)+$$
$$+z_2\cdot M(t(x),z_1)\cdot\frac{\pi_\omega(t(x))I'(t(x))}{\Phi'(\Phi^{-1}(I(t(x))))\Phi^{-1}(I(t(x)))};$$
$$R_2(x,z_1,z_2)=N(t(x),z_1,z_2)\cdot(\sigma_1-1)\times$$
$$\times(z_1\cdot z_2+z_2^2)+M(t(x),z_1)\cdot z_2^2\times$$
$$\times\frac{\pi_\omega(t(x))I'(t(x))}{\Phi'(\Phi^{-1}(I(t(x))))\Phi^{-1}(I(t(x)))}+$$
$$+(1+z_2)\cdot N(t(x),z_1,z_2)\cdot(((1+z_2)^{\sigma_1-1}-1$$
$$-(\sigma_1-1)\cdot z_2)+(\sigma_1-1)^2\cdot z_1\cdot z_2+(\sigma_1-1)\times$$
$$\times z_1\cdot((1+z_2)^{\sigma_1-1}-1-(\sigma_1-1)\cdot z_2)+$$
$$+(1+z_2)^{\sigma_1-1}\cdot((1+z_1)^{\sigma_1-1}-1-(\sigma_1-1)\cdot z_1));$$

З (24) — (27) випливає, що

$$\lim_{|z_1|+|z_2|\to 0}\frac{R_2(x,z_1,z_2)}{|z_1|+|z_2|}=0 \tag{30}$$

рівномірно по $x\in[x_0,+\infty[$,

$$\lim_{x\to+\infty}R_1(x,z_1,z_2)=0 \tag{31}$$

рівномірно по $z_1,z_2:\ (z_1,z_2)\in D$.

Оскільки $\sigma_1\neq 1$ з виду системи (28)-(29) випливає, що у випадку, коли $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\dfrac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)}=0$ виконано умови теореми 2.6 з [4]. Відповідно до цієї теореми система (28)-(29) має хоча б один розв'язок $\{z_i\}_{i=1}^2:[x_1,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}^2$ $(x_1\geq x_0)$, який прямує до нуля при $x\to+\infty$, причому таких розв'язків існує принаймні однопараметричне сімейство.

У випадку, коли

$$\lim_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)}=c\in R\setminus\{0\}$$

перепишемо систему (28)-(29) у вигляді

$$z_1'=\beta\left[z_2+z_1z_2+(G_1(t(x))-c)(z_2+z_1z_2)\right],$$
$$z_2'=\beta[A_{21}z_1+A_{22}(x)z_2+$$
$$+R_1(x,z_1,z_2)+R_2(x,z_1,z_2)].$$

Оскільки в цьому випадку

$$\lim_{x\to\infty}G_1(t(x))=c,$$

то з виду системи (27)-(28) випливає, що для неї виконано умови теореми 2.2 з [4]. Дійсно, наразі матриця коефійієнтів лінійної частини системи має вигляд

$$\begin{pmatrix}0 & c\\ 1-\sigma_1 & 1-\sigma_1\end{pmatrix},$$

характеристичне рівняння

$$\mu^2-(1-\sigma_1)\mu-c(1-\sigma_1)=0$$

не має коренів з нульовою дійсною частиною, за рахунок того, що $\sigma_1\neq 1$, а також виконуються умови (30) та (31). Відповідно до теореми 2.2 з [4] система (28)-(29) має хоча б один розв'язок $\{z_i\}_{i=1}^2:[x_1,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}^2$ $(x_1\geq x_0)$, який прямує до нуля при $x\to+\infty$, причому таких розв'язків існує принаймні однопараметричне сімейство.

У випадку, коли $\lim\limits_{t\uparrow\omega}\frac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)}=\infty$, застосуємо до системи (28)-(29) перетворення

$$z_1=w_1,\quad z_2=\sqrt{|G_2(x)|}w_2.$$

Отримаємо систему

$$w_1'=\beta\sqrt{|G_2(t(x))|}\left[w_2+V_1(x;w_1;|G_2(x)|w_2)\right], \tag{32}$$
$$w_2'=\beta\mathrm{sign}(G_2(t(x)))\sqrt{|G_2(t(x))|}(A_{21}(x)w_1+$$
$$+R_1(x,w_1,\sqrt{|G_2(x)|}w_2)+$$
$$+V_2(x,w_1,\sqrt{|G_2(x)|}w_2)); \tag{33}$$

де

$$V_1(x;w_1;w_2)=w_1\cdot w_2;$$
$$V_2(x,w_1,w_2)=\sqrt{|G_2(x)|}(A_{22}-$$
$$-\widetilde{N}(x)\sqrt{|G_2(x)|})w_2+R_2(x,w_1,\sqrt{|G_2(x)|}w_2),$$
$$\lim_{|w_1|+|w_2|\to 0}\frac{V_i(x,w_1,w_2)}{|w_1|+|w_2|}=0,\quad i=1,2$$

рівномірно по $x\in[x_0,+\infty[$,

$$\lim_{x\to+\infty}R_1(x,w_1,w_2)=0$$

рівномірно по $w_1,w_2:\ (w_1,w_2)\in D$.

Зауважимо, що

$$\lim_{t\uparrow\omega} \widetilde{N}(t) =$$

$$= \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\operatorname{sign}(G_2(x(t)))G_2'(x(t))I(x(t))}{2G_2^2(x(t))I'(x(t))} =$$

$$= k\frac{\left(\frac{I(t)}{\pi_\omega(t)I'(t)}\right)'\pi_\omega(t)}{2\left(\frac{I(t)}{\pi_\omega(t)I'(t)}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sign}(G_2(x(t)))}{2}\left(\frac{\pi_\omega(t)\left(\frac{1}{\pi_\omega(t)}\right)'\frac{I(t)}{I'(t)}}{\frac{I(t)}{\pi_\omega(t)I'(t)}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\pi_\omega(t)\left(\frac{I(t(x))}{I'(t(x))}\right)'}{\frac{I(t(x))}{I'(t(x))}}\right) =$$

$$= \operatorname{sign}(G_2(x(t))) \lim_{t\uparrow\omega} \frac{1}{2}(-1 + Q(t)) = 0.$$

Розглянемо інтеграл $\int\limits_{x_0}^{\infty} G_2(x)dx$. З урахуванням зображення $G_2(x) = \dfrac{I(t(x))}{\pi_\omega(t(x))I'(t(x))}$ маємо

$$\int\limits_{x_0}^{\infty} G_2(x)dx = \int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{I(t(x))}{\pi_\omega(t(x))I'(t(x))}dx =$$

$$= \int\limits_{t(x_0)}^{\infty} \frac{I(t)}{\pi_\omega(t)I'(t)}\frac{I'(t)}{I(t)}dt = \infty.$$

Оскільки у околі нуля виконується $\int\limits_{x_0}^{\infty} \sqrt{|G_2(x)|}dx \geq \int\limits_{x_0}^{\infty} |G_2(x)|dx$. Таким чином, $\int\limits_{x_0}^{\infty} \sqrt{|G_2(x)|}dx \to \infty$.

Крім того, матриця коефіцієнтів лінійної частини системи (32)-(33) має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \operatorname{sign}(G_2(x))(1-\sigma_1) & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу (11) характеристичного рівняння

$$\mu^2 - \operatorname{sign}(G_2(x))(1-\sigma_1) = 0.$$

немає коренів з нульовою дійсною частиною.

Отримуємо, що для системи диференціальних рівнянь (34)-(35) виконані всі умови теореми 2.2 з [4]. Відповідно до цієї теореми система (34)-(35) має хоча б один розв'язок $\{z_i\}_{i=1}^2 : [x_1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(x_1 \geq x_0)$, який прямує до нуля при $x \to +\infty$, причому таких розв'язків існує принаймні однопараметричне сімейство. Отже, такі розв'язки існують в будь-якому випадку, коли існує скінченна чи нескінченна границя $\lim\limits_{t\uparrow\omega} \dfrac{\pi_\omega(t)I'(t)}{I(t)}$. Їм у силу замін відповідають розв'язки y рівняння (1), що допускають при $t \uparrow \omega$ асимптотичні зображення (12)-(13).

З вигляду цих зображень випливає, що отримані розв'язки y є $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$- розв'язками. Теорему повністю доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Bingham N.H., Goldie C.M., Teugels J.L.* Regular variation. Encyclopedia of mathematics and its applications, Cambridge university press,Cambridge, 1987.

2. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции [текст] – М.: Наука, 1985. – 141с.

3. *Евтухов В.М.* Асимптотические представления решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений: дис. докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 — Киев, 1998. — 295 с.

4. *Евтухов В. М., Самойленко А. М.* Условия существования исчезающих в особой точке решений у вещественных неавтономних систем квазилинейных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, №1. – С. 52-80.