УДК 517.956

©2017 р. В.В. Городецький, Г.П. Вережак

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

УЗАГАЛЬНЕНІ ПРОСТОРИ ТИПУ $\overset{\circ}{S}$

Досліджуються топологічна структура узагальнених просторів типу S, які складаються з парних функцій, основні операції в таких просторах, властивості перетворення Бесселя основних та узагальнених функцій, згорток, згортувачів та мультиплікаторів.

We investigate the topological structure of generalized S type spaces, consisting of the pair functions, main operations in such spaces, properties of Bessel transformations of test and generalized functions, convolutions, convolators and multiplicators.

1. І.М. Гельфанд і Г.Є. Шилов у відомій монографії [1, с. 203–211] запропонували метод побудови функціональних просторів нескінченно диференційовних функцій, заданих на $\mathbb{R}$, на які накладаються певні умови спадання на нескінченності та зростання похідних із збільшенням порядку. Ці умови задаються за допомогою нерівностей $|x^k\varphi^{(n)}(x)| \leq c_{kn}$, $\{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+$, де $\{c_{kn}\}$ – подвійна послідовність додатних чисел. Якщо ці числа змінюються довільним чином разом з функцією φ, то маємо простір Л. Шварца $S = S(\mathbb{R})$ швидко спадних на $\mathbb{R}$ функцій. В монографії [1] детально вивчений випадок, коли $c_{kn} = k^{k\alpha}n^{n\beta}$, $\alpha > 0, \beta > 0$ – фіксовані параметри; відповідні простори називаються просторами типу S і позначаються символом S_α^β. Функції з таких просторів на дійсній осі разом з усіма своїми похідними при $|x| \to \infty$ спадають швидше, ніж $\exp\{-a|x|\}, a > 0, x \in \mathbb{R}$. Такі простори часто використовуються при дослідженні проблеми про класи єдиності та класи коректності задачі Коші для рівнянь з частинними похідними. У працях [2–8] встановлено, що простори типу S та S' – простори, топологічно спряжені з ними, співпадають з множинами початкових даних задачі Коші для широких класів рівнянь з частинними похідними скінченного та нескінченного порядків, при яких розв'язки є цілими функціями за просторовими змінними. Наприклад, для рівняння теплопровідності $\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2$ фундаментальний розв'язок задачі Коші – функція $G(t,x) = (2\sqrt{\pi t})^{-1}\exp\{-x^2/(4t)\}$ при кожному $t > 0$, як функція x, є елементом простору $S_{1/2}^{1/2}$ [7, с. 46], який відноситься до просторів типу S.

Якщо $c_{kn} = a_k b_n$, де $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{b_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ – деякі послідовності додатних чисел, то маємо узагальнені простори типу S, які позначаються символом $S_{a_k}^{b_n}$. Простори $S_{a_k}^{b_n}$ (їх топологічна структура, властивості функцій, основні операції в таких просторах) вивчалися в праці [9]. Відомі простори типу W, введені Б.Л. Гуревечем [10] (див. також [11, с. 7–17]), в яких для характеристики поведінки функцій на нескінченності замість степеневих функцій використовуються довільні опуклі функції, також вкладаються в простори $S_{a_k}^{b_n}$ при конкретному виборі послідовностей $\{a_k\}$ та $\{b_n\}$ (див. [12]). Із результатів, наведених в [9, 13] випливає, що узагальнені простори типу S є природним середовищем для дослідження нелокальних багатоточкових за часом задач для еволюційних псевдодиференціальних рівнянь (зокрема, для рівнянь з операторами диференціювання нескінченного порядку), для еволюційних рівнянь з операторами узагальненого диференціювання Гельфонда–Леонтьєва скінченного та нескінченного порядків.

Простори, які складаються з парних функцій просторів типу S (зокрема, просторів S_α^β) з відповідною топологією використовуються при дослідженні еволюційних сингулярних рівнянь параболічного типу з операторами Бесселя (див. [6, 14]). Метою цієї роботи є дослідження узагальнених просторів типу S, які складаються з парних функцій з просторів $S_{a_k}^{b_n}$, а саме, дослідження топологічної структури таких просторів, властивостей перетворення Бесселя основних та узагальнених функцій, властивостей згорток, згортувачів та мультиплікаторів, відшукання умов, при виконанні яких у таких просторах визначений, є лінійним і неперервним оператор Бесселя нескінченного порядку. Ці результати у подальшому можуть знайти застосування при дослідженні нелокальних багатоточкових за часом задач для еволюційних сингулярних рівнянь нескінченного порядку.

2. Тут зупинимося на просторах $S_{a_k}^{b_n}$, які будуються за послідовностями вигляду $\{b_n = n!\rho_n,\ n \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{a_k = k!d_k,\ k \in \mathbb{Z}_+\}$, де $\{\rho_n\}$, $\rho_0 = 1$, – послідовність додатних чисел, яка володіє властивостями:

а) вона монотонно спадна;

б) $\exists c_b > 0\ \exists \gamma_1 \in (0,1)\ \forall n \in \mathbb{N}:$ $\rho_{n-1}/\rho_n \leq c_b \cdot n^{\gamma_1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0$;

г) $\forall \varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{Z}_+:\ \rho_n \geq c_\varepsilon \cdot \varepsilon^n/n^n$.
Послідовність $\{d_k,\ k \in \mathbb{Z}_+\}$, $d_0 = 1$, також володіє властивостями а)–г), при цьому умова б) має вигляд: $\exists c_a > 0\ \exists \gamma_2 \in (0,1)$ $\forall n \in \mathbb{N}:\ d_{k-1}/d_k \leq c_a \cdot k^{\gamma_2}$. Прикладом послідовності $\{\rho_n\}$ з властивостями а)–г) може служити послідовність $\rho_n = (n\beta)^{-n\beta}e^{n\beta}$, де $\beta \in (0,1)$ – фіксований параметр. Перевіримо, наприклад, виконання для послідовності ρ_n властивості г). Маємо, що

$$\rho_n = \frac{e^{n\beta}}{(n\beta)^{n\beta}} = \frac{e^{n\beta}}{(n\beta)^{n\beta}} \cdot \frac{[n(1-\beta)]^{n(1-\beta)}}{[n(1-\beta)]^{n(1-\beta)}} \cdot$$

$$\cdot \frac{e^{n(1-\beta)}}{e^{n(1-\beta)}} = \frac{e^n}{n^n} \frac{1}{[\beta^\beta(1-\beta)^{1-\beta}]^n} \cdot$$

$$\cdot \frac{[n(1-\beta)]^{n(1-\beta)}}{e^{n(1-\beta)}} = \frac{e^n}{n^n}\frac{1}{\omega^n} \sup_{\lambda \geq 0} \frac{\lambda^n}{\exp\{\lambda^{1/(1-\beta)}\}},$$

де $\omega = \beta^\beta(1-\beta)^{1-\beta} < 1$. Якщо взяти довільне $\varepsilon > 0$ і покласти $\lambda = \varepsilon$, то прийдемо до нерівності $\rho_n \geq c_\varepsilon \varepsilon^n/n^n$, де $c_\varepsilon = \exp\{-\varepsilon^{1/(1-\beta)}\}$. Зазначимо, що умова б) для цієї послідовності виконується з параметром $\gamma_1 = \beta$.

Вважаємо також, що параметри γ_1, γ_2 в умові б) для послідовностей $\{\rho_n\}$ та $\{d_k\}$ пов'язані умовою д): $\gamma_1 + \gamma_2 = \theta \leq 1$.

Символом $S_{a_k}^{b_n}$ позначимо сукупність функцій $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, які задовольняють умову

$$\exists\, c, A, B > 0\ \forall \{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+\ \forall x \in \mathbb{R}:$$
$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq cA^k B^n a_k b_n.$$

$S_{a_k}^{b_n}$ співпадає з об'єднанням зліченно-нормованих просторів $S_{a_k,\,A}^{b_n,\,B}$ за всіма індексами $\{A, B\} \subset \mathbb{N}$, де символом $S_{a_k,\,A}^{b_n,\,B}$ позначається сукупність тих функцій $\varphi \in S_{a_k}^{b_n}$, котрі для довільних $\delta, \rho > 0$ задовольняють нерівності

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \leq c_{\delta\rho}(A+\delta)^k(B+\rho)^n a_k b_n,$$
$$\{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+,\ x \in \mathbb{R};$$

система норм в $S_{a_k,\,A}^{b_n,\,B}$ визначається за допомогою формул

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,n} \frac{|x^k\varphi^{(n)}(x)|}{(A+\delta)^k(B+\rho)^n a_k b_n},$$
$$\{\delta, \rho\} \subset \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}.$$

В [9] встановлено, що функція $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ належить до простору $S_{a_k}^{b_n}$, де $a_k = k!d_k$, $b_n = n!\rho_n$, тоді й лише тоді, коли вона аналітично продовжується в комплексну площину до цілої функції $\varphi(z)$, $z \in \mathbb{C}$, яка задовольняє умову:

$$\exists a, b, c > 0\ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}:$$
$$|\varphi(z)| \leq c\gamma(ax)\rho(by), \tag{1}$$

де

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \inf\limits_k (a_k/|x|^k), & |x| \geq 1, \end{cases}$$

$$\rho(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ \sup\limits_n (|y|^n/b_n), & |y| \geq 1. \end{cases} \tag{2}$$

Зауважимо, що ρ – неперервно диференційовна, парна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно зростає на проміжку $[1,+\infty)$. Із властивості г) випливає також (див. [9]), що

$$\exists\, c_0, c>0\ \forall y\in\mathbb{R}: \rho(y)\geq c_0\exp(c|y|).$$

Наприклад, якщо $b_n = n^{n\beta},\ 0<\beta<1$, то $\rho(y)\sim\exp\{|y|^{1/\beta}\}$. Крім того, як доведено в [9], $\ln\rho$ – опукла на $(0,+\infty)$ функція в тому сенсі, що

$$\forall\{y_1,y_2\}\subset(0,+\infty):$$
$$\ln\rho(y_1)+\ln\rho(y_2)\leq\ln\rho(y_1+y_2). \qquad (3)$$

З (3) випливає також нерівність $\ln\rho(y_1)-\ln\rho(y_1+y_2)\leq-\ln\rho(y_2)$.

Функція ρ в (2) пов'язана з послідовністю $\{\rho_n\}$, за якою будується послідовність $\{b_n = n!\rho_n\}$ так [9]:

$$\rho_n=\inf_{|\omega|\geq1}(\rho(\omega)/|\omega|^n)=\nu_n^{-n}\rho(\nu_n),$$

де ν_n – розв'язок рівняння $\omega\mu(\omega)=n$, $n\in\mathbb{N}$, $\mu(\omega)=\rho'(\omega)/\rho(\omega)$; послідовність $\{\nu_n\}$ є монотонно зростаючою й необмеженою, $\nu_n< n$, $n\in\mathbb{N}$.

Оскільки $\gamma(x)=1/\tilde\gamma(x)$, де $\tilde\gamma(x)=1$, $|x|<1$ і $\gamma(x)=\sup\limits_k(|x|^k/a_k)$, якщо $|x|\geq1$, то γ – неперервно диференційовна, парна на $\mathbb{R}$ функція, яка монотонно спадає на $[1,+\infty)$, $0<\gamma(x)\leq1,\ x\in\mathbb{R}$. Наприклад, якщо $a_k=k^{k\alpha},\ \alpha\in(0,1)$, то справджуються нерівності [1, с. 204]:

$$\exp\left\{-\frac{\alpha}{e}|x|^{1/\alpha}\right\}\leq\gamma(x)\leq c\exp\left\{-\frac{\alpha}{e}|x|^{1/\alpha}\right\},$$
$$c=\exp\{\alpha e/2\}.$$

Функція $\ln\gamma$ задовольняє на $(0,+\infty)$ нерівність [9]

$$\ln\gamma(x_1)+\ln\gamma(x_2)\geq\ln\gamma(x_1+x_2),$$
$$\{x_1,x_2\}\subset(0,+\infty) \qquad (3_1)$$

Із результатів, наведених в [9] випливає, що послідовність $\{\varphi_\nu,\ \nu\geq1\}\subset S_{a_k}^{b_n}$ збігається до нуля в цьому просторі, якщо функції φ_ν та їхні похідні довільного порядку збігаються до нуля рівномірно на кожному відрізку $[a,b]\subset\mathbb{R}$ і при цьому виконуються нерівності

$$|x^k\varphi_\nu^{(n)}(x)|\leq cA^kB^na_kb_n,\ \{k,n\}\subset\mathbb{Z}_+,\ x\in\mathbb{R},$$

з деякими сталими $c,A,B>0$, не залежними від ν.

Функція g називається мультиплікатором у просторі $S_{a_k}^{b_n}$, якщо $g\psi\in S_{a_k}^{b_n}$ для довільної функції $\psi\in S_{a_k}^{b_n}$ і відображення $\psi\to g\psi$ є лінійним і неперервним оператором з $S_{a_k}^{b_n}$ в $S_{a_k}^{b_n}$. Мультиплікатором у просторі $S_{a_k}^{b_n}$, $a_k=k!d_k$, $b_n=n!\rho_n$, є функція $g\in C^\infty(\mathbb{R})$, яка допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину і задовольняє умову [9]:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists c_\varepsilon>0:\ |g(z)|\leq c_\varepsilon(\gamma(\varepsilon x))^{-1}\rho(\varepsilon y),$$
$$z=x+iy\in\mathbb{C}. \qquad (4)$$

У введених просторах $S_{a_k}^{b_n}$, $a_k=k!d_k$, $b_n=n!\rho_n$, визначені й неперервні оператори, важливі для аналізу; в першу чергу, це оператори множення на x, на всі поліноми, оператори диференціювання, зсуву та розтягу [9].

Символом $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ позначимо сукупність усіх парних функцій з простору $S_{a_k}^{b_n}$. Оскільки $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ утворює підпростір $S_{a_k}^{b_n}$, то в $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ природним способом вводиться топологія. Цей простір з відповідною топологією називатимемо основним простором або узагальненим простором типу $\overset{\circ}{S}$, а його елементи – основними функціями.

Сукупність функцій, які є продовженнями функцій φ з простору $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ в $\mathbb{C}$, позначимо символом $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}(\mathbb{C})$. Із результатів, отриманих в [9] випливає, що простір $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}(\mathbb{C})$ можна подати як об'єднання зліченно-нормованих просторів $\overset{\circ}{S}{}_{a_k,A}^{b_n,B}(\mathbb{C})$, де $\overset{\circ}{S}{}_{a_k,A}^{b_n,B}(\mathbb{C})$ складається з тих функцій $\varphi\in\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}(\mathbb{C})$, для яких справджується нерівність $|\varphi(x+iy)|\leq c\gamma(\bar a x)\rho(\bar b y)$, $z=x+iy\in\mathbb{C}$, де $\bar a$ – довільна додатна стала, менша за a, $\bar b$ – довільна стала, більша за b; $a,b>0$ – сталі з нерівності (1). Якщо для $\varphi\in\overset{\circ}{S}{}_{a_k,A}^{b_n,B}(\mathbb{C})$ покласти

$$\|\varphi\|_{p\omega}=\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|\varphi(z)|}{\gamma(a(1-\frac1p)x)\rho((b+\omega)y)},$$

$$p \in \{2, 3, ...\},\ \omega \in \mathbb{N},$$

то ці норми еквівалентні відповідним нормам в просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n,\,B}_{a_k,\,A}$. Отже, послідовність функцій $\{\varphi_\nu(x), \nu \geq 1\} \subset \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}, x \in \mathbb{R}$, збігається до нуля тоді й лише тоді, коли послідовність функцій $\{\varphi_\nu(z), \nu \geq 1\}, z \in \mathbb{C}$, рівномірно збігається до нуля в кожній обмеженій області комплексної площини $\mathbb{C}$, при цьому справджуються нерівності

$$\varphi_\nu(z) \leq c\gamma(ax)\rho(by), z = x + iy \in \mathbb{C},$$

зі сталими $c, a, b > 0$, не залежними від ν [9].

Мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$ є кожна ціла парна функція, яка задовольняє умову (4). Прикладом мультиплікатора у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$ може служити нормована функція Бесселя j_ν, $\nu > -1/2$, яка є розв'язком рівняння $B_\nu u + \lambda u = 0$, де B_ν – оператор Бесселля; $B_\nu = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{d}{dx}$, $\nu > -\frac{1}{2}$ – фіксований параметр, за умови, що $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$. Справді, нормована функція Бесселя пов'язана із звичайною функцією Бесселя J_ν, $\nu > -1/2$, першого роду так [15]:

$$j_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{x^\nu} J_\nu(x). \qquad (5)$$

Відомо (див.[15]), що функція J_ν допускає аналітичне продовження в комплексну площину $\mathbb{C}$, при цьому справджується інтегральна формула Пуассона

$$J_\nu(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \cdot$$

$$\cdot \int\limits_0^{\pi/2} \cos(z\cos t)\sin^{2\nu} t dt. \qquad (6)$$

Із співвідношень (5) та (6) випливає, що нормована функція Бесселя j_ν комплексного аргументу z є цілою парною функцією і для j_ν правильним є інтегральне зображення:

$$j_\nu(z) = \frac{2\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_0^{\pi/2} \cos(z\cos t)\sin^{2\nu} t dt. \qquad (7)$$

Врахувавши, що $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$, за допомогою (7) дістаємо оцінку:

$$|j_\nu(z)| \leq c_\nu e^{|y|},\ z = x + iy \in \mathbb{C},$$

$$c_\nu = \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1/2)},\ \nu > -\frac{1}{2}.$$

Оскільки для довільних опуклих функцій $\ln\bar{\gamma}(x)$ та $\ln\rho(y)$ при довільному $\varepsilon > 0$ правильною є нерівність

$$|y| \leq \ln\tilde{\gamma}(\varepsilon x) + \ln\rho(\varepsilon y) + c,\ c > 0,$$

то звідси випливає, що

$$|j_\nu(z)| \leq c_{\nu,\varepsilon} e^{\ln\tilde{\gamma}(\varepsilon x) + \ln\rho(\varepsilon y)} \equiv c_{\nu,\varepsilon}(\gamma(\varepsilon x))^{-1}\rho(\varepsilon y).$$

Це і означає, що $j_\nu(x)$ – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$, $a_k = k!d_k$, $b_n = n!\rho_n$.

Із результатів, наведених в [16] випливає, що в просторах $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$ визначені пряме та обернене перетворення Бесселя

$$\psi(\sigma) \equiv F_{B_\nu}[\varphi](\sigma) = \int\limits_0^{+\infty} \varphi(x)j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx,$$

$$\sigma \in \mathbb{R},$$

$$\varphi(x) \equiv F^{-1}_{B_\nu}[\psi](x) =$$

$$= \frac{1}{2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)} \int\limits_0^{+\infty} \psi(\sigma)j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1}d\sigma,\ x \in \mathbb{R},$$

причому при виконанні умов а)-д) для послідовностей $\{\rho_n\}$ та $\{d_k\}$, має місце формула $F_{B_\nu}\left[\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}\right] = \overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$, при цьому оператор F_{B_ν} є неперервним. Частковим випадком просторів $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$ є простори $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}$, які складаються з парних функцій з просторів S^β_α з тією самою топологією; відповідно, правильною є формула: $F_{B_\nu}\left[\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}\right] = \overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{\beta}$.

Символом T^ξ_x позначимо оператор узагальненого зсуву, який відповідає оператору Бесселя [17]:

$$T^\xi_x \varphi(x) = b_\nu \int\limits_0^\pi \varphi(\sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi\cos\omega}) \cdot$$

$$\cdot \sin^{2\nu}\omega d\omega,\ \varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k},$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2)), \nu > -1/2$.

Лема 1. *Операція узагальненого зсуву $\varphi \to T_x^\xi \varphi$ визначена і неперервна в просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$.*

Доведення. Для доведення твердження скористаємось співвідношенням $F_B\left[\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}\right] = \overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$. Тоді, врахувавши відомі властивості оператора T_x^ξ (див. [17]), для довільної основної функції φ маємо:

$$F_B\left[T_x^\xi\varphi\right](\sigma) = \int_0^\infty T_x^\xi\varphi(x) j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx =$$

$$= \int_0^\infty \varphi(x) T_x^\xi j_\nu(\sigma x)x^{2\nu+1}dx = \int_0^{+\infty} \varphi(x) j_\nu(\sigma x)\cdot$$

$$\cdot j_\nu(\sigma\xi)x^{2\nu+1}dx = j_\nu(\sigma\xi)F_B[\varphi](\sigma) \equiv \psi_\xi(\sigma).$$

При кожному фіксованому ξ функція $j_\nu(\sigma\xi)$, як функція σ, є мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$. Оскільки $F_B[\varphi] \in \overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$, то $\psi_\xi \in \overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$ при кожному ξ. Скориставшись оберненим перетворенням Фур'є знайдемо, що $T_x^\xi\varphi = F_B^{-1}[\xi]\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$, тобто, вказана операція визначена в просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$.

Неперервність операції узагальненого зсуву виливає з властивості неперервності операції прямого і оберненого перетворення Бесселя. Справді, якщо $\{\varphi, \varphi_k, k \geq 1\} \subset \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$, причому $\varphi_k \to \varphi$ при $k \to +\infty$ у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$, то $F_B\left[T_x^\xi\varphi_k\right] = j_\nu(\sigma\xi)F_B[\varphi_k] \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} j_\nu(\sigma\xi)F_B[\varphi] = F_B\left[T_x^\xi\varphi\right]$ у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$. Застосувавши обернене перетворення F_B^{-1} знайдемо, що $T_x^\xi\varphi_k \to T_x^\xi\varphi$ при $k \to \infty$ у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$. Лема доведена.

Лема 2. *Операція узугальненого зсуву диференційовна в просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$.*

Доведення. Нехай, за означенням, $\Phi_{\Delta\xi}(x) = \frac{1}{\Delta\xi}\left[T_x^{\xi+\Delta\xi}\varphi - T_x^\xi\varphi\right]$, $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$, $\{\xi, \Delta\xi, x\} \subset \mathbb{R}$. Для доведення твердження досить встановити, що граничне співвідношення $\Phi_{\Delta\xi} \to \frac{\partial}{\partial\xi}T_x^\xi\varphi$, $\Delta\xi \to 0$, справджується в просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$. Врахувавши властивість неперервності перетворення Бесселя (прямого і оберненого) у просторах $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$ досить встановити, що

$$F_B\left[\Phi_{\Delta\xi}\right] \to F_B\left[\frac{\partial}{\partial\xi}T_z^\xi\varphi\right],\ \Delta\xi \to 0,$$

у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}(\mathbb{C})$, тобто, що: 1) сім'я функцій $\{\gamma_{\Delta\xi}(z) := F_B\left[\Phi_{\Delta\xi} - \frac{\partial}{\partial\xi}T_z^\xi\varphi\right](\xi)$, $|\Delta\xi| \leq \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$ – деяке фіксоване число, $z = x+iy \in \mathbb{C}\}$ збігається рівномірно до нуля при $\Delta\xi \to 0$ у кожній обмеженій області $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$;
2) $\exists \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} > 0 : |\gamma_{\Delta\xi}(z)| \leq \tilde{c}e^{-\ln\tilde{\gamma}_1(\tilde{a}x)+\ln\rho_1(\tilde{b}y)}$, $\forall z = x+iy \in \mathbb{C}$, де $\tilde{\gamma}_1 = 1/\gamma_1$,

$$\gamma_1(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \inf\limits_k (b_k/|x|^k), & |x| \geq 1, \end{cases}$$

$$\rho_1(y) = \begin{cases} 1, & |y| < 1, \\ \sup\limits_n (|y|^n/a_n), & |y| \geq 1, \end{cases}$$

сталі $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} > 0$ не залежать від $\Delta\xi$, якщо $\Delta\xi$ досить мала за модулем величина.

Врахувавши, що $F_B[T_z^\xi\varphi] = j_\nu(z\xi)\cdot$ $\cdot F_B[\varphi](z)$, прийдемо до співвідношень

$$F_B\left[\Phi_{\Delta\xi}(z)\right] = \frac{1}{\Delta\xi}(F_B[T_z^{\xi+\Delta\xi}\varphi](z) -$$

$$-F_B[T_z^\xi\varphi](z)) = \frac{1}{\Delta\xi}(j_\nu(z(\xi+\Delta\xi)) - j_\nu(z\xi))\cdot$$

$$\cdot F_B[\varphi](z) = \frac{\partial}{\partial\xi}j_\nu(z(\xi+\theta\Delta\xi))F_B[\varphi](z), 0 < \theta < 1.$$

Далі скористаємося такими відомими формулами [17]:

$$\frac{\partial}{\partial s}j_\nu(sx) = csx^2 j_{\nu+1}(sx),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}j_\nu(sx) = cxs^2 j_{\nu+1}(sx),$$

де стала c залежить лише від ν. Тоді

$$F_B\left[\frac{\partial}{\partial\xi}T_z^\xi\varphi\right](z) = \frac{\partial}{\partial\xi}F_B[T_z^\xi\varphi](z) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\xi} j_\nu(z\xi) F_B[\varphi](z) = c\xi z^2 j_{\nu+1}(z\xi) F_B[\varphi](z),$$

$$F_B\left[\Phi_{\Delta\xi}\right](z) = c\xi z^2 j_{\nu+1}(z(\xi+\theta\Delta\xi)) F_B[\varphi](z).$$

Отже,

$$\gamma_{\Delta\xi}(z) = c\xi z^2 [j_{\nu+1}(z(\xi+\theta\Delta\xi)) -$$

$$- j_{\nu+1}(z\xi)] F_B[\varphi](z) =$$

$$= c\theta\Delta\xi \cdot \xi \cdot z^2 \frac{\partial}{\partial\xi} j_{\nu+1}(z(\xi+\theta_1\Delta\xi)) F_B[\varphi](z) =$$

$$= cc_1\theta\Delta\xi \cdot \xi^2 \cdot z^4 j_{\nu+2}(z(\xi+\theta_1\Delta\xi)) F_B[\varphi](z),$$

$0 < \theta_1 < 1$ (стала c_1 залежить від ν). Із останнього співвідношення випливає, що якщо $z \in \mathbb{K} \subset \mathbb{C}$, де $\mathbb{K}$ – обмежена область в $\mathbb{C}$, то $\gamma_{\Delta\xi} \to 0$ при $\Delta\xi \to 0$ рівномірно по $z \in \mathbb{K}$, оскільки існують додатні сталі $d_1, d_2, d_3 = d_3(\xi)$ такі, що

$$|z^4| \le d_1,\ |F_B[\varphi](z)| \le d_2,$$

$$|j_{\nu+2}(z(\xi+\theta_1\Delta\xi))| \le d_3,\ \forall z \in \mathbb{K}.$$

Таким чином, умова 1) виконується. Доведемо, що умова 2) також має місце.

Передусім зазначимо, що

$$|j_{\nu+2}(z(\xi+\theta_1\Delta\xi))| \le b_\nu e^{|y||\xi+\theta_1\Delta\xi|} \le$$

$$\le \tilde{b}_\nu e^{c_0|\xi||y|},\ z \in \mathbb{C}.$$

Для опуклих функцій $\ln\tilde{\gamma}_1$ та $\ln\rho_1$ при довільному $\varepsilon > 0$ та фіксованому ξ правильною є нерівність

$$c_0|\xi||y| \le \ln\tilde{\gamma}_1(\varepsilon x) + \ln\rho_1(\varepsilon y) + d,\ d > 0,$$

тому

$$|j_{\nu+2}(z(\xi+\theta_1\Delta\xi))| \le \tilde{\tilde{b}}_\nu e^{\ln\tilde{\gamma}_1(\varepsilon x)+\ln\rho_1(\varepsilon y)}.$$

Оскільки $F_B[\varphi] \in \overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{a_n}$ і в просторі $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{a_n}$ визначена операція множення на z^2, то $z^4 F_B[\varphi] \in \overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{a_n}$, тобто існують сталі $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c} > 0$ такі, що

$$|z^4 F_B[\varphi]| \le \bar{c} e^{-\ln\tilde{\gamma}_1(\tilde{a}x)+\ln\rho_1(\tilde{b}y)},\ z \in \mathbb{C}.$$

Тоді $|\gamma_{\Delta\xi}(z)| \le$

$$\le L|\Delta\xi| e^{-\ln\tilde{\gamma}_1(\tilde{a}x)+\ln\tilde{\gamma}_1(\varepsilon x)+\ln\rho_1(\tilde{b}y)+\ln\rho_1(\varepsilon y)}$$

(тут стала $L > 0$ залежить від ν, ξ та не залежить від $\Delta\xi$). Урахувавши нерівності опуклості для функцій $\ln\tilde{\gamma}_1$ та $\ln\rho_1$ і зафіксувавши ε з інтервалу $(0, \tilde{a})$ дістанемо, що

$$-\ln\tilde{\gamma}_1(\tilde{a}x) + \ln\tilde{\gamma}_1(\varepsilon x) \le -\ln\tilde{\gamma}_1((\tilde{a}-\varepsilon)x),$$

$$\ln\rho_1(\tilde{b}y) + \ln\rho_1(\varepsilon y) \le \ln\rho_1((\tilde{b}+\varepsilon)y).$$

Оскільки, за припущенням, $|\Delta\xi| \le \varepsilon_0$, то

$$|\gamma_{\Delta\xi}(z)| \le L\varepsilon_0 e^{-\ln\tilde{\gamma}_1((\tilde{a}-\varepsilon)x)+\ln\rho_1((\tilde{b}+\varepsilon)y)},\ z \in \mathbb{C}.$$

Цим доведено, що умова 2) також виконується, тобто, операція узагальненого зсуву диференційовна в просторі $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$.

Наслідок 1. *Операція узагальненого зсуву нескінченно диференційовна в просторі* $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$.

Для доведення твердження досить скористатися лемою 3 та методом математичної індукції.

Згортку двох функцій з простору $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ визначимо формулою

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) \psi(\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi,$$

$\{\varphi, \psi\} \subset \overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$.

Лема 3. *Правильною є формула*

$$F_B[\varphi * \psi] = F_B[\varphi] \cdot F_B[\psi],\ \forall\{\varphi, \psi\} \subset \overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}.$$

Доведення. Використовуючи теорему Фубіні знаходимо, що

$$F_B[\varphi * \psi](\sigma) =$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^{+\infty} T_x^\xi \varphi(x) \psi(\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi \right) j_\nu(\sigma x) \cdot$$

$$\cdot x^{2\nu+1} dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} T_x^\xi \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \right) \cdot$$

$$\cdot \psi(\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \varphi(x) T_x^\xi j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \right) \cdot$$

$$\cdot \psi(\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi.$$

Далі, урахувавши формулу $T_x^{\xi} j_\nu(\sigma x) = j_\nu(\sigma x) j_\nu(\sigma\xi)$ прийдемо до співвідношення

$$F_B[\varphi * \psi](\sigma) = \int_0^{+\infty} \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \cdot$$

$$\cdot \int_0^{+\infty} \psi(\xi) j_\nu(\sigma\xi) \xi^{2\nu+1} d\xi = F_B[\varphi](\sigma) F_B[\psi](\sigma),$$

що й потрібно було довести.

Зазначимо, що в просторах $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ визначена і є неперервною операція множення основних функцій.

Справді, нехай $\{\varphi, \psi\} \in \overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$, тоді існують сталі $a_1, b_1, c_1 > 0$ такі, що

$$|\varphi(z)| \le c_1 e^{-\ln \tilde{\gamma}(a_1 x) + \ln \rho(b_1 y)}, \; \forall z = x + iy \in \mathbb{C};$$

аналогічно, існують сталі a_2, b_2, $c_2 > 0$ такі, що

$$|\psi(z)| \le c_2 e^{-\ln \tilde{\gamma}(a_2 x) + \ln \rho(b_2 y)}, \forall z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Отже,

$$|\varphi(z)\psi(z)| \le c_1 c_2 e^{-\ln \tilde{\gamma}(a_1 x) + \ln \rho((b_1 + b_2) y)},$$

$\forall z = x + iy \in \mathbb{C}$, тобто, $\varphi\psi \in \overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$.

Звідси, врахувавши властивості перетворення Бесселя у просторах типу $\overset{\circ}{S}$ дістаємо, що $F_B[\varphi] \cdot F_B[\psi] \in \overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{a_n}$. Застосувавши обернене перетворення Бесселя знайдемо, що

$$\varphi * \psi = F_B^{-1}[F_B[\varphi] F_B[\psi]] \in \overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}.$$

Звідси випливає, що простори $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ утворюють топологічні алгебри відносно згортки основних функцій.

Розглянемо псевдодиференціальний оператор $A_\varphi = F_B^{-1}[\varphi F_B]$, який діє в просторі $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$. За умови, що φ – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{a_n}$, оператор A_φ є лінійним і неперервним у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$. Виявляється, якщо розглядати оператор A_φ у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}$, то його можна розуміти як оператор Бесселя "нескінченного порядку" у такому просторі. Справді, припустимо, що розклад функції φ в ряд Тейлора має вигляд: $\varphi(\sigma) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{2k} \sigma^{2k}$. Запишемо (поки що формально) співвідношення

$$F^{-1}_{B_{\sigma \to x}} \left[\varphi(\sigma) F_{B_{x \to \sigma}}[\psi(x)](\sigma) \right] =$$

$$= F^{-1}_{B_{\sigma \to x}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} \sigma^{2k} F_{B_{x \to \sigma}}[\psi(x)](\sigma) \right] =$$

$$= F^{-1}_{B_{\sigma \to x}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} (-1)^k F_{B_{x \to \sigma}}[B_\nu^k \psi(x)](\sigma) \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} (-1)^k F^{-1}_{B_{\sigma \to x}} \left[F_{B_{x \to \sigma}} \left[B_\nu^k \psi(x) \right](\sigma) \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} (-1)^k (B_\nu^k \psi)(x) \equiv$$

$$\equiv (A_\varphi \psi)(x), \forall \psi \in \overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n} \qquad (8)$$

(тут ми скористалися тим, що $F_{B_{x \to \sigma}}[B_\nu^k \psi(x)](\sigma) = (-\sigma^2)^k F_{B_{x \to \sigma}}[\psi](\sigma)$). Отже, A_φ у цьому випадку можна розуміти як оператор вигляду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_{2k}(-B_\nu)^k$. Таким чином, залишається обгрунтувати коректність проведених в (8) перетворень. Для цього досить довести, що $r_{n,\psi}(\sigma) := \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} c_{2k} \sigma^{2k} F_B[\psi] \to 0$ при $n \to \infty$ у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}$, або, що $r_{n,\psi}(s) \to 0$, $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$, при $n \to +\infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}(\mathbb{C})$. Іншими словами, потрібно показати, що: 1) $r_{n,\psi} \in \overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}, \forall n \ge 1$; 2) послідовність $\{r_{n,\psi}, n \ge 1\}$ рівномірно збігається до нуля при $n \to \infty$ у кожній обмеженій області $Q \subset \mathbb{C}$, при цьому виконуються нерівності $|r_{n,\varphi}(s)| \le c\gamma(a\sigma)\rho(b\tau)$, $\gamma = 1/\rho$, $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, з деякими додатними сталими $a, b, c > 0$, не залежними від n.

Коефіцієнти Тейлора $c_{2k}, k \in \mathbb{Z}_+$, функції φ обчислюються за формулою Коші

$$c_{2k} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_R} \frac{\varphi(s)}{s^{2k+1}} ds,$$

де Γ_R – коло радіуса R з центром у точці $s = 0$. Звідси, та з умови (4), яку задовольняє функція–символ φ випливає, що

$$|c_{2k}| \leq c_\varepsilon \inf_R \frac{(\gamma(\varepsilon R))^{-1}}{R^k} \cdot \inf_R \frac{\rho(\varepsilon R)}{R^k},$$

де $\varepsilon > 0$ – довільно фіксоване число. Оскільки в даному випадку $\gamma = 1/\rho$, то

$$|c_{2k}| \leq c_\varepsilon \left(\inf_R \frac{\rho(\varepsilon R)}{R^k}\right)^2 =$$

$$= c_\varepsilon \varepsilon^{2k} \left(\inf_R \frac{\rho(\varepsilon R)}{\varepsilon R}\right)^2 = c_\varepsilon \cdot \varepsilon^{2k} \rho_k^2$$

(зауважимо, що функція $\rho(y)y^{-k}$ досягає свого інфімуму на проміжку $(0, +\infty)$; про властивості послідовності $\{\rho_k = \inf_R(\rho(y)y^{-k})\}$ див. п.2, властивості а)–г)). Далі здійснимо оцінку функції $\alpha_{2k}(s) := |s^{2k} F_B[\psi](s)|$, $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$, при фіксованому $k \in \mathbb{N}$.

Оскільки $F_B[\psi] \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{b_k}$, то $\exists c, a, b > 0$ $\forall s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C} : |F_B[\psi](s)| \leq c\gamma(a\sigma)\rho(b\tau)$, $\gamma = 1/\rho$. Крім того,

$$|s^{2k}| = (\sigma^2 + \tau^2)^k \leq (2\max\{\sigma^2, \tau^2\})^k \leq$$

$$\leq 2^k(|\sigma|^{2k} + |\tau|^{2k}).$$

Отже,

$$\alpha_{2k}(s) \leq cc_\varepsilon 2^k \varepsilon^{2k} \rho_k^2(|\sigma|^{2k} + |\tau|^{2k})\gamma(a\sigma)\rho(b\tau) =$$

$$= cc_\varepsilon \varepsilon^{2k} 2^k(\rho_k^2|\sigma|^{2k}\gamma(a\sigma)\rho(b\tau) +$$

$$+ \rho_k^2|\tau|^{2k})\gamma(a\sigma)\rho(b\tau) \equiv cc_\varepsilon 2^k \varepsilon^{2k}(\Delta_k'(s) + \Delta_k''(s)).$$

Оскільки

$$\rho_k = \inf_{\sigma \neq 0}(\rho(\sigma)/|\sigma|^k) = \inf_{\sigma \neq 0}\left(\rho\left(\frac{a}{4}\sigma\right) / \left|\frac{a}{4}\sigma\right|^\nu\right),$$

то

$$\rho_k^2|\sigma|^{2k} \leq \frac{\rho^2(\frac{a}{4}\sigma)}{|\frac{a}{4}\sigma|^{2k}}|\sigma|^{2k} = \left(\frac{4}{a}\right)^{2k} \rho^2(\frac{a}{4}\sigma), \sigma \neq 0.$$

Функція $\ln\gamma$ задовольняє нерівність (3_1), з якої випливає нерівність

$$\gamma\left(\frac{a}{2}\sigma\right) = \gamma\left(\frac{a}{4}\sigma + \frac{a}{4}\sigma\right) \leq \gamma^2\left(\frac{a}{4}\sigma\right). \qquad (9)$$

Оскільки $\rho = 1/\gamma$, то урахувавши (9) знайдемо, що

$$\Delta_k'(s) = \rho_k^2|\sigma|^{2k}\gamma(a\sigma)\rho(b\tau) \leq$$

$$\leq \left(\frac{4}{a}\right)^{2k} \rho^2\left(\frac{a}{4}\sigma\right)\gamma\left(\frac{a}{2}\sigma\right)\gamma\left(\frac{a}{2}\sigma\right)\rho(b\tau) \leq$$

$$\leq \left(\frac{4}{a}\right)^{2k} \frac{\gamma^2\left(\frac{a}{4}\sigma\right)}{\gamma^2\left(\frac{a}{4}\sigma\right)}\gamma\left(\frac{a}{2}\sigma\right)\rho(b\tau) =$$

$$= \left(\frac{4}{a}\right)^{2k} \gamma\left(\frac{a}{2}\sigma\right)\rho(b\tau).$$

Оцінимо $\Delta_k''(s)$. Урахувавши властивості опуклості функції $\ln\rho$ (див. [3]), прийдемо до співвідношень:

$$\Delta_k''(s) = \rho_k^2 \tau^{2k} \gamma(a\sigma) e^{\ln\rho(b\tau)} =$$

$$= \rho_k^2 \tau^{2k} e^{-\ln\rho(\varepsilon_0\tau)} \cdot e^{\ln\rho(b\tau) + \ln\rho(\varepsilon_0\tau)}\gamma(a\sigma) \leq$$

$$\leq \rho_k^2 \tau^{2k} e^{-\ln\rho(\varepsilon_0\tau)} e^{\ln\rho((b+\varepsilon_0)\tau)}\gamma(a\sigma)$$

($\varepsilon_0 > 0$ – довільно фіксоване). Далі скористаємося тим, що $\rho_k = \nu_k^{-k}\rho(\nu_k) \leq \nu_k^{-k}e^{k+1}$, $k \geq 1$, де ν_k – розв'язок рівняння $x\mu(x) = k$, $x \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\mu = \rho'/\rho$, $\mu(2) > 1$. Справді, оскільки $\ln\rho(y) = \int_0^y \mu(\xi)d\xi$, то внаслідок теореми про середнє значення маємо, що

$$\ln\rho(\nu_k) = \int_0^{\nu_k} \mu(\xi)d\xi = \nu_k\mu(\tilde{\nu}_k) \leq$$

$$\leq \nu_k\mu(\nu_k) < k + 1, \; 0 < \tilde{\nu}_k < \nu_k$$

(тут враховано, що μ – неперервна та монотонно зростаюча на $[0, +\infty)$ функція [9]). Тоді $\rho(\nu_k) \leq e^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$. Далі безпосередньо знаходимо, що

$$\sup_{\tau \geq 0}(\tau^{2k}\exp\{-\ln\rho(\varepsilon_0\tau)\}) =$$

$$\tilde{\tilde{\nu}}_k^{2k}\exp\{-\ln\rho(\varepsilon_0\tilde{\tilde{\nu}}_k)\} \leq \nu_k^{2k},$$

де $\tilde{\tilde{\nu}}_k$ – розв'язок рівняння $x\mu(x) = 2k$, $x \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$. Зауважимо, що

$$\frac{\tilde{\tilde{\nu}}_k}{\nu_k} = \frac{\tilde{\tilde{\nu}}_k \cdot \mu(\nu_k)}{\nu_k \cdot \mu(\nu_k)} = \frac{\tilde{\tilde{\nu}}_k \cdot \mu(\nu_k)}{k}, \; k \geq 1.$$

Оскільки $\nu_k \leq \tilde{\tilde{\nu}}$, а μ – зростаюча та неперервна на $[0, +\infty)$ функція, то $\mu(\nu_k) \leq \mu(\tilde{\tilde{\nu}})$; тоді

$$\frac{\tilde{\tilde{\nu}}_k}{\nu_k} \leq \frac{\tilde{\tilde{\nu}}_k \cdot \mu(\nu_k)}{k} = \frac{2k}{k} = 2,\ k \geq 1,$$

а

$$\Delta_k''(s) \leq e^2 (2e)^{2k} \gamma(a\sigma)\rho((b+\varepsilon_0)\tau).$$

Таким чином,

$$\alpha_{2k}(s) \leq cc_\varepsilon 2^k e^{2k} \left(\left(\frac{4}{a}\right)^{2k} + e^2(2e)^{2k} \right) \cdot$$

$$\cdot \gamma(a_1\sigma)\rho(b_1\tau) = \beta A^k \varepsilon^{2k} \gamma(a_1\sigma)\rho(b_1\tau),$$

де $\beta = 2cc_\varepsilon e^2$, $A = 2\omega^2$, $\omega = \max\left\{\frac{4}{a}, 2e\right\}$, $a_1 = a/2$, $b_1 = b+\varepsilon$, причому всі сталі не залежить від k. Отже,

$$|r_{n,\psi}(s)| \leq \beta \sum_{k=n+1}^{\infty} A^k \varepsilon^{2k} \gamma(a_1\sigma)\rho(b_1\tau),\ s \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

З нерівності (10) випливає, що $r_{n,\psi} \in \overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}(\mathbb{C})$ при кожному $n \in \mathbb{N}$; при цьому послідовність $\{r_{n,\psi},\ n \geq 1\}$ збігається до нуля при $n \to \infty$ рівномірно в кожній обмеженій області $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$, крім того,

$$|r_{n,\psi}(s)| \leq \beta\gamma(a_1\sigma)\rho(b_1\tau),\ n \in \mathbb{N},\ s \in \mathbb{C},$$

сталі β, a_1, $b_1 > 0$ не залежать від n. Отже, умови 1)-2) виконуються. Цим доведено, що псевдодиференціальний оператор $A_\varphi = F^{-1}_{B_{\sigma\to x}}[\varphi(\sigma)F_{B_{x\to\sigma}}]$, який діє в просторі $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}$, є оператором Бесселя "нескінченного порядку" вигляду

$$A_\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}(-B_\nu)^k.$$

Оператор A_φ є також неперервним у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}$. Справді, нехай $\{\psi_n, n \geq 1\} \subset \overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}$, $\psi_n \to 0$ при $n \to \infty$ у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}$. Тоді $F_B[A_\varphi \psi_n] = \varphi(\sigma)F_B[\psi_n] \to 0$, $n \to \infty$; у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}$. Внаслідок властивості неперервності Бесселя (прямого і оберненого) маємо, що $A_\varphi \psi_n = F_B^{-1}[\varphi F_B[\psi_n]] \to 0$, $n \to \infty$, у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{b_k}^{b_n}$.

3. Простір узагальнених функцій $(\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n})'$. Символом $(\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n})'$ позначимо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю. Регулярними узагальненими функціями або регулярними функціоналами називатимемо лінійні неперервні функціонали, дія яких на основні функції $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ визначається формулою

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_0^\infty f(x)\varphi(x)x^{2\nu+1}dx.$$

Кожна локально інтегровна парна на $\mathbb{R}$ функція f, яка задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists c_\varepsilon > 0\ \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|f(x)| \leq c_\varepsilon(\gamma(\varepsilon x))^{-1}, \tag{11}$$

породжує регулярну узагальнену функцію $F_f \in (\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n})'$: $\langle F_f, \varphi \rangle = \int_0^\infty f(x)\varphi(x)x^{2\nu+1}dx$, $\forall \varphi \in \overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$.

Правильним є наступне твердження: *якщо локально інтегровні парні на $\mathbb{R}$ функції f і g, які задовольняють умову (11), не співпадають на множині додатної міри Лебега, то існує функція $\varphi_0 \in \overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ така, що $\langle f, \varphi_0 \rangle \neq \langle g, \varphi_0 \rangle$, тобто $F_f \neq F_g$. Навпаки, якщо $F_f \neq F_g$, то функції f і g не співпадають на множині додатної міри Лебега.* Доведення цього твердження аналогічне доведення відповідної теореми з [18].

Сформульоване твердження дозволяє ототожнювати локально інтегровні функції, які задовольняють умову (8) з породжуваними ними узагальненими функціями F_f з простору $(\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n})'$. З властивостей інтеграла Лебега випливає, що вкладення

$$\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n} \ni f \to F_f \in (\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n})'$$

є неперервним.

Оскільки в просторі $\overset{\circ}{S}{}_{a_k}^{b_n}$ визначена операція узагальненого зсуву аргументу, то згортку узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k})'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \langle f_\xi, T_x^\xi \varphi(x)\rangle = \langle f_\xi, T_\xi^x \varphi(\xi)\rangle$$

(індекс ξ у f_ξ означає, що функціонал f діє на основну функцію $T_\xi^x\varphi(\xi)$ як функцію аргументу ξ).

Лема 5. *Нехай $f \in (\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k})'$, $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$. Тоді згортка $f*\varphi$ є нескінченно диференційовною на R функцією; при цьому справджуються формули*

$$\begin{aligned}(f * \varphi)'(x) &= \langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial x}(T_x^\xi \varphi(x))\rangle \equiv \\ &\equiv \langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial x}(T_\xi^x \varphi(\xi))\rangle, \\ (f * \varphi)''(x) &= \langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial x}(T_x^\xi \frac{\partial}{\partial x}(T_x^\xi \varphi(x)))\rangle, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned} \qquad (12)$$

Доведення. Оскільки операція узагальненого зсуву аргументу диференційовна в просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$, то граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta x}\left[T_\xi^{x+\Delta x}\varphi(\xi) - T_\xi^x\varphi(\xi)\right] \to \frac{\partial}{\partial x}T_\xi^x\varphi(\xi),$$

$\Delta x \to 0$, виконується в сенсі збіжності в просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k} \subset S^{b_n}_{a_k}$, а $\frac{\partial}{\partial x}T_\xi^x\varphi(\xi)$, як функція аргументу ξ, належить до простору $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$. Тоді, внаслідок неперервності функціоналу f маємо, що

$$\begin{aligned}&(f * \varphi)'(x) = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[(f*\varphi)(x+\Delta x) - (f*\varphi)(x)\right] = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\langle f_\xi, \frac{1}{\Delta x}\left[T_\xi^{x+\Delta x}\varphi(\xi) - T_\xi^x\varphi(\xi)\right]\rangle = \\ &= \langle f_\xi, \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left[T_\xi^{x+\Delta x}\varphi(\xi) - T_\xi^x\varphi(\xi)\right]\rangle.\end{aligned}$$

Однак,

$$T_\xi^{x+\Delta x}\varphi(\xi) = T^\xi_{x+\Delta x}\varphi(x+\Delta x) = T_{\Delta x}\left[T_x^\xi\varphi(x)\right],$$

де $T_{\Delta x} : \varphi(x) \to \varphi(x+\Delta x)$ – оператор зсуву аргументу в просторі $S^{b_n}_{a_k}$. Тому

$$(f * \varphi)'(x) = \langle f_\xi, \lim_{\Delta x\to 0}\frac{T_{\Delta x}\left[T_x^\xi\varphi(x)\right] - T_x^\xi\varphi(x)}{\Delta x}\rangle.$$

Оскільки

$$\frac{1}{\Delta x}\left[T_{\Delta x}\left[T_x^\xi\varphi(x)\right] - T_x^\xi\varphi(x)\right] \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} \frac{\partial}{\partial x}T_x^\xi\varphi(x)$$

у просторі $S^{b_n}_{a_k}$, то

$$(f * \varphi)'(x) = \langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial x}T_x^\xi\varphi(x)\rangle.$$

Інтегруючи одержаний результат, прийдемо до формул (12). Лема доведена.

Нехай $f \in (\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k})'$. Якщо $f * \varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$, $\forall\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$ і із співвідношення $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$ випливає, що $f * \varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to +\infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$, то функціонал f називається згортувачем у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$.

Перетворення Бесселя узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k})'$ визначимо за допомогою співвідношення

$$\langle F_B[f], \varphi\rangle = \langle f, F_B[\varphi]\rangle,\ \forall\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}. \qquad (13)$$

Із (13), властивостей лінійності і неперервності функціоналу f та властивостей перетворення Бесселя основних функцій випливає лінійність і неперервність функціоналу $F_B[f]$ над простором основних функцій $\overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$. Отже, перетворення Бесселя узагальненої функції f заданої на $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$, є узагальненою функцією на просторі $\overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$.

Теорема 1. *Якщо узагальнена функція $f \in (\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k})'$ – згортувач у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$, то для довільної функції $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$ правильною є формула*

$$F_B[f * \varphi] = F_B[f]F_B[\varphi].$$

Доведення. Згідно з умовою теореми $f * \varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$. Тоді, скориставшись означенням перетворення Бесселя, а також означенням згортки узагальненої функції з основною, запишемо такі співвідношення:

$\forall\psi \in \overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k} : \langle F_B[f*\varphi], \psi\rangle = \langle f*\varphi, F_B[\psi]\rangle =$

$$= \int\limits_0^\infty (f * \varphi)(x) F_B[\psi](x) x^{2\nu+1} dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty \langle f_\xi, T_x^\xi \varphi(x)\rangle F_B[\psi](x) x^{2\nu+1} dx =$$

$$= \langle f_\xi, \int\limits_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) F_B[\psi](x) x^{2\nu+1} dx \rangle \qquad (14)$$

(зазначимо, що остання рівність написана, поки що, формально).

Нехай

$$I(\xi) := \int\limits_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) F_B[\psi](x) x^{2\nu+1} dx.$$

Тоді

$$I(\xi) = \int\limits_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) \left(\int\limits_0^\infty \psi(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma \right) \times$$

$$\times x^{2\nu+1} dx = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \varphi(x) \psi(\sigma) T_x^\xi j_\nu(\sigma x) \times$$

$$\times \sigma^{2\nu+1} x^{2\nu+1} d\sigma dx = \int\limits_0^\infty \psi(\sigma) j_\nu(\sigma\xi) \sigma^{2\nu+1} \times$$

$$\times \left(\int\limits_0^\infty \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \right) d\sigma =$$

$$= \int\limits_0^\infty \psi(\sigma) F_B[\varphi](\sigma) j_\nu(\sigma\xi) \sigma^{2\nu+1} d\sigma =$$

$$= F_B[F_B[\varphi] \cdot \psi](\xi)$$

(тут ми скористалися теоремою Фубіні, врахувавши, що збіжним є інтеграл

$$\int\limits_0^\infty (\int\limits_0^\infty |\psi(\sigma)\varphi(x) j_\nu(\sigma x) j_\nu(\sigma\xi)| \sigma^{2\nu+1} x^{2\nu+1} d\sigma) dx).$$

Отже,

$$\langle F_B[f * \varphi], \psi \rangle = \langle f, F_B[F_B[\varphi] \cdot \psi] \rangle =$$

$$= \langle F_B[f], F_B[\varphi] \cdot \psi \rangle =$$

$$= \langle F_B[f] \cdot F_B[\varphi], \psi \rangle, \ \forall \psi \in \overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}.$$

Звідси дістаємо рівність

$$F_B[f * \varphi] = F_B[f] \cdot F_B[\varphi].$$

Залишається обгрунтувати коректність співвідношень (14). Введемо позначення

$$I_r(\xi) := \int\limits_0^r \psi(\sigma) F_B[\varphi](\sigma) j_\nu(\sigma\xi) \sigma^{2\nu+1} d\sigma, r > 0.$$

Для доведення (14) досить показати, що $I_r(\xi) \to I(\xi)$ при $r \to +\infty$ у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$, тобто, що $\gamma_r(z) := I(z) - I_r(z) \to 0$, $r \to +\infty$, $z = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$, за топологією простору $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}(\mathbb{C})$. Врахувавши оцінки нормованої функції j_ν комплексного аргументу знайдемо, що

$$|\gamma_r(z)| \le \int\limits_r^{+\infty} |\psi(\sigma)||F_B[\varphi](\sigma)||j_\nu(\sigma z)| \sigma^{2\nu+1} d\sigma \le$$

$$\le c_\nu \int\limits_r^{+\infty} |\psi(\sigma)||F_B[\varphi](\sigma)| e^{\sigma|\omega|} \sigma^{2\nu+1} d\sigma,$$

$$z = \sigma + i\omega \in \mathbb{C}$$

(тут $c_\nu = \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\nu+1) \cdot \Gamma^{-1}(\nu+1/2), \nu > -1/2$). Якщо $z \in \mathbb{K} \subset \mathbb{C}$, де $\mathbb{K}$ – обмежена область, то $|\omega| \le c_0$. Тоді

$$|\gamma_r(z)| \le c_0 \int\limits_r^\infty |\psi(\sigma)||F_B[\varphi](\sigma)| e^{c_0\sigma} \sigma^{2\nu+1} d\sigma,$$

$$\forall z \in \mathbb{K}.$$

Оскільки $\psi \cdot F_B[\varphi] \in \overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$, то інтеграл

$$\int\limits_0^\infty |\psi(\sigma)||F_B[\varphi](\sigma)| e^{c_0\sigma} \sigma^{2\nu+1} d\sigma \qquad (15)$$

є збіжним. Справді, для функції $\psi F_B[\varphi]$ справджується оцінка: $|\psi(\sigma) F_B[\varphi](\sigma)| \le$ $\le \tilde{c} \exp\{-\ln \tilde{\gamma}(a_0\sigma)\}$ де $\tilde{c}$, a_0 – деякі додатні сталі. З властивостей функцій $\tilde{\gamma}$ випливає, що $\ln \tilde{\gamma}(a_0\sigma)$ зростає швидше за довільну лінійну функцію на проміжку $[1, +\infty)$, тому функція $\sigma^{2\nu+1}\exp\{-\ln\tilde{\gamma}(a_0\sigma)+c_0\sigma\}$ спадає на нескінченності до нуля, наприклад, як функція $\exp\{-\frac{1}{2}\ln\tilde{\gamma}(a_0\sigma)\}$. Звідси і випливає збіжність інтеграла (15). Отже,

$$\int\limits_r^{+\infty}|\psi(\sigma)||F_B[\varphi](\sigma)|e^{c_0\sigma}\sigma^{2\nu+1}d\sigma\to 0$$

при $r\to+\infty$ (як залишок збіжного інтеграла). Цим доведено, що $\gamma_r(z)$ збігається до нуля при $r\to+\infty$ рівномірно по z у кожній обмеженій області $\mathbb{K}\subset\mathbb{C}$. Доведемо тепер, що має місце нерівність

$$|\gamma_r(z)|\le ce^{-\ln\tilde{\gamma}(a\xi)+\ln\rho(b\omega)},\qquad(16)$$

де сталі $a,b,c>0$ не залежать від r.

Оскільки $\gamma_r(\xi)=I(\xi)-I_r(\xi)$, то $|\gamma_r(\xi)|\le|I(\xi)|+|I_r(\xi)|$. Розглянемо функції

$$I_{r,+}(\xi)=\max_{\xi\in\mathbb{R}}(I_r(\xi),0),$$

$$I_{r,-}(\xi)\ =-\min_{\xi\in\mathbb{R}}(I_r(\xi),0),$$

які є невід'ємними і врахуємо те, що

$$|I_r(\xi)|=I_{r,+}(\xi)+I_{r,-}(\xi)\le 2|I(\xi)|.$$

Отже,

$$|\gamma_r|\le 3|I|=3|F_B[F_B[\varphi]\cdot\psi]|,\forall r>0.$$

Звідси вже випливає нерівність (16), оскільки $F_B[F_B[\varphi]\cdot\psi]\in\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$, якщо $\psi\in\overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$. Теорема доведена.

Зауваження 1. З теореми 1 випливає, що якщо узагальнена функція f є згортувачем у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$, то її перетворення Бесселя – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$.

Теорема 2. *Якщо узагальнена функція f – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$, то її перетворення Бесселя – згортувач у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$.*

Доведення. Згідно з означенням згортки узагальненої функції з основною маємо, що

$$F_B[f]*\varphi=\langle F_B[f],T_x^{\xi}\varphi(x)\rangle=\langle f,F_B[T_x^{\xi}\varphi(x)]\rangle,$$

$$\forall\varphi\in\overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}.$$

Оскільки $F_B[T_x^{\xi}\varphi(x)]=j_\nu(\sigma\xi)F_B[\varphi](\sigma)$, то

$$F_B[f]*\varphi=\langle f,j_\nu(\sigma\xi)F_B[\varphi](\sigma)\rangle=$$

$$=\int\limits_0^{\infty}f(\sigma)j_\nu(\sigma\xi)F_B[\varphi](\sigma)\sigma^{2\nu+1}d\sigma=F_B[fF_B[\varphi]].$$

Зазначимо, що $F_B[fF_B[\varphi]]\in\overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$, бо $fF_B[\varphi]\in\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$ (тут ми врахували те, що $F_B[\varphi]\in\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$, а f – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$). Теорема доведена.

Зауваження 2. Результати, одержані в теоремах 2, 3, можна сформулювати так: для того, щоб узагальнена функція $f\in(\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k})'$ була згортувачем у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{b_n}_{a_k}$, необхідно й досить, щоб її перетворення Бесселя було мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{a_n}_{b_k}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. – М.: Физматгиз, 1958. – 307 с.

2. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.

3. *Gorbachuk M.L., Gorbachuk V.I.* Boundary value problems for operator diferential equations. – Dordrecht (Boston) London: Kluwer, 1991. – 374 p.

4. *Кашпировский А.И.* Граничные значения решений некоторых классов однородных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1981. – 18 с.

5. *Горбачук М.Л., Дудников П.И.* О начальных данных задачи Коши для параболических уравнений, при которых решения бесконечно дифференцируемы // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1981. – № 4. – С. 9–11.

6. *Городецький В.В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 225 с.

7. *Городецький В.В.* Множини початкових значень гладких розв'язків диференціально-операторних рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 219 с.

8. *Городецький В.В.* Еволюційні рівняння в зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. – Чернівці: Рута, 2008. – 400 с.

9. *Городецкий В.В., Мартынюк О.В.* Операторы обобщенного дифференцирования Гельфонда–Леонтьева в пространствах типа S //Сиб. мат. журн. – 2013. – Т. 54, № 3. – С. 569–584.

10. *Гуревич Б.Л.* Некоторые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечно-разностных схем // Докл. АН СССР. – 1954. – Т. 99, № 6. – С. 893–896.

11. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – 274 с.

12. *Готинчан Т.І., Атаманюк Р.М.* Різні форми означення просторів типу W // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Вип. 111. Математика. – Чернівці: Рута, 2001. – С. 21–26.

13. *Городецький В.В., Петришин Р.І., Тодоріко Т.С.* Нелокальна багатоточкова за часом задача для одного класу рівнянь з частинними похідними нескінченного порядку // Нелінійні коливання. – 2015. – Т. 18, № 2. – С. 176–191.

14. *Житомирский Я.И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя // Матем. сб. – 1955. – Т. 36, № 2. – С. 299–310.

15. *Корн Т., Корн Г.* Справочник по математике. – М.: Наука, 1977. – 832 с.

16. *Готинчан Т.І.* Перетворення Фур'є–Бесселя сукупності $S_{m_{2k},2q}$ // Міжнар. наук. конф. ім. В.Я. Скоробогатька, 25–28 серпня, 2015 р. Дрогобич / Тези доповідей. – Львів: Львівська політехніка, 2015. – С. 58.

17. *Левитан Б.И.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. – 1951. – Т. 6, вып. 2. – С. 102–143.

18. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Преобразование Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности задачи Коши // Успехи мат. наук. – 1953. – Т. 8, вып. 6. – С. 3–54.