Красікова І. В., Плієв М. А., Попов М. М., Фотій О. Г.

ЧАСТКОВА ПОРЯДКОВА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ОРТОГОНАЛЬНО АДИТИВНИХ ОПЕРАТОРІВ

Основний результат стверджує, що за певних умов для порядкової неперервності порядково обмеженого ортогонально адитивного оператора між векторними ґратками достатньо, щоб він був рівномірно порядково неперервним та горизонтально порядково неперервним (відображення $f\colon E \to F$ між векторними ґратками E та F ми називаємо горизонтально порядково неперервним, якщо латерально зростаючі порядково збіжні сітки в E функція f переводить у порядково збіжні сітки в F, і рівномірно порядково неперервним, якщо рівномірно збіжні сітки f переводить у порядково збіжні сітки).

Ключові слова і фрази: векторна ґратка, порядкова збіжність, ортогонально адитивний оператор, порядково неперервний оператор.

Jury Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, Ukraine (Fotiy O. G.)
Zaporizhzhya National University, Zaporizhzhya, Ukraine (Krasikova I. V.)
Southern Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences (Pliev M. A.)
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University, Ivano-Frankivsk, Ukraine (Popov M. M.)
e-mail: *ofotiy@ukr.net (Fotiy O. G.), irynazpukr@gmail.com (Krasikova I. V.), plimarat@yandex.ru (Pliev M. A.), misham.popov@gmail.com (Popov M.M.)*

Вступ

Дослідженнями взаємозв'язків між нарізною та сукупною неперервністю функцій двох змінних між топологічними просторами математики займаються, починаючи з дисертації Р. Бера (1899). Особливого успіху в цій тематиці досягли математики за останні 40 років, завдяки діяльності математичної школи Володимира Кириловича Маслюченка в Чернівцях (див., наприклад, та бібліографію у вказаній роботі). Однією з найважливіших задач у цьому напрямку є питання, наскільки "великою" мусить бути множина всіх точок сукупної неперервності нарізно неперервної функції $f\colon X \times Y \to Z$ в залежності від властивостей топологічних просторів X, Y, Z.

В даній роботі ми розглядаємо два важливі часткові випадки порядкової збіжності: горизонтальну та рівномірну порядкову збіжність. Під *горизонтально-порядковою* (відповідно, *рівномірно-порядковою*) неперервністю ми розуміємо таку властивість функції

УДК 517.982
2010 *Mathematics Subject Classification:* Primary 47B38; Secondary 47B65.

f: кожну горизонтально збіжну сітку (відповідно, рівномірно збіжну сітку) в E функція f переводить у порядково збіжну сітку в F.

Наступна задача має певну аналогію із задачею про зв'язки між нарізною та сукупною неперервністю функцій.

Проблема 1. *За яких умов на векторну ґратку E з головною проективною властивістю, порядково повну векторну ґратку F та регулярний ортогонально адитивний оператор T з горизонтально-порядкової неперервності та рівномірно-порядкової неперервності оператора T випливає його порядкова неперервність?*

Ми даємо позитивну відповідь за таких умов: E має головну проективну властивість і горизонтальну властивість Єгорова, F порядково повна та T є оболонкою деякого порядково обмеженого ортогонально адитивного оператора.

1 Попередня інформація

Загальні відомості. Загально прийняту термінологію та позначення з теорії векторних ґраток ми запозичили з підручника Аліпрантіса і Буркіншава [3]. Щодо менш розповсюджених понять, ми нижче наводимо деяку необхідну інформацію. Символом $\mathcal{L}_r(E, F)$ ми позначаємо векторну ґратку всіх регулярних лінійних операторів, що діють з E в F. Рівність $x = \bigsqcup_{i=1}^n x_i$ означає, що $x = \sum_{i=1}^n x_i$ та $x_i \perp x_j$ при $i \neq j$. Елемент x векторної ґратки E називається *фрагментом* елемента $y \in E$ (пишемо $x \sqsubseteq y$), якщо $x \perp (y - x)$. Зазначимо, що $\sqsubseteq$ є частковим порядком на E, який називається *латеральним порядком* на E. (див. [6] для подальшої інформації стосовно латерального порядку). Через $\mathfrak{F}_e$ ми позначаємо множину всіх фрагментів елемента e векторної ґратки E, яка є булевою алгеброю з нулем 0, одиницею e відносно операцій $x \Cup y = (x^+ \vee y^+) - (x^- \vee y^-)$ та $x \Cap y = (x^+ \wedge y^+) - (x^- \wedge y^-)$ ($x \Cup y$ визначається, як супремум, а $x \Cap y$ – як інфімум двоточкової множини $\{x, y\} \subseteq \mathfrak{F}_e$ по відношенню до латерального порядку $\sqsubseteq$ як в $\mathfrak{F}_e$, так і в E), [6, Proposition 3.4]. Якщо e – проекційний елемент векторної ґратки E, то через P_e ми позначаємо порядкову проекцію з E на смугу B_e, породжену елементом e, дію якої на довільному додатному елементі $x \in E^+$ можна обчислити за формулою [3, Theorem 1.47]

$$P_e x = \sup_{n \in \mathbb{N}} (x \wedge n|e|). \tag{1}$$

Кажуть, що сітка $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ у векторній ґратці E є

- *сильно порядково збіжною* до границі $x \in E$, якщо існує сітка $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$ в E така, що $y_\alpha \downarrow 0$ та $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$ для деякого $\alpha_0 \in A$ та всіх $\alpha \geq \alpha_0$ (пишуть $x_\alpha \xrightarrow{s-o} x$);

- *слабко порядково збіжною* до границі $x \in E$, якщо існує сітка $(y_\beta)_{\beta \in B}$ в E така, що $y_\beta \downarrow 0$ і для кожного $\beta \in B$ існує індекс $\alpha_0 \in A$ такий, що $|x_\alpha - x| \leq y_\beta$ для всіх $\alpha \geq \alpha_0$ (пишуть $x_\alpha \xrightarrow{w-o} x$).

Кожна сильно порядково збіжна сітка слабко порядково збігається до тієї ж самої границі, але обернене твердження хибне [1]. Якщо E порядково повна, або сітка $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$

монотонна, то сильна та слабка порядкова збіжності еквівалентні [1] (у цих випадках ми писатимемо $x_\alpha \xrightarrow{\mathrm{o}} x$).

Для доведення основного результату нам буде потрібне наступне просте, але корисне спостереження.

Твердження 1 ([8]). *Нехай $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ – сітка у векторній ґратці E та $x \in E$. Тоді наступні умови еквівалентні:*

(i) $x_\alpha \xrightarrow{w-o} x$;

(ii) існує сітка $(z_\gamma)_{\gamma\in C}$ в E така, що $\inf_{\gamma\in C} z_\gamma = 0$ і для кожного $\gamma \in C$ існує $\alpha_0 \in A$ така, що $|x_\alpha - x| \le z_\gamma$ для всіх $\alpha \ge \alpha_0$.

Сітка $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ у векторній ґратці E називається *істотно латерально обмеженою*, якщо існують $e \in E$ та індекс $\alpha_0 \in A$ такі, що $x_\alpha \sqsubseteq e$ для всіх $\alpha \ge \alpha_0$. Істотно латерально обмежена порядково збіжна до елемента $x \in E$ сітка $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ називається *латерально збіжною* до x сіткою (у цьому випадку пишуть $x_\alpha \xrightarrow{\ell} x$). В деякій літературі (зокрема, в [5]) під латерально збіжною сіткою розуміють лише латерально зростаючі порядково збіжні сітки; ми ж для цього надзвичайно важливого підкласу латерально збіжних сіток використовуємо термін “горизонтально збіжні сітки”. Точніше, ми говоримо, що сітка $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ у векторній ґратці E *горизонтально збігаєтьcя* до $x \in E$ (пишемо $x_\alpha \xrightarrow{h} x$), якщо $x_\alpha \sqsubseteq x_\beta$ для всіх індексів $\alpha < \beta$ та x є найменшою верхньою межею сітки (x_α) відносно порядку $\sqsubseteq$. Горизонтальна збіжність є частковим випадком порядкової збіжності (легко бачити, що горизонтально збіжна сітка сильно порядково збігається до тієї ж самої границі). Проте, в окремих випадках горизонтальна збіжність може замінити порядкову збіжність у повному обсязі. Наприклад, горизонтальне замикання порядкового ідеалу збігається з його порядковим замиканням [4]. Крім того, порядкову неперервність регулярного лінійного оператора достатньо перевіряти лише на горизонтально збіжних сітках з області визначення (див. теорему 2 нижче).

Корисно зауважити, що якщо латерально збіжна сітка $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ є істотно латерально обмеженою елементом $e \in E$, то латеральна границя x цієї сітки теж є фрагментом e [6, Proposition 4.5], а також мажоруючу сітку для $|x_\alpha - x|$ можна вибрати серед фрагментів елемента $|e|$ [6, Proposition 4.6].

Сітка $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ в E називається *збіжною* до $x \in E$

- *e-рівномірно*, де $e \in E^+$, якщо $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \alpha_0 \in A \quad \forall \alpha \ge \alpha_0 \quad |x_\alpha - x| \le \frac{1}{n} e$; у цьому випадку ми пишемо $x_\alpha \overset{e}{\rightrightarrows} x$;
- *рівномірно*, якщо $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ збігається до x e-рівномірно для деякого $e \in E^+$; у цьому випадку ми пишемо $x_\alpha \rightrightarrows x$.

Очевидно, кожна рівномірно збіжна сітка слабко порядково збігається до тієї ж самої границі. Менш очевидним але істинним є той факт, що кожна рівномірно збіжна сітка сильно порядково збігається до тієї ж самої границі.

Нехай E, F – векторні ґратки, причому F – порядково повна. Казатимемо, що функція $f\colon E \to F$ є

- *горизонтально порядково неперервною*[1], якщо для кожної сітки (x_α) в E та довільного $x \in E$ з умови $x_\alpha \xrightarrow{h} x$ випливає, що $f(x_\alpha) \xrightarrow{o} f(x)$;

- *рівномірно порядково неперервною*, якщо для кожної сітки (x_α) в E та довільного $x \in E$ з умови $x_\alpha \rightrightarrows x$ випливає, що $f(x_\alpha) \xrightarrow{o} f(x)$.

Зазначимо, що оскільки умова горизонтальної збіжності сіток сильніша за латеральну збіжність, то умова горизонтально порядкової неперервності слабша, ніж поняття латерально порядкової неперервності відображень. А отже, твердження про горизонтально порядково неперервні відображення сильніші за аналогічні твердження про латерально порядково неперервні відображення.

Якщо ж якась з наведених вище умов виконується для послідовностей, то ми говоримо, що f є *горизонтально порядково σ-неперервною* чи *рівномірно порядково σ-неперервною*, в залежності від конкретного випадку. Наведені означення горизонтально порядкової та рівномірно порядкової неперервності можуть бути застосовані до будь-якого типу порядкової збіжності (слабкої чи сильної) для означення *горизонтально-сильно порядково*, *рівномірно-сильно порядково*, *горизонтально-слабко порядково* а також *рівномірно-слабко порядково* неперервної функції. Однак в усіх наведених нижче твердженнях від векторної ґратки образів F завжди вимагається порядкова повнота, а отже сильна та слабка збіжності сіток на F рівносильні і ми будемо використовувати термін «порядкова збіжність».

Для лінійних операторів з горизонтально порядкової неперервності випливає порядкова неперервність.

Твердження 2 (Proposition 3.9 з [5]). *Нехай E – векторна ґратка з головною проективною властивістю*[2]*, F – порядково повна векторна ґратка і $S \in \mathcal{L}_r(E, F)$.*

1. *Якщо S є горизонтально порядково неперервним, то S – порядково неперервний;*

2. *Якщо S є горизонтально порядково σ-неперервним, то S – порядково σ-неперервний.*

Ортогонально адитивні оператори. Нехай E – векторна ґратка і F – дійсний лінійний простір. Функція $T\colon E \to F$ називається *ортогонально адитивним оператором*, якщо $T(x + y) = T(x) + T(y)$ для всіх $x, y \in E$ таких, що $x \perp y$.

Очевидно, $T(0) = 0$ для довільного ортогонально адитивного оператора T. Множина всіх ортогонально адитивних операторів з E в F є дійсним лінійним простором з природними лінійними операціями.

Нехай E та F – векторні ґратки. Ортогонально адитивний оператор $T\colon E \to F$ називається:

- *додатним*, якщо $Tx \geq 0$ виконується в F для всіх $x \in E$;

- *регулярним*, якщо T є різницею двох додатних операторів;

---

[1] *диз'юнктно неперервною* в іншій термінології

[2] *principal projection property* англійською

- *порядково обмеженим* чи *абстрактним оператором Урисона*, якщо T відображає порядково обмежені підмножини E у порядково обмежені підмножини F;
- *латерально-порядково обмеженим*, якщо $T(\mathfrak{F}_e)$ є порядково обмеженою підмножиною F для довільного $e \in E$.

Позначимо множини всіх додатних, регулярних, порядково обмежених та латерально-порядково обмежених операторів з E у F через $\mathcal{OA}^+(E,F)$, $\mathcal{OA}_r(E,F)$, $\mathcal{U}(E,F)$ та $\mathcal{P}(E,F)$ відповідно. Зазначимо, що $\mathcal{U}(E,F)$ є лінійним підпростором $\mathcal{P}(E,F)$, причому включення $\mathcal{U}(E,F) \subset \mathcal{P}(E,F)$ є строгим для випадку $E = F = \mathbb{R}$ ([7]). Ми наділяємо $\mathcal{OA}_r(E,F)$ таким порядком: $S \leq T$ виконується тоді і лише тоді, коли $T - S$ є додатним ортогонально адитивним оператором, тобто, $Sx \leq Tx$ для всіх $x \in E$. Тоді $\mathcal{OA}_r(E,F)$ стає впорядкованим лінійним простором.

Зауважимо, що якщо $T : E \to F$ – додатний ортогонально адитивний оператор та вектор $x \in E$ є таким, що $T(x) \neq 0$, то $T(-x) \neq -T(x)$. Таким чином, додатність ортогонально адитивного оператора є зовсім іншою умовою, ніж умова додатності лінійного оператора, а єдиний лінійний оператор, який є додатним, як ортогонально адитивний оператор, є нуль. Інша річ, яка істотно відрізняє ортогонально адитивні оператори від лінійних, – це порядкова обмеженість. Добре відомо і неважно показати, що кожний лінійний регулярний оператор є порядково обмеженим. Навпаки, навіть додатний ортогонально адитивний оператор не зобов'язаний бути порядково обмеженим. Дійсно, кожна функція $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з умовою $T(0) = 0$ є ортогонально адитивним оператором, але очевидно, не кожна така функція є порядково обмеженою.

Для порядково повних векторних ґраток має місце наступна теорема, отримана третім автором та К. Рамдане, яка узагальнює [5, Theorem 3.2.].

Теорема 1 ([7],Theorem 3.6)**.** *Нехай E, F – векторні ґратки, причому F – порядково повна. Тоді $\mathcal{OA}_r(E,F) = \mathcal{P}(E,F)$ та $\mathcal{OA}_r(E,F)$ є порядково повною векторною ґраткою. Більше того, для всіх $S, T \in \mathcal{OA}_r(E,F)$, $x \in E$ мають місце такі твердження:*

1. $(T \vee S)x = \sup\{Ty + Sz : \ x = y \sqcup z, \ y, z \in E\}$;
2. $(T \wedge S)x = \inf\{Ty + Sz : \ x = y \sqcup z, \ y, z \in E\}$;
3. $T^+x = \sup\{Ty : \ y \sqsubseteq x\}$;
4. $T^-x = -\inf\{Ty : \ y \sqsubseteq x\}$;
5. $|Tx| \leq |T|x$.

За тих же самих вимог до E та F множина $\mathcal{U}(E,F)$ всіх абстрактних операторів Урисона є порядково повною векторною ґраткою, яка має ті ж самі властивості (1)-(5) [5, Theorem 3.2.]. Більше того, $\mathcal{U}(E,F)$ є порядковим ідеалом векторної ґратки $\mathcal{OA}_r(E,F)$ [7, Proposition 3.7], проте не завжди є смугою [7, Example 3.8].

Оболонка абстрактного оператора Урисона. Нехай E, F – векторні ґратки, F – порядково повна та $T \in \mathcal{U}(E,F)$. Функція $\widehat{T} : E \to F$, що визначена рівністю

$$\widehat{T}(x) = \sup_{|y| \le |x|} |T|(y), \;\; x \in E, \tag{2}$$

є додатним абстрактним оператором Урисона (тобто, $\widehat{T} \in \mathcal{U}(E,F)^{+}$) [5, Proposition 3.4]. Оператор $\widehat{T}$ ми називаємо *оболонкою* оператора T. Зазначимо, що оболонка має такі властивості (див. твердження 3.4 та 3.5 з [9]).

Твердження 3. *Нехай E, F – векторні ґратки, F – порядково повна та $S, T \in \mathcal{U}(E,F)$.*

1. *$T(x) \le \widehat{T}(x)$ для всіх $x \in E$.*
2. *Якщо $x \le y$ для $x, y \in E$, то $\widehat{T}(x) \le \widehat{T}(y)$.*
3. *Якщо $0 \le S \le T$, то $\widehat{S}(x) \le \widehat{T}(x)$ для всіх $x \in E$.*
4. *$\widehat{S+T}(x) \le \widehat{S}(x) + \widehat{T}(x)$ для всіх $x \in E$.*
5. *Якщо, крім того, E має головну проективну властивість, то $\widehat{\widehat{T}} = \widehat{T}$.*

2 Основний результат

Як вже зазначалося, згідно з твердженням 2, для порядкової неперервності лінійного регулярного оператора достатньо горизонтально порядкової неперервності. Наступний приклад показує, що це не так для ортогонально адитивних операторів.

Приклад 1. *Нехай $0 \le p \le \infty$. Існує горизонтально порядково неперервний ортогонально адитивний функціонал $f\colon L_p \to \mathbb{R}$, який не є порядково неперервним. Більше того, f не є рівномірно порядково неперервним.*

Доведення. Визначимо функцію $\varphi\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$, поклавши $\varphi(t) = t$ при $|t| \le 1$ та $\varphi(t) = 0$ при $|t| > 1$. Далі визначимо відображення $f\colon L_p \to \mathbb{R}$ за допомогою рівності

$$f(x) = \int_{[0,1]} \varphi\big(x(t)\big)\, d\mu(t).$$

Ортогональна адитивність f випливає безпосередньо з властивостей інтеграла Лебеґа. Покажемо, що T – горизонтально порядково неперервний. Зазначимо, що оскільки L_p має властивість зліченності ланцюгів (кожна диз'юнктна підмножина L_p не більш, ніж зліченна), то горизонтально порядкову неперервність операторів, визначених на L_p, можна перевіряти лише на послідовностях. Припустимо, що $x \in L_p$ та (x_n) – послідовність в L_p така, що $x_n \xrightarrow{h} x$. Покладемо $A = \{t \in [0,1] : |x(t)| \le 1\}$ (зрозуміло, що A визначається з точністю до множини міри нуль). Беручи до уваги $x_n \sqsubseteq x$ для всіх n, маємо $\varphi(x_n)|_{[0,1]\setminus A} = 0$, а отже, враховуючи ще й те, що $|x_n| \le |x| \le 1$ на A, отримуємо

$$\big|f(x_n) - f(x)\big| = \Big|\int_A x_n \, d\mu - \int_A x \, d\mu\Big| = \Big|\int_A (x_n - x)\, d\mu\Big| \le \int_A |x_n - x|\, d\mu \longrightarrow 0,$$

згідно з теоремою Лебеґа про обмежену збіжність (зауважимо, що $x_n \xrightarrow{o} x$ в L_p означає збіжність майже скрізь разом із порядковою обмеженістю послідовності (x_n), див. [2, Lemma 8.17]). Для доведення того, що T не є рівномірно порядково неперервним, розглянемо послідовність сталих функцій $x_n(t) \equiv 1 + \frac{1}{n}$ для всіх n. Тоді $x_n \rightrightarrows \mathbf{1}$, де $\mathbf{1}$ означає функцію, що тотожно дорівнює одиниці, $f(x_n) = 0$ для всіх n та $f(\mathbf{1}) = 1$. □

Основний результат встановлює порядкову неперервність ортогонально адитивних операторів з певного класу, які є водночас горизонтально-порядково неперервними та рівномірно-порядкової неперервними.

Нехай E, F – векторні ґратки, причому F – порядково повна. Абстрактний оператор Урисона $S \in \mathcal{U}(E, F)$ називатимемо *оболонкою*, якщо S є оболонкою деякого оператора $T \in \mathcal{U}(E, F)$, тобто, $S = \widehat{T}$.

Згідно з [8], векторна ґратка E має *горизонтальну властивість Єгорова*, якщо для кожного $x \in E$, кожного $e \in E^+$ і кожної сітки $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ в E таких, що $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ та $|x_\alpha|+|x| \le e$ для всіх $\alpha \in A$, існує сітка $(e_\beta)_{\beta \in B}$ фрагментів елемента e така, що $e_\beta \xrightarrow{h} e$ і для кожного $\beta \in B$, виконується умова $\big(|x-x_\alpha| \wedge e_\beta\big) \overset{e}{\rightrightarrows}_\alpha 0$. Тут сітка фрагментів $(e_\beta)_{\beta \in B}$ відіграє роль послідовності множин, міра яких прямує до повної міри, на кожній з яких дана послідовність прямує до своєї границі рівномірно в класичній теоремі Єгорова.

Наприклад, кожна вимірна векторна ґратка має горизонтальну властивість Єгорова, зокрема, кожна векторна ґратка класів еквівалентності вимірних функцій на просторі з мірою (Ω, Σ, μ) (кажуть, що векторна ґратка E *вимірна*, якщо для кожного $e \in E^+ \setminus \{0\}$ булева алгебра $\mathfrak{F}_e$ є вимірною).

Порядкова неперервність в наступній теоремі розглядається в сенсі слабкої порядкової збіжності.

Теорема 2. *Нехай E – векторна ґратка з головною проективною властивістю та горизонтальною властивістю Єгорова, F – порядково повна векторна ґратка. Тоді кожна оболонка $S \in \mathcal{U}(E, F)$, яка є горизонтально-порядково неперервною та рівномірно-порядково неперервною, є порядково неперервним ортогонально адитивним оператором.*

Доведення. Згідно з п. (5) твердження 3, $T = \widehat{T} = |T|$ (ці рівності ми будемо використовувати далі у доведенні). Нехай $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ – сітка в E, $x \in E$ та $x_\alpha \xrightarrow{o} x$. Нехай $(u_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ – така сітка, що $u_\gamma \downarrow 0$ та для кожного $\gamma \in \Gamma$ існує індекс $\alpha_\gamma \in A$ такий, що $|x - x_\alpha| \le u_\gamma$ для всіх $\alpha \ge \alpha_\gamma$. Зафіксуємо довільний індекс $\gamma_0 \in B$ і покладемо $e := u_{\gamma_0} + 2|x|$. Тоді $|x_\alpha| + |x| \le e$ для всіх $\alpha \ge \alpha_{\gamma_0}$. За горизонтальною властивістю Єгорова, застосованою до сітки $(x_\alpha)_{\alpha \ge \alpha_{\gamma_0}}$, виберемо сітку $(e_\beta)_{\beta \in B}$ фрагментів елемента e, таку, що $e_\beta \xrightarrow{h} e$ а також для кожного $\beta \in B$ має місце $|x - x_\alpha| \wedge e_\beta \overset{e}{\rightrightarrows}_\alpha 0$. Позначимо через P_z порядкову проекцію з E на смугу B_z, породжену елементом $z \in E$. Тоді для довільного $\alpha \ge \alpha_{\gamma_0}$ і кожного $\beta \in B$ отримуємо

$$\begin{aligned} &\big|T(x) - T(x_\alpha)\big| \le \\ &\big|T(x) - T(P_{e_\beta}x)\big| + \big|T(P_{e_\beta}x) - T(P_{e_\beta}x_\alpha)\big| + \big|T(P_{e_\beta}x_\alpha) - T(x_\alpha)\big|. \end{aligned} \tag{3}$$

Оскільки $e = e_\beta \sqcup (e - e_\beta)$, то за ортогональною адитивністю T, використовуючи (ii) та очевидне відношення $T(e_\beta) \uparrow$, дістанемо

$$T(e - e_\beta) = T(e) - T(e_\beta) \downarrow 0. \tag{4}$$

За очевидною властивістю порядкової проекції, $P_{e_\beta} u \sqsubseteq u$, а отже,

$$(\forall \beta \in B)(\forall u \in E)\ u = P_{e_\beta} u \sqcup (u - P_{e_\beta} u). \tag{5}$$

Якщо $|u| \le |e|$, то

$$|u - P_{e_\beta} u| = |P_e u - P_{e_\beta} u| = |P_{e - e_\beta} u| \le |P_{e - e_\beta} e| = |e - e_\beta|. \tag{6}$$

Отже, для довільного $u \in \{x, x_\alpha : \alpha \in A\}$, використовуючи ортогональну адитивність T, ми отримуємо

$$\big|T(u) - T(P_{e_\beta} u)\big| \overset{(5)}{=} \big|T(u - P_{e_\beta} u)\big| \le T|u - P_{e_\beta} u| \overset{(6)}{\le} T(e - e_\beta); \tag{7}$$

Застосовуючи двічі (7) спочатку для $u = x$, а потім для $u = x_\alpha$, за допомогою (3), отримаємо

$$\big|T(x) - T(x_\alpha)\big| \le 2T(e - e_\beta) + \big|T(P_{e_\beta} x) - T(P_{e_\beta} x_\alpha)\big|. \tag{8}$$

Тепер покажемо, що

$$(\forall \beta \in B)\ \ P_{e_\beta} x_\alpha \overset{e}{\rightrightarrows}_\alpha P_{e_\beta} x. \tag{9}$$

Оскільки $e_\beta \sqsubseteq e$ та $|x - x_\alpha| \le e$ для всіх індексів, то

$$|x - x_\alpha| = P_e |x - x_\alpha| = P_{e_\beta} |x - x_\alpha| \vee P_{e - e_\beta} |x - x_\alpha|$$

а отже, використовуючи (1), отримуємо

$$\begin{aligned} |x - x_\alpha| \wedge e_\beta &= \big((P_{e_\beta} |x - x_\alpha|) \wedge e_\beta\big) \vee 0 \\ &= \Big(\sup_n |x - x_\alpha| \wedge n e_\beta\Big) \wedge e_\beta = P_{e_\beta} |x - x_\alpha|. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$|P_{e_\beta} x_\alpha - P_{e_\beta} x| = |P_{e_\beta}(x - x_\alpha)| \le P_{e_\beta} |x - x_\alpha| = |x - x_\alpha| \wedge e_\beta \overset{e}{\rightrightarrows}_\alpha 0,$$

звідки випливає (9). З рівномірно порядкової неперервності T та (9) випливає, що $T(P_{e_\beta} x) - T(P_{e_\beta} x_\alpha) \xrightarrow{o}_\alpha 0$ для всіх $\beta \in B$. Тепер для довільного $\beta \in B$ виберемо сітку $(w_{\beta,\gamma})_{\gamma \in \Gamma_\beta}$ в F таку, що $w_{\beta,\gamma} \downarrow_\gamma 0$ і для кожного $\gamma \in \Gamma_\beta$ існує $\alpha_{\beta,\gamma} \in A$ такий, що

$$(\forall \alpha \ge \alpha_{\beta,\gamma})\ \ \big|T(P_{e_\beta} x) - T(P_{e_\beta} x_\alpha)\big| \le w_{\beta,\gamma}. \tag{10}$$

Розглянемо множину $\Pi := \bigcup_{\beta \in B} \big(\{\beta\} \times \Gamma_\beta\big)$ з лексикографічним порядком, тобто, $(\beta', \gamma') < (\beta'', \gamma'')$ означає, що або $\beta' < \beta''$, або $\beta' = \beta''$ та $\gamma' < \gamma''$. Очевидно, множина Π є напрямленою відносно заданого порядку. Визначимо сітку в F, поклавши $S_{(\beta,\gamma)} :=$

$2\widehat{T}(e - e_\beta) + w_{\beta,\gamma}$ для всіх $(\beta,\gamma) \in \Pi$. Тоді для довільного $(\beta,\gamma) \in \Pi$ з (8) та (10) отримуємо

$$(\forall \alpha \ge \alpha_{\beta,\gamma}) \ \big|T(x) - T(x_\alpha)\big| \le S_{(\beta,\gamma)}.$$

Згідно з твердженням 1, залишається показати, що $\inf\{S_{(\beta,\gamma)} : (\beta,\gamma) \in \Pi\} = 0$. Остання умова доводиться стандартним чином, використовуючи (4) та $w_{\beta,\gamma} \downarrow_\gamma 0$ для всіх $\beta \in B$. □

Зазначимо, що припущення теореми 2 досить сильні, хоча нам не відомо жодного прикладу, який би показував, що взагалі якісь припущення потрібні. Таким чином, залишаються нерозв'язаною така проблема.

Проблема 2. *Чи існують векторна ґратка E з головною проективною властивістю, порядково повна векторна ґратка F та регулярний ортогонально адитивний оператор $T\colon E \to F$, який є горизонтально-порядково неперервним та рівномірно-порядково неперервним, але не є порядково неперервним?*

Список літератури

[1] Abramovich Yu., Sirotkin G. *On order convergence of nets.* Positivity, 2005, **9** (3), 287–292. DOI 10.1007/s11117-004-7543-x

[2] Aliprantis C. D., Border K. C. Infinite Dimensional Analysis, 3-d Ed., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2006.

[3] Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators, Springer, Dordrecht, 2006.

[4] Krasikova I., Pliev M., Popov M. *Measurable Riesz spaces.* Carpathian Math. Publ., 2021, **13** (1), 81-88. DOI 10.15330/cmp.13.1.81-88

[5] Mazón J. M., Segura de León S. *Order bounded ortogonally additive operators.* Rev. Roumane Math. Pures Appl., 1990, **35** (4), 329–353. MR1082516

[6] Mykhaylyuk V., Pliev M., Popov M. *The lateral order on Riesz spaces and orthogonally additive operators.* Positivity, 2021, **25** (2), 291-327. DOI 10.1007/s11117-020-00761-x

[7] Pliev M. A., Ramdane K. *Order unbounded orthogonally additive operators in vector lattices.* Mediterranean J. Math., 2018, **15** (2), Paper No. 55, 20 pp. DOI 10.1007/s00009-018-1100-5

[8] Popov M. *Horizontal Egorov property of Riesz spaces.* Proc. Amer. Math. Soc., 2021, **149** (1), 323–332. DOI: 10.1090/proc/15235.

[9] Popov M. *Banach lattices of orthogonally additive operators.* Preprint.

Надійшло 26.03.2021

Fotiy O. G., Krasikova I. V., Pliev M. A., Popov M. M., *On separate order continuity of orthogonally additive operators*, Bukovinian Math. Journal. **9**, 1 (2021), 200–209.

Our main result asserts that, under some assumptions, the uniformly-to-order continuity of an order bounded orthogonally additive operator between vector lattices together with its horizontally-to-order continuity implies its order continuity (we say that a mapping $f\colon E \to F$ between vector lattices E and F is horizontally-to-order continuous provided f sends laterally

increasing order convergent nets in E to order convergent nets in F, and f is uniformly-to-order continuous provided f sends uniformly convergent nets to order convergent nets).

Key words and phrases: vector lattice, Riesz space, orthogonally additive operator, order continuous operator