УДК 51(0758)

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОБМЕЖЕННЯМИ І ПАРАМЕТРАМИ

Т.В. Кравченко, *викладач*
ВП НУБіП України Ірпінський економічний коледж

Розглянуто розв'язність оберненої задачі визначення частини вільного члена звичайного диференціального лінійного рівняння другого порядку з умовою перевизначення інтегрального типу.

Викладено власне бачення деяких відомих аспектів теорії звичайних диференціальних рівнянь.

Крайова задача

Поняття крайової задачі. Найпоширенішою задачею в теорії диференціальних рівнянь є задача Коші, в якій додаткова умова – початкові дані, що задають значення невідомої функції і її похідних за фіксованого значення незалежної змінної [1–6]. Зрозуміло, що це не єдиний спосіб із множини всіх розв'язків диференціального рівняння виділити той чи інший частинний розв'язок. Часто за додаткові умови задають граничні (крайові) умови, що визначають значення шуканої функції і її похідних (або деяких виразів від них) для кількох фіксованих значень незалежної змінної.

Означення. Задачу відшукання частинного розв'язку диференціального рівняння, що задовольняє дані граничні умови, називають крайовою задачею.

Дослідимо крайову задачу – відшукати на проміжку $[0; l]$ розв'язок рівняння

$$x'' + p(t)x' + q(x)x = f(t), \qquad (1.1)$$

який задовольняє на кінцях проміжку умови:

$$\alpha x(0) + \beta x'(0) = u_0,$$
$$\gamma x(l) + \delta x'(l) = u_1, \qquad (1.2)$$

де $\alpha, \beta, \gamma, \delta, v_0, v_1$ – задані числа.

Якщо в умовах (1.2) $\beta=\gamma=0$, то ці граничні умови називають умовами першого роду; якщо $\alpha=\gamma=0$, – умовами другого роду; якщо $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ одночасно відрізняються від нуля, – умовами третього роду.

Крайові задачі, в яких $f(t) \neq 0$, називають неоднорідними крайовими задачами, а крайові задачі (1.1) (1.2), де $f(t)=0$ і $v_0=v_1=0$, – однорідними крайовими задачами.

Зрозуміло, що кожна однорідна крайова задача має своїм розв'язком функцію $x(t)=0$ – так званий тривіальний розв'язок.

Функція Гріна. Означення. Функцією Гріна крайової задачі називається функція $G(t,s)$, що називається для $t\in[o,l]$, $s \in]0,l[$ і при кожному фіксованому має три властивості, які будуть описані нижче.

Побудуємо функцію Гріна. Для цього розглянемо однорідну задачу:

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0,$$
$$\alpha x(0) + \beta x'(0) = 0, \quad (1.3)$$

$$\gamma x(l) + \delta x'(l) = 0. \quad (1.4)$$

Припустимо, що задача (1.3) (1.4) має тільки тривіальний розв'язок. Тоді покажемо, що за цієї умови існує єдина функція Гріна.

Функцію Гріна шукатимемо у вигляді:

$$G(t,s) = \begin{cases} a_1x_1(t) + a_2x_2(t), & t > s, \\ b_1x_1(t) + b_2x_2(t), & t < s, \end{cases} \quad (1.5)$$

де $x_1(t)$, $x_2(t)$ — фундаментальна система рівняння (1.3), a_1, a_2, b_1, b_2 — невідомі функції, які підлягають визначенню.

Невідому функцію визначаємо таким чином, щоб виконувалися всі властивості функції Гріна:

1) при $t < s$ задовольняє рівняння (1.3):

$$G''_{tt} + p(t)G'_t + q(t)G = 0, \; t = s,$$
$$\{a_1x''_1 + a_2x''_2\} + p(t)\{a_1x'_1 + a_2x'_2\} + q(t)\{a_1x_1 \;+ a_2x_2\;\} =$$
$$= a_1\{x''_1 + p(t)x'_1 + q(t)x_1\} + a_2\{x''_2 + p(t)x'_2 + q(t)x_2\} = 0.$$

при $t < s$

$$\{b_1x''_1 + b_2x''_2\} + p(t)\{b_1x'_1 + b_2x'_2\} + q(t)\{b_1x_1 \;+ b_2x_2\;\} =$$
$$= b_1\{x''_1 + p(t)x'_1 + q(t)x_1\} + b_2\{x''_2 + p(t)x'_2 + q(t)x_2\} = 0.$$

2) при $0 \le s \le l$ задовольняє крайові умови із (1.3) (1.4):

$$\{b_1x''_1 + b_2x''_2\} + p(t)\{b_1x'_1 + b_2x'_2\} + q(t)\{b_1x_1 \;+ b_2x_2\;\} =$$
$$= b_1\{x''_1 + p(t)x'_1 + q(t)x_1\} + b_2\{x''_2 + p(t)x'_2 + q(t)x_2\} = 0.$$

Розкладемо на таку систему:

$$\alpha G(0,s) + \beta G'_t(0,s) = 0, \; (t=0, \, t < s),$$
$$\gamma G(l,s) + \delta G'_t(l,s) = 0, \; (t=l).$$

Приведемо її до такого вигляду:

$$\alpha\{a_1x_1(0) + a_2x_2(0)\} + \; \beta\{a_1x'_1(0) + a_2x'_2(0)\} = 0,$$
$$\gamma\{b_1x_1(l) + b_2x_2(l)\} + \; \delta\{b_1x'_1(l) + b_2x'_2(l)\} = 0.$$

3) при $t = s$ $G(t,s)$ неперервна по t, а її похідна по t має в точці $t \ne s$ розрив першого роду зі стрибком, що дорівнює $\frac{1}{a(s)}$, тобто

$$G(s+0,s) = G(s-0,s),$$
$$G'_t(s+0,s) - G'_t(s-0,s) = \frac{1}{a(s)}, \quad \text{де} \quad t \ne s,$$

тут $a_1 = a_1(s), \; a_2 = a_2(s), \; b_1 = b_1(s), \; b_2 = b_2(s)$.

Представимо у вигляді:

$$a_1x_1(s) + a_2x_2(s) = b_1x_1(s) + b_2x_2(s),$$
$$b_1x'_1(s) + b_2x'_2(s) - a_1x'_1(s) - b_2x'_2(s) = \frac{1}{a(s)}.$$

Зведення крайової задачі до інтегрального рівняння. Нехай задана крайова задача:

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t),$$
$$\alpha x(0) + \beta x'(0) = 0, \quad (1.6)$$
$$\gamma x(l) + \delta x'(l) = 0. \quad (1.7)$$

Виділимо із рівняння (1.6) таке однорідне рівняння:

$$x'' + c(t)x' + d(t)x = 0,$$

фундаментальну систему якого можна побудувати в явному вигляді $x_1(t)$, $x_2(t)$.

Припустимо, що крайова задача:

$$x'' + c(t)x' + d(t)x = f(t),$$
$$\alpha x(0) + \beta x'(0) = 0,$$
$$\gamma x(l) + \delta x'(l) = 0, \quad (1.8)$$

має єдиний розв'язок і можна побудувати функцію Гріна в явному вигляді, тобто існує $G(t,s)$, така, що розв'язок задачі (1.8) дається формулою:

$$x(t) = \int_a^b G(t,s)y(s)ds. \quad (1.9)$$

Задачу (1.6) (1.7) можна звести до інтегрального рівняння:

$$x'' + c(t)x' + d(t)x = x'' + c(t)x' +$$
$$+ d(t)x + f(t) - x'' - p(t)x' - q(x)x.$$

Після скорочення отримаємо таке рівняння:

$$x'' + c(t)x' + d(t)x = f(t) + l(t)x' + r(t)x, \quad (1.10)$$

де $l(t)$, $r(t)$ дорівнюють $l(t) = c(t) - p(t)$, $r(t) = d(t) - q(t)$.

Нехай:

$$y(t) = f(t) + l(t)x' + r(t)x, \quad (1.11)$$

тоді задача (1.8) буде допоміжною задачею для крайової задачі (1.6, 1.7).

Підставляємо (1.9) в (1.11):

$$y(t) = f(t) + l(t)\int_a^b \frac{\partial}{\partial t}G(t,s)y(s)ds +$$
$$+ r(t)\int_a^b G(t,s)y(s)d(s),$$
$$y(t) = f(t) + \int_a^b\{l(t)\frac{\partial}{\partial t}G(t,s) + r(t)G(t,s)\}y(s)ds. \quad (1.12)$$

Зробимо заміну для зручного вигляду інтегрального рівняння (1.12):

$$K(t,s) = l(t)\frac{\partial}{\partial t}G(t,s) + r(t)G(t,s).$$

Тоді отримаємо:

$$y(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s)y(s)ds, \quad (1.13)$$

де $K(t,s)$ ядро інтегрального рівняння.

Нехай існує розв'язок рівняння (1.13) $y^*(t)$. За формулою (1.9) маємо

$$x^*(t) = \int_a^b G(t,s)y^*(s)ds. \quad (1.14)$$

Крайова задача з обмеженнями і параметрами

2. ***Поняття крайової задачі з обмеженнями і параметрами.*** На відміну від крайової задачі звичайного диференціального рівняння, в крайовій задачі з обмеженням і параметром треба визначити функцію, яка задовольняє диференціальне рівняння з параметром, крайовими умовами і обмеженням, тобто таку задачу:

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = u(t) + f(t),$$
$$\alpha x(a) + \beta x'(a) = 0, \quad (2.1)$$
$$\gamma x(b) + \delta x'(b) = 0, \quad (2.2)$$

$$\int_a^b \Phi(t)x(t)dt = \sigma, \quad (2.3)$$

де $y(t)=\lambda\varphi(t)$; $x(t)$ — невідомі; $\alpha, \beta, \gamma, \delta(t)$, $\sigma, \Phi(t), p(t), q(t), f(t)$ — відомі.

Наприклад:

$$x'' - 2x' + x = \lambda - 2t,$$
$$x(0) + x'(0) = 0,$$
$$2x(1) - x'(1) = 0,$$

$$\int_0^1 x(t)dt = 1,$$

де $u(t) = \lambda \times 1$, $\varphi(t) = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\delta = -1$, $\sigma = 1$, $a = 0$, $b=1$

Крайову задачу з параметром та обмеженням можна звести до інтегрального рівняння. Для цього треба використати допоміжну задачу.

Допоміжна задача. Нехай маємо допоміжну задачу:

$$x'' + c(t)x' + d(t)x = \lambda\varphi(t) + y(t),$$
$$\alpha x(a) + \beta x'(a) = 0, \quad (2.4)$$

$$\gamma x(b) + \delta x'(b) = 0, \quad (2.5)$$

$$\int_a^b \Phi(t)x(t)dt = \sigma. \quad (2.6)$$

Припустимо, що коефіцієнти $c(t)$ і $d(t)$, які в нашому розпорядженні, підібрані таким чином, що крайова задача:

$$x'' + c(t)x' + d(t)x = \lambda\varphi(t) + y(t),$$
$$\alpha x(a) + \beta x'(a) = 0,$$
$$\gamma x(b) + \delta x'(b) = 0, \quad (2.7)$$

має єдиний розв'язок при довільній функції $g(t)$, який можна побудувати в явному вигляді відносно просто. Тут існує функція Гріна $G(t,s)$, така, що розв'язок задачі (2.6) виражається формулою

$$x(t) = \int_a^b g(t)ds. \quad (2.8)$$

Встановимо, що за даного припущення можна побудувати розв'язок допоміжної задачі. Для цього запишемо розв'язок задачі (2.4) (2.6) у вигляді:

$$x(t) = \int_a^b G(t,s)\{\lambda\varphi(s) + y(s)\}ds,$$

або

$$x(t) = \lambda\int_a^b G(t,s)\varphi(s)ds + \int_a^b G(t,s)y(s)ds. \quad (2.9)$$

Введемо позначення:

$$x(t) = \lambda\int_a^b G(t,s)\varphi(s)ds = \eta(\xi),$$

тоді формула (2.8) приймає вигляд:

$$x(t) = \lambda\eta(\xi) + \int_a^b G(t,s)y(s)ds. \quad (2.10)$$

Підставимо рівність (2.10) у рівність (2.6). В результаті отримаємо:

$$\lambda\int_a^b \Phi(t)\eta(\xi)dt + \int_a^b \Phi(t)\int_a^b G(t,s)\,y(s)ds\,dt = \sigma. \quad (2.11)$$

Звідси отримаємо:

$$\lambda = \frac{\sigma}{\bar{\beta}} - \frac{1}{\bar{\beta}}\int_a^b\int_a^b \Phi(t)G(t,s)\,y(s)dsdt = \sigma, \quad (2.12)$$

де

$$\bar{\beta} = \int_a^b \Phi(t)\eta(\xi)dt, \quad V(s) = \int_a^b \Phi(t)G(t,s)dt.$$

Отже, знайшовши λ, можна знайти чому дорівнює $u(t)$:

$$u(t) = \frac{\sigma}{\bar{\beta}}\cdot\varphi(t) - \varphi(t)\cdot\frac{1}{\bar{\beta}}\cdot\int_a^b V(s)y(s)ds. \quad (2.13)$$

Визначимо для зручності позначення:

$$W(t) = \frac{\sigma}{\bar{\beta}}\cdot\varphi(t), \quad \Gamma(s) = \frac{V(s)}{\bar{\beta}}.$$

Отже, маємо:

$$u(t) = W(t) - \int_a^b \varphi(t)\Gamma(s)y(s)ds. \quad (2.14)$$

Ввівши позначення

$$R(t,s) = \varphi(t)\Gamma(s), \qquad (2.15)$$

маємо

$$u(t) = W(t) - \int_a^b R(t,s)y(s)ds. \qquad (2.16)$$

Підставивши рівність (2.11) у (2.9), маємо:

$$x(t) = \frac{\sigma}{\beta}\cdot \eta(\xi) - \eta(\xi)\int_a^b \Gamma(s)y(s)ds + \int_a^b G(t,s)y(s)ds,$$

або

$$x(t) = h(t) + \int_a^b H(t,s)y(s)ds, \qquad (2.17)$$

де

$$h(t) = \frac{\sigma}{\beta}\cdot \eta(\xi),\ H(t,s) = G(t,s) - \eta(\xi)\cdot\Gamma(s).$$

Функції $x(t)$ і $u(t)$, які виражаються формулами (2.17) і (2.16) є розв'язками задачі (2.4)–(2.6).

Наприклад, знайдемо розв'язки допоміжної задачі, складеної до даної вище задачі:

$$\begin{cases} x'' = \lambda + y(t), & (2.18)\\ x(0) + x'(0) = 0, & \\ 2x(1) - x'(1) = 0, & (2.19)\\ \int_0^1 x(t)dt = 1. & (2.20)\end{cases}$$

Очевидно, що до допоміжної задачі можна скласти функцію Гріна, тому, що існує кілька тривіальних розв'язок задачі.

Функція Гріна буде мати вигляд:

$$G(t,s) = \begin{cases} t(s-1), t < s,\\ s(t-1), t > s.\end{cases} \qquad (2.21)$$

Тоді знаходимо, чому дорівнює $x(t)$:

$$x(t) = \lambda\int_0^1 G(t,s)\varphi(s)ds + \int_0^1 G(t,s)y(s)ds =$$

$$= \lambda\int_0^1 s(t-1)ds + \lambda\int_t^1 t(s-1)ds + \int_0^1 G(t,s)y(s)ds =$$

$$= \frac{\lambda}{2}\cdot(t^3 - t^2) + \lambda t\cdot\left(-\frac{1}{2} - \frac{t^2}{2} + t\right) + \int_0^1 G(t,s)y(s)ds,$$

$$x(t) = \frac{\lambda}{2}\cdot(t^2 - t) + \int_0^1 G(t,s)y(s)ds. \qquad (2.22)$$

Підставимо знайдене значення $x(t)$ у обмеження (2.20) та знайдемо λ:

$$\int_0^1 \left(\frac{\lambda}{2}\cdot(t^2 - t) + \int_0^1 G(t,s)y(s)ds\right)dt = 1.$$

$$\lambda\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) + \int_0^1\int_0^1 G(t,s)y(s)ds = 1.$$

$$\lambda = 12 + 6\int_0^1 (s^2 - s + 1)y(s)ds. \qquad (2.23)$$

Підставивши знайдене λ з рівності (2.23) у (2.22), отримаємо $x(t)$ з відомим λ:

$$x(t) = 6(t^2 - t) + \int_0^1 \{G(t,s) +$$

$$+ 3(t^2 - t)\cdot(s^2 - s + 1)\}y(s)ds. \qquad (2.24)$$

Оскільки в задачі (2.18) $u(t)$=1·λ, то маємо рівність:

$$u(t) = 12 + 6\int_0^1 (s^2 - s + 1)y(s)ds. \qquad (2.25)$$

Зведення крайової задачі з обмеженням і параметрами до інтегрального рівняння

Зведемо задачу:

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = u(t) + f(t), \qquad (2.1)$$

$$\alpha x(a) + \beta x'(a) = 0,$$

$$\gamma x(b) + \delta x'(b) = 0, \qquad (2.2)$$

$$\int_a^b \Phi(t)x(t)dt = \sigma, \qquad (2.3)$$

до інтегрального рівняння. Для цього розглянемо допоміжну задачу:

$$x'' + c(t)x' + d(t)x = \lambda\varphi(t) + y(t), \qquad (2.26)$$

$$\alpha x(a) + \beta x'(a) = 0,$$

$$\gamma x(b) + \delta x'(b) = 0, \qquad (2.27)$$

$$\int_a^b \Phi(t)x(t)dt = \sigma. \qquad (2.28)$$

Розв'язок цієї задачі виражається формулами:

$$x(t) = h(t) + \int_a^b H(t,s)y(s)ds, \qquad (2.29)$$

$$u(t) = W(t) - \int_a^b R(t,s)y(s)ds. \qquad (2.30)$$

Рівняння (2.26) представимо у вигляді:

$$x'' + c(t)x' + d(t)x = \lambda\varphi(t) + f(t) + l(t)x' + r(t)x, \qquad (2.31)$$

де $l(t) = c(t) - p(t)$, $r(t)=d(t)-q(t)$.

Нехай

$$y(t) = f(t) + l(t)x' + r(t)x. \qquad (2.32)$$

Підставивши (2.29) у (2.32), отримаємо:

$$y(t) = f(t) + l(t)\{h'(t) + \int_a^b \frac{\partial}{\partial t}H(t,s)y(s)ds\} +$$

$$+ r(t)\{h(t) + \int_a^b H(t,s)y(s)ds\},$$

або

$$y(t) = f(t) + l(t)h'(t) + r(t)h(t) +$$

$$+ \int_a^b \left\{l(t)\frac{\partial}{\partial t}H(t,s) + r(t)H(t,s)\right\}y(s)ds. \qquad (2.33)$$

Нехай

$$g(t) = f(t) + l(t)h'(t) + r(t)h(t), \quad (2.34)$$

$$K(t,s) = l(t)\frac{\partial}{\partial t}H(t,s) + r(t)H(t,s), \quad (2.35)$$

тоді рівняння (2.33) приймає вигляд:

$$y(t) = g(t) + \int_a^b K(t,s)y(s)ds \quad (2.36)$$

Проілюструємо теоретичні висновки на прикладі. Для цього представимо дану задачу у вигляді:

$$x'' = \lambda + y(t), \quad (2.18)$$

$$x(0) + x'(0) = 0, \quad (2.19)$$

$$2x(1) - x'(1) = 0,$$

$$\int_0^1 x(t)dt = 1. \quad (2.20)$$

де
$$y(t) = 2x' - x - 2t. \quad (2.37)$$

У попередньому пункті було встановлено, що задача (2.18)–(2.20) має єдиний розв'язок:

$$x(t) = 6(t^2 - t) + \int_0^1 \{G(t,s) + $$
$$+ 3(t^2 - t)(s^2 - s + 1\}y(s)ds. \quad (2.24)$$

Щоб знайти, треба виразити :

$$x'(t) = (12t - 6) + \int_0^1 \{\frac{\partial}{\partial t}G(t,s) +$$
$$+ (6t - 3)(s' - s + 1)y(s)ds. \quad (2.38)$$

Підставимо рівності (2.38) і (2.24) у рівність (2.37) та отримаємо:

$$y(t) = (24t - 12) + 2\int_0^1 \left\{\frac{\partial}{\partial t}G(t,s) +\right.$$
$$\left.+ (6t - 3)(s^2 - s + 1)\right\}y(s)ds - 6(t^2 - t) - \int_0^1 \{G(t,s) +$$
$$3(t^2 - t)(s^2 - s + 1)\}y(s)ds - 2t,$$

або

$$y(t) = (-6t^2 + 28t - 12) +$$
$$+ \int_0^1 \left\{G(t,s)\left(2\frac{\partial}{\partial t} - 1\right) + (s^2 - s + 1)\right.$$
$$\left.(-3t^2 + 15t - 6)\right\}y(s)ds, \quad (2.39)$$

тобто отримали інтегральне рівняння (2.36), у якого

$$g(t) = -6t^2 + 28t - 12,$$
$$K(t,s) = G(t,s)\left(2\frac{\partial}{\partial t} - 1\right) +$$
$$+ (s^2 - s + 1)(-3t^2 + 15t - 6). \quad (2.40)$$

Отже, ми показали, що крайову задачу (2.1)–(2.3) з параметром і обмеженням можна звести до інтегрального рівняння (2.36).

Висновок

Теорія крайових задач для диференціальних рівнянь з параметрами та обмеженнями є подальшим розвитком теорії крайових задач для диференціальних рівнянь, основи якої закладені в фундаментальних працях видатних математиків у XIX та XX століттях. Диференціальні рівняння з параметрами виникли в результаті дослідження задач з керуванням, зокрема балістичної задачі.

Дослідження диференціальних рівнянь з параметрами і обмеженнями можна звести до дослідження інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Використовуючи теорію інтегральних рівнянь, можна встановити умови існування та єдиність розв'язку крайової задачі з параметрами та обмеженнями.

Література

1. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. – К.: "Либідь", 1994 р. – 360 с.
2. Степанов В.В. Курс диференциальных уравнений. – М.: "Гос. тех. издат.", 1953 р. – 468 с.
3. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. – М.: "Физмат гиз", 1953 р. – 232 с.
4. Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л. Приближенные методы решения диференциальных уравнений, – М.: "Наука", 1965 р. – 383 с.
5. Наймарк М.А. Линейные диференциальные операторы. Изд. 2-е, перераб. – М: "Наука", 1969 р. – 526 с.
6. Бевз Г.П. Методика викладання математики, – К.: "Вища школа", 1989 р. – 367 с.

АННОТАЦИЯ

Кравченко Т.В. *Методы исследования краевых задач для дифференциальных уравнений с ограничениями и параметрами // Биоресурсы и природопользование. – 2013. –* ***5****, № 3–4. – С. 63–68.*

Рассмотрена развязность обратной задачи определения части свободного члена обыкновенного диференциального линейного уравнения второго порядка.

Изложено свое видение некоторых известных аспектов теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

SUMMARY

T. Kravchenko. *Methods of regional tasks research for differential equalizations with limitations and parameters // Biological Resources and Nature Management. – 2013. –* ***5****, № 3–4. – P. 63–68.*

We consider the inverse task of determining the swagger of a free term of differential ordinary second order.

Own point of view his vision of some known aspects of the theory of ordinary differential equations is done.