

УДК 514.18

## РУХ ЧАСТИНКИ ПО ОГОРОДЖУЮЧОМУ КОЖУХУ У ВИГЛЯДІ ЕВОЛЬВЕНТНОГО ЦИЛІНДРА

Несвідомін В.М., д.т.н.,

Бабка В.М., к.т.н.,

Несвідомін А.В., к.т.н.

*Національний університет біоресурсів і природокористування України  
(м. Київ, Україна)*

***Наведено траєкторно-кінематичні властивості руху частинки по нерухомій шорсткій циліндричній поверхні з ортогональним перерізом у вигляді евольвенти кола.***

***Ключові слова: шорстка поверхня, евольвентний циліндр, рух частинки, диференціальні рівняння, траєкторія, швидкість.***

***Постановка проблеми.*** Існуючі конструкції обчісувальних жаток (рис.1) для збирання зернових культур обчісуванням рослин на корені складаються із барабана, бітер-відбивача, збірника зерна. Всі ці пристрої захищені верхніми та нижніми циліндричними кожухами до яких пред'являються наступні основні вимоги: 1) переміщення зерна в задану область жатки без втрат; 2) збереження зерна від деформації. Один із патентів [3] на корисну модель визначає форму верхнього кожуха у вигляді горизонтального циліндра з ортогональним перерізом евольвенти кола діаметра барабана, що забезпечує зниження втрат зерна за рахунок меншої деформації при його зіткненні з кожухом. Для того, щоб обґрунтувати параметри форми та положення евольвентного циліндричного кожуха обчісувальної жатки, необхідно дослідити рух окремої частинки по заданій шорсткій поверхні для різних вихідних умов її кидання.



Рис.1. Огороджуючі кожухи обчісувальної жатки

***Аналіз останніх досліджень і публікацій.*** В праці [2] запропоновано спосіб та аналітичний опис руху частинки по шорсткій поверхні в проєкціях супровідних тригранників траєкторії.

***Формулювання цілей статті.*** Розробити для середовища Maple [1] імітаційну модель руху частинки по шорсткій поверхні циліндра з ортогональним перерізом евольвенти кола та дослідити траєкторно-кінематичні властивості в залежності від наступних

вихідних умов: 1) параметрів форми та положення поверхні; 2) початкової швидкості кидання частинки; 3) кута напряду її кидання в дотичній площині до поверхні; 4) коефіцієнта тертя.

**Основна частина.** В проекціях на орти  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  тригранника  $\mathbf{OuvN}$  закон руху частинки визначається загальним рівнянням[2]:

$$\begin{cases} Ou := m W \cos(\widehat{\mathbf{R}_u, \mathbf{w}}) = F_g \cos(\widehat{\mathbf{R}_u, \mathbf{G}}) - f F_N \cos(\widehat{\mathbf{R}_u, \boldsymbol{\tau}}) \\ Ov := m W \cos(\widehat{\mathbf{R}_v, \mathbf{w}}) = F_g \cos(\widehat{\mathbf{R}_v, \mathbf{G}}) - f F_N \cos(\widehat{\mathbf{R}_v, \boldsymbol{\tau}}) \end{cases} \quad (1)$$

а в проекціях на орти  $\mathbf{T}$  і  $\mathbf{P}$  тригранника Дарбу  $\mathbf{OTPN}$ :

$$\begin{cases} OT := m W_\tau = F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, \boldsymbol{\tau}}) - f(F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, \mathbf{N}}) \pm F_C \cos(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{N}})) - q F_V \\ OP := m W_n \sin(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{N}}) = F_g \cos(\widehat{\mathbf{G}, \mathbf{P}}) \end{cases}, \quad (2)$$

де  $\mathbf{G} = [0, 0, -1]$  - напрямок сили тяжіння в системі  $Oxyz$ ;

$F_N = F_g \cos(\widehat{\mathbf{N}, \mathbf{G}}) \pm F_C \cos(\widehat{\mathbf{N}, \mathbf{n}})$  - сила нормальної реакції;

$F_g = mg$  і  $F_C = m V^2 k$  - сила тяжіння і відцентрова сила;

$\mathbf{N} = [0, 0, 1]$  - нормаль до поверхні  $\mathbf{R}(u, v)$  в точках траєкторії  $\mathbf{r}$ ;

$\mathbf{n}$  і  $\boldsymbol{\tau}$  - головна нормаль та дотична до траєкторії  $\mathbf{r}$  частинки;

$W = |\mathbf{w}|$ ,  $W_\tau = \frac{d}{dt}V(t)$  і  $W_n = V^2 k$  - величина прискорення частинки, її тангенціальна та нормальна складові.

Запишемо параметричне рівняння  $uv$ -координатної сітки циліндра з горизонтальними твірними з ортогональним перерізом у вигляді евольвенти кола випуклістю вверху у наступному вигляді:

$$\mathbf{R} = [a(\sin(u) - u \cos(u)), -v, -a(u \sin(u) + \cos(u))], \quad (3)$$

де  $a$  - радіус кола.

$\xi$  - кут між віссю обертання еліпса та віссю  $Oz$  в площині  $Ouz$ ;

$u \in [0; 2\pi]$ ,  $v \in [v_0; v_1]$  - криволінійні координати поверхні.

Послідовність аналітичних викладок формування закону руху частинки по шорсткому евольвентному циліндрі за рівняннями (1)-(2) є досить громіздкою. Було розроблено програмне забезпечення (див. [geometry.com.ua](http://geometry.com.ua) лістинг *CylinderEvolventa\_t*) для середовища символічних перетворень Maple, яке автоматично виводить закони руху частинки і здійснює відповідні побудови. За його допомогою були отримані наступні закони руху частинки в проекціях на орти:

•  $\mathbf{u}$  і  $\mathbf{v}$  супровідного тригранника  $\mathbf{OuvN}$ :

$$\begin{cases} Ou := ma \left( u(t) \frac{d^2}{dt^2} u(t) + \left( \frac{d}{dt} u(t) \right)^2 \right) = - \frac{a u(t) m f \frac{d}{dt} u(t) \left( a u(t) \left( \frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + g \sin(u(t)) \right)}{\sqrt{a^2 u(t)^2 \left( \frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left( \frac{d}{dt} v(t) \right)^2}} + \\ m g \cos(u(t)) \\ Ov := m \frac{d^2}{dt^2} v(t) = - \frac{m f \frac{d}{dt} v(t) \left( a u(t) \left( \frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + g \sin(u(t)) \right)}{u(t) \left( \frac{d}{dt} u(t) \right)^2 \sqrt{u(t)^2 + 1} \sqrt{a^2 (u(t)^2 + 1) \left( \frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left( \frac{d}{dt} v(t) \right)^2}} \end{cases} \quad (4)$$

• та  $\mathbf{T}$  і  $\mathbf{P}$  супровідного тригранника  $\mathbf{OTPN}$ :

$$\left\{ \begin{aligned} OT &:= \frac{ma \left( a^2 u(t)^2 \frac{d}{dt} u(t) \left( \frac{d^2}{dt^2} u(t) + \left( \frac{d}{dt} u(t) \right)^2 \right) + \frac{d}{dt} v(t) \frac{d^2}{dt^2} v(t) \right)}{\sqrt{a^2 u(t)^2 \left( \frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left( \frac{d}{dt} v(t) \right)^2}} = \frac{a mg u(t) \frac{d}{dt} u(t) \cos(u(t))}{\sqrt{a^2 u(t)^2 \left( \frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + \left( \frac{d}{dt} v(t) \right)^2}} - \\ &\quad m f \left( a u(t) \left( \frac{d}{dt} u(t) \right)^2 + g \sin(u(t)) \right) \\ OP &:= ma \left( u(t) \frac{d}{dt} u(t) \frac{d^2}{dt^2} v(t) - \frac{d}{dt} v(t) \left( u(t) \frac{d^2}{dt^2} u(t) + \left( \frac{d}{dt} u(t) \right)^2 \right) \right) = -mg \frac{d}{dt} v(t) \cos(u(t)) \end{aligned} \right. \quad (5)$$

Початковими умовами для знаходження шуканих залежностей  $u(t)$  і  $v(t)$  із виразів (4) або (5) є:

$$O_i := u(0) = u_0, \frac{d}{dt} u(0) = \frac{V_0 \sin(\alpha_0)}{a u_0}, v(0) = v_0, \frac{d}{dt} v(0) = V_0 \cos(\alpha_0). \quad (6)$$

Результати досліджень за виразами (4)-(6) збігаються. Зупинимося тільки на трьох обчислювальних експериментах. На рис.2 побудовано ортогональні та аксонометричні зображення траєкторій  $r(t)$  та графіки швидкостей  $V(t)$  зернівки як окремої матеріальної точки в залежності від кута  $\alpha_0 = 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$  її кидання при постійних значеннях радіуса кола  $a = 0.5$ , початкової швидкості  $V_0 = 14\text{м/с}$  та коефіцієнта тертя  $f = 0.3$ . Із графіків швидкості  $V(t)$  можна бачити (рис.2,в), що зернівки кинуті під кутом  $\alpha_0 = 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$  не відірвуться від поверхні і через проміжок часу  $t \geq 1.25\text{с}$  починають зупинятися на нижній частині евольвентного циліндра (місце збору зернового вороху). В той же час, зернівка кинута дещо в бік ( $\alpha_0 = 30^\circ$ ), відірветься від кожуха і впаде або ж на барабан жатки або ж на нижній жолоб через проміжок часу  $t \cong 0.27\text{с}$ .

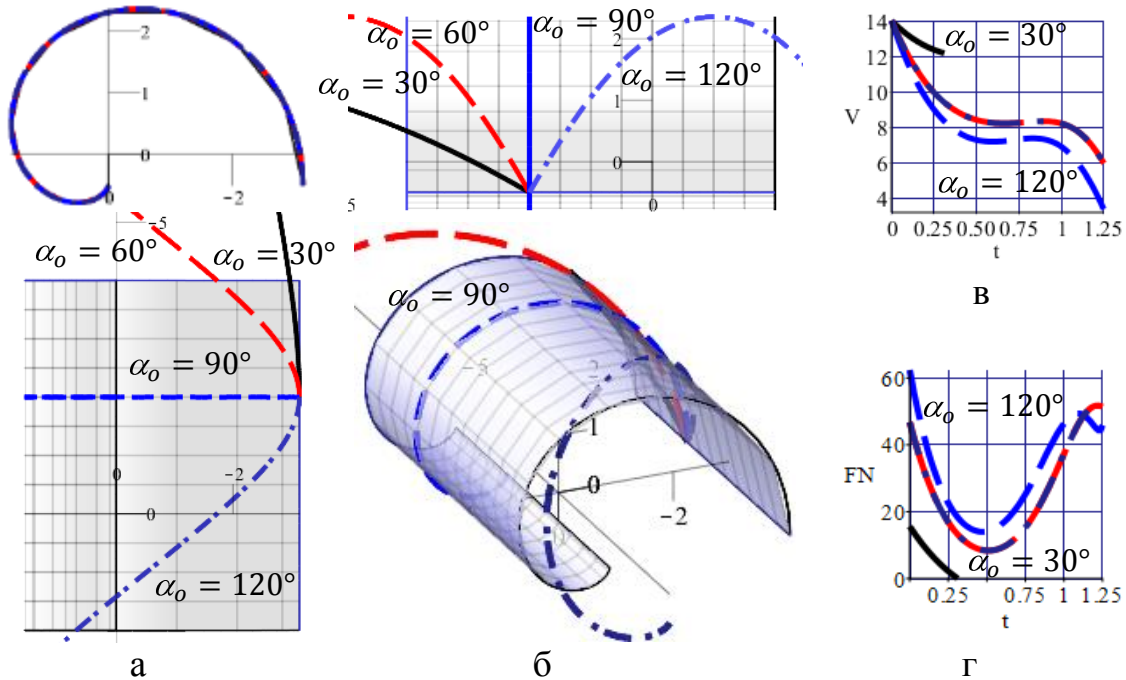


Рис.2. Траєкторії  $r(t)$ , швидкість  $V(t)$  та нормальна реакція  $F_N(t)$  частинки по внутрішній поверхні евольвентного циліндра

Щоб унеможливити рух зернівки в сторону, доцільно в конструкцію евольвентного кожуха ввести обмежуючі ортогональні площини – поділити кожух на окремі секції.

Початкова швидкість зернівки залежить від швидкості обертання бітера. Зменшимо початкову швидкість зернівки від значення  $V_0 = 14\text{м/с}$  до  $V_0 = 10\text{м/с}$ . Обчислювальний експеримент показує (рис.3), що всі зернівки через різні проміжки часу  $t$  відірвуться від кожуха не потрапляючи до збірника - нормальна реакція  $F_N(t)$  прямує до нуля (рис.3,г). Така швидкість обертання бітера взагалі є непринятною. Із графіків (рис.3,б,в) можна бачити, що найдовше  $t \cong 0.44\text{с}$  до падіння буде рухатися зернівка, яка кинута перпендикулярно ( $\alpha_0 = 90^\circ$ ) до прямолінійних твірних евольвентного циліндра – в цьому випадку кривина траєкторії якої є найбільшою.

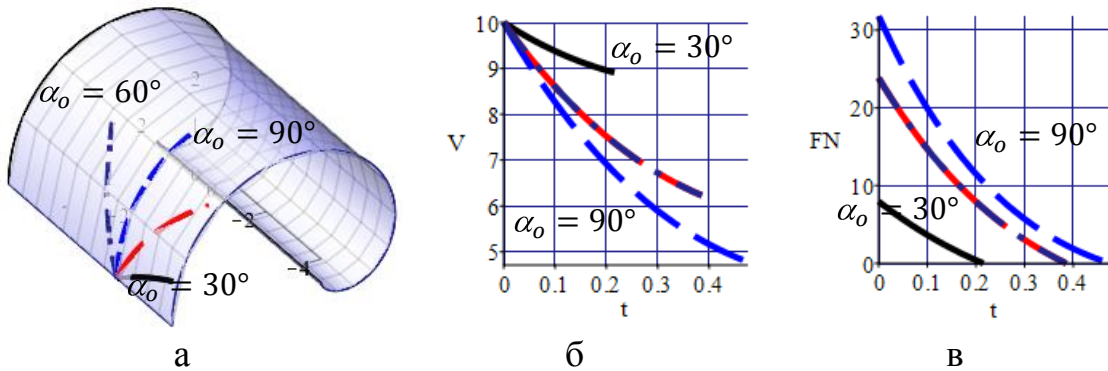


Рис.3. Траєкторії  $\mathbf{r}(t)$ , швидкість  $V(t)$  та нормальна реакція  $F_N(t)$  частинки по поверхні циліндра з початковою швидкістю  $V_0 = 10\text{м/с}$

Збільшимо параметр форми ортогонального перерізу евольвенти кола з  $a = 0.5$  до  $a = 1$  – довжина кривої ортогонального перерізу кожуха стане більшою, але меншою по кривині. При початковій швидкості  $V_0 = 14\text{м/с}$  на відміну від рис.2, вже всі зернівки не дійдуть до збірника (рис.4). Знову ж таки, найдовше  $t \cong 0.68\text{с}$  буде рухатися зернівка кинута перпендикулярно ( $\alpha_0 = 90^\circ$ ) до прямолінійних твірних евольвентного циліндра.

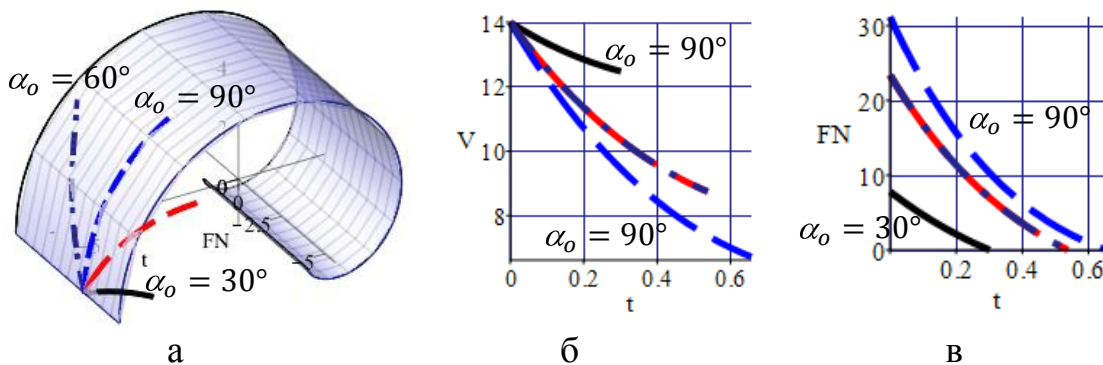


Рис.4. Траєкторії  $\mathbf{r}(t)$  та швидкість  $V(t)$  частинки по внутрішній поверхні евольвентного циліндра з параметром форми  $a = 1$

**Висновки.** Для переміщення всіх зернівок в збірник необхідно щоб зчісуючий барабан забезпечив задану початкову швидкість їх кидання якраз перпендикулярно до горизонтальних прямолінійних твірних евольвентного циліндричного кожуха.

### *Література*

1. Аладьев В.З. Программирование и разработка приложений в Maple / В.З. Аладьев, В.К. Бойко, Е.А. Ровба. – Гродно: ГрГУ, 2007. – 458 с.
2. Несвідомін А.В. Комп'ютерне моделювання руху частинки по нерухомих шорстких поверхнях в проекціях на орти супровідного тригранника траєкторії: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : спец. 05.01.01 "Прикладна геометрія та інженерна графіка" / А.В.Несвідомін. – К., 2016. – 24 с.
3. Патент на корисну модель 70852 України. МПК А01D 41/08. Двобарабанна обчісуюча жатка з евольвентним профілем верхнього кожуха [Текст] / Абибуллаєв Е.Ш. – Власник НУБіП України. – Публ. 25.06.2012. – Бюл.№12.

## **ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЧКИ ПО ОГРАЖДАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ВИДЕ ЭВОЛЬВЕНТНОГО ЦИЛИНДРА**

Несвидомин В.Н., Бабка В.Н., Несвидомин А.В.

*Приведены траекторно-кинематические свойства движения частицы по шероховатой цилиндрической поверхности с ортогональным сечением в виде эвольвенты окружности.*

*Ключевые слова: шероховатая поверхность, эвольвентный цилиндр, движение частицы, дифференциальные уравнения, траектория, скорость.*

## **MOTION OF PARTICLES ENCLOSING SURFACES AS INVOLUTE CYLINDER**

Nesvidomin V., Babka V., Nesvidomin A.

*Trajectory-kinematic properties of particle motion along a rough cylindrical surface with orthogonal cross section in the form of an involute of a circle are presented.*

*Keywords: rough surface, involute cylinder, particle motion, differential equations, trajectory, velocity.*