УДК 514.18

ФОРМИРОВАНИЕ БАЗИСНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ОБВОДА ПО ЗАДАННЫМ УСЛОВИЯМ

Холодняк Ю.В., к.т.н.,
Гавриленко Е.А., к.т.н.,
Спиринцев Д.В., к.т.н.,
Фоменко В.Г., к.ф.-м.н.
*Мелитопольская школа прикладной геометрии,
Таврический государственный агротехнологический университет имени Дмитрия Моторного (Украина)*

Формирование сложных функциональных поверхностей на основе массива точек является актуальной задачей геометрического моделирования. Координаты точек могут быть получены в результате замеров на физических образцах или рассчитаны исходя из условий работы изделия. Создание геометрической модели такой поверхности предполагает формирование дискретного линейчатого каркаса. Линейными элементами каркаса являются одномерные обводы. В работе решается задача моделирования плоских одномерных обводов с монотонным изменением кривизны. Исходными данными для моделирования обвода является упорядоченный точечный ряд, который представляет дискретно представленную кривую (ДПК).

Обвод формируется сгущением исходного точечного ряда произвольной конфигурации по участкам, на которых возможно обеспечить монотонное изменение значений характеристик.

После назначения положений касательных в исходных узлах получаем цепочку базисных треугольников (БТ), ограниченных касательными, проходящими через две последовательные точки и хордой, которая эти точки соединяет. После этого определяются диапазоны радиусов кривизны, которые можно получить на основе сформированной цепочки БТ. Внутри полученных диапазонов назначаются радиусы кривизны в исходных узлах. Назначенные характеристики обеспечиваются в результате локального сгущения участка кривой.

Внутри БТ назначается положение касательной сгущения и точки сгущения на ней. В результате получим два новых БТ. Положения точки и касательной сгущения назначаются внутри диапазонов, обеспечивающих второй порядок гладкости и монотонное изменение радиусов кривизны вдоль обвода.

Сформированные участки монотонных ДПК стыкуются со *вторым порядком гладкости в точках перемены возрастания и убывания радиусов кривизны и точках перегиба. Разработанный алгоритм позволят формировать обводы с закономерным изменением кривизны различных порядков фиксации.*

Ключевые слова: дискретно представленная кривая (ДПК), радиус кривизны, монотонность изменения характеристик, метод сгущений, барицентрические координаты, базисный треугольник.

Постановка проблемы. При формировании обводов с монотонным изменением кривизны, в точках исходного ряда назначаются касательные и значения радиуса кривизны, соответствующие форме ДПК. При проведении сгущений точечного ряда, точки сгущения и касательные к формируемому обводу в них, должны назначаться таким образом, чтобы конфигурация получаемой дискретно представленной кривой (ДПК) соответствовала условиям поставленной задачи.

Анализ последних исследований и публикаций. В работе [2] предложен алгоритм определения положения точек сгущения при формировании обвода с монотонным изменением кривизны. Точки сгущения назначаются внутри базисных треугольников, образуемых хордой, соединяющей две последовательные точки ДПК, и касательными к обводу в этих точках. Предложен алгоритм формирования обводов с монотонным изменением кривизны методом сгущений, позволяющий одновременно назначать положение касательных и значения радиусов кривизны в точках сгущения. Алгоритм обеспечивает достижение, в процессе последовательных сгущений, значений радиусов кривизны, назначенных в точках формируемого обвода.

В работе [1] предложена методика определения положения касательных к конструируемому обводу в точках исходной ДПК, позволяющая формировать цепочку базисных треугольников, обеспечивающую формирование, в результате последующих сгущений, обвода с монотонным изменением кривизны.

Формулирование целей статьи. Целью статьи является дальнейшая разработка способа формирования, в процессе сгущения точечного ряда, цепочки базисных треугольников, определяющих ДПК с монотонным изменением кривизны.

Основная часть. Конструируется ДПК с монотонным изменением кривизны методом сгущений. Исходный базисный треугольник $i, T, i+1$ (T – точка пересечения касательных, проведенных через исходные точки i и $i+1$) определяет значения радиусов кривизны в точках формируемого обвода для точек i и $i+1$

равные $R_i = \dfrac{L^3}{S}$ и $R_{i+1} = \dfrac{T^3}{S}$ соответственно. При этом $L = |i;T|$, $T = |T;i+1|$, S – площадь БТ($i,T,i+1$) (рис. 1).

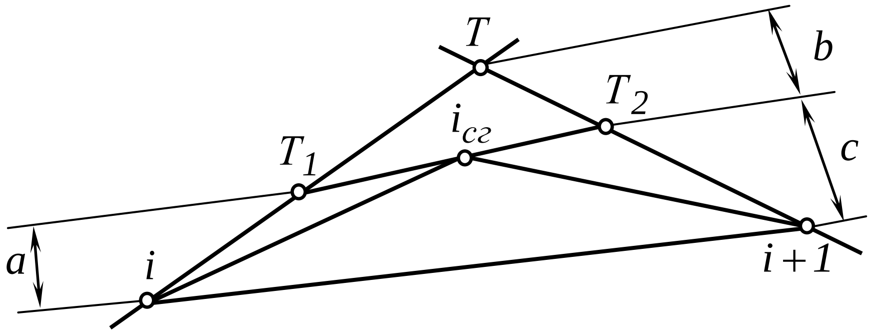

Рис. 1. Определение положения касательной

После назначения точки сгущения $i_{сг}$ и касательной ($T_1;T_2$) получаем два новых базисных треугольника: i, T_1, $i_{сг}$ и $i_{сг}$, T_2, $i+1$.

В системе барицентрических координат треугольника i, T, $i+1$ точка $i_{сг}$ определяется координатами M_1,M_2,M_3, прямая ($T_1;T_2$) – уравнением: $aM_1 - bM_2 + cM_3 = 0.$ Коэффициенты a, b, c, определяющие положение прямой относительно вершин исходного треугольника, равны расстояниям от прямой до вершин треугольника i-$1,i,i+1$.

Базисный треугольник i, $T_1,i_{сг}$ определяет для точек i и $i_{сг}$ значения $R_i^1 = \dfrac{l^3}{S_1}$ и $\vec{R}_{сг} = \dfrac{m^3}{S_1}$,где $l=|i;T_1|$; $m=|T_1;i_{сг}|$; S_2 – площадь треугольника $i_{сг}$, T_2, $i+1$.

Базисный треугольник $i_{сг}$, T_2, $i+1$ определяет для точек $i_{сг}$ и $i+1$ значения $\overleftarrow{R}_{сг} = \dfrac{n^3}{S_2}$ и $R_{i+1}^1 = \dfrac{t^3}{S_2}$, где $n=|i_{сг};T_2|$; $t=|T_2;i+1|$.

Определим значения $R_i^1, R_{i+1}^1, \vec{R}_{сг} \overleftarrow{R}_{сг}$ выразив их через координаты точек сгущения и коэффициенты определяющие касательную (T_1; T_2).

$$R_i^1 = \overset{\circ}{R_i} \frac{1}{M_3}\left(\frac{a}{a+b}\right)^2,\ R_{i+1}^1 = \overset{\circ}{R}_{i+1} \frac{1}{M_1}\left(\frac{c}{c+b}\right)^2, \tag{1}$$

$$\vec{R}_{сг} = \left(\frac{M_3 S}{a+b}\right)^2 \frac{8}{a},\ \overleftarrow{R}_{сг} = \left(\frac{M_1 S}{c+b}\right)^2 \frac{8}{c}. \tag{2}$$

При формировании обводов с монотонным изменением кривизны (пусть R возрастают вдоль обвода), назначение точки сгущения и проходящей через неё касательной должно обеспечивать выполнение соотношения:

$$R_i \le \vec{R}_{сг} = \overleftarrow{R}_{сг} \le R_{i+1}. \tag{3}$$

Указанное соотношение позволяет выразить координаты точки сгущения (M_1,M_2,M_3) через коэффициенты определяющие касательную (a,b,c).

Таким образом формулы (1) и (2) однозначно связывают положение касательной $(T_1;T_2)$ относительно БТ($i,T_1,i+1$) и значения R, определяемые БТ($i,T_1,i_{сг}$) и БТ($i_{сг},T_2,i+1$) в точках ДПК $i,i_{сг},i+1$.

Расчет положения касательных и точек сгущения значительно упрощается в случае, когда касательная, проходящая через точку сгущения, назначается параллельно хорде $[i,i+1]$.

Для касательной параллельной основанию базисного треугольника $[i,i+1]$ коэффициенты a и c в уравнении, определяющем эту касательную относительно базисного треугольника, равны.

Чтобы выполнялось условие $\vec{R}_{сг} = \overleftarrow{R}_{сг}$ координаты M_1 и M_3, определяющие положение точки сгущения на касательной, также должны быть равны. Таким образом, точка сгущения назначается на медиане базисного треугольника.

С учетом соотношений: $a = c$ и $M_1 = M_3 = \dfrac{1-f}{2}$ (где $f = \dfrac{a}{a+b} = \dfrac{c}{c+b}$) уравнения (1) принимают вид:

$$R_i^1 = R_i^{\circ} \frac{2f^2}{1-f}; \quad R_{i+1}^1 = R_{i+1}^{\circ} \frac{2f^2}{1-f}.$$

Для выполнения условия (2) необходимо, чтобы при назначении точки сгущения выполнялось: $l \le m = n \le t$, где $l = |i;T_1|$, $m = |T_1;i_{сг}|$, $n = |i_{сг};T_2|$, $t = |T_2;i+1|$ (рис. 2).

$$l = L \cdot f; \ m = \frac{1}{2}(1-f)M; \ l \le m \ \text{следовательно:} \ f \le \frac{M}{2L+M}.$$

$$t = T \cdot f; \ n = \frac{1}{2}(1-f) \cdot M; \ n \le t \ \text{следовательно:} \ f \ge \frac{M}{2T+M}.$$

Таким образом, для выполнения условия (3) значение f должно быть в диапазоне $\dfrac{M}{2T+M} \le f \le \dfrac{M}{2L+M}$.

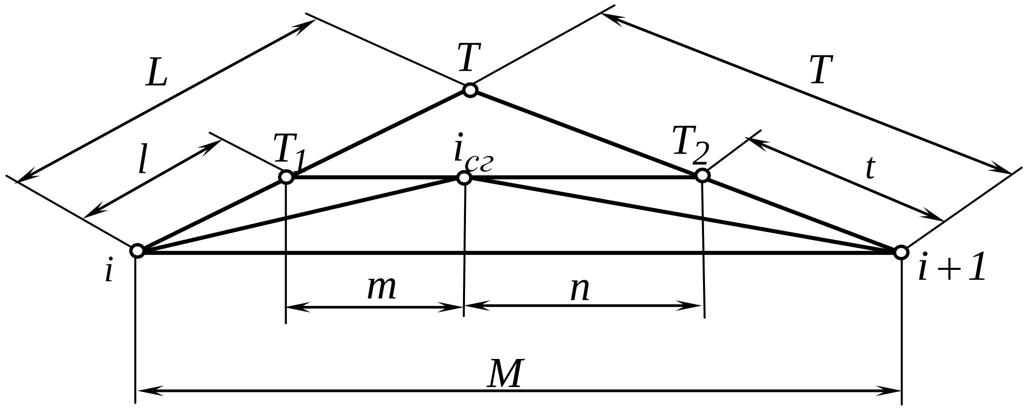

Рис. 2. Формирование цепочки БТ

Изменение значения коэффициента *f* внутри указанного диапазона при назначении точки сгущения внутри отдельного базисного треугольника дает возможность корректировки значений радиусов кривизны в исходных точках, являющихся вершинами этого базисного треугольника. При этом значение радиуса кривизны, определяемое одним и тем же базисным треугольником, в двух исходных точках может быть изменено одновременно и пропорционально.

Задачу непропорционального изменения указанных значений *R* можно решить, назначая касательную, проходящую через точку сгущения, под углом к основанию базисного треугольника.

Выводы. В статье получены соотношения между значениями радиуса кривизны, определяемыми в точках формируемого обвода, исходными базисными треугольниками и базисными треугольниками, полученными в результате сгущения.

Указанные соотношения дают возможность:

1. Назначить значения радиуса кривизны в точках исходной ДПК и в точках сгущения;
2. В процессе последующих сгущений сохранять или изменять ранее назначенные значения радиуса кривизны, в точках формируемого обвода.

Литература

1. Гавриленко Е.А., Холодняк Ю.В., Дубинина А.В. Моделирование одномерных обводов по заданным условиям. *Сучасні проблеми моделювання*. Технічні науки. Мелітополь, 2017. Вип. 9. С. 162-166.
2. Холодняк Ю. В., Дмитриев Ю. А. Формирование одномерных обводов с закономерным изменением кривизны. *Динамика систем, механизмов и машин*. Омск, 2014. № 3. С. 241–243.

ФОРМУВАННЯ БАЗИСНИХ ТРИКУТНИКІВ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ ОБВОДУ ЗА ЗАДАНИМИ УМОВАМИ

Холодняк Ю.В., Гавриленко Є.А., Спірінцев Д.В., Фоменко В.Г.

Формування складних функціональних поверхонь на основі масиву точок є актуальним завданням геометричного моделювання. Координати точок можуть бути отримані в результаті вимірів на фізичних зразках або розраховані виходячи з умов роботи виробу. Створення геометричної моделі такої поверхні передбачає формування дискретного лінійчатого каркасу. Лінійними елементами каркасу є одномірні обводи. В роботі вирішується завдання моделювання плоских одновимірних обводів з монотонною зміною кривини. Вихідними даними для моделювання обводу є упорядкований точковий ряд, який представляє дискретно представлену криву (ДПК).

Обвід формується згущенням вихідного точкового ряду довільної конфігурації по ділянках, на яких можливо забезпечити монотонну зміну значень характеристик.

Після призначення положень дотичних в початкових вузлах отримуємо ланцюг базисних трикутників (БТ), обмежених дотичними, що проходять через дві послідовні точки і хордою, яка ці точки з'єднує. Після цього визначаються діапазони радіусів кривини, які можна отримати на основі сформованого ланцюга БТ. Всередині отриманих діапазонів призначаються радіуси кривини в початкових точках. Призначені характеристики забезпечуються в результаті локального згущення ділянки кривої.

Всередині БТ призначається положення дотичної згущення і точки згущення на ній. В результаті отримуємо два нових БТ. Положення точки і дотичної згущення призначаються всередині діапазонів, що забезпечують другий порядок гладкості і монотонну зміну радіусів кривини уздовж обводу.

Сформовані ділянки монотонних ДПК стикуються з другим порядком гладкості в точках зміни зростання та убування радіусів кривини і точках перегину. Розроблений алгоритм дозволяє формувати обводи з закономірною зміною кривини різних порядків фіксації.

Ключові слова: дискретно представлена крива (ДПК), радіус кривини, монотонність зміни характеристик, метод згущення, барицентричні координати, базисний трикутник.

FORMATION OF BASIS TRIANGLES WHEN SIMULATING A CIRCUIT ACCORDING TO THE GIVEN CONDITIONS

Kholodnyak Yu., Gavrilenko E., Spirintsev D., Fomenko V.

The formation of complex functional surfaces based on an array of points is an urgent task of geometric modeling. Creating a geometric model of such a surface involves the formation of a discrete ruled framework. The linear elements of the frame are one-dimensional contours. The paper solves the problem of modeling flat one-dimensional contours with a monotonic change in curvature. The source data for modeling the contour is an ordered point series that represents a discretely presented curve (DPC).

The contour is formed by thickening the initial point series of an arbitrary configuration in areas where it is possible to provide a monotonic change in the values of characteristics.

After assigning the positions of the tangents in the initial points, we get a chain of basic triangles (BT) bounded by the tangents passing through two consecutive points and the chord that connects these points. After that, the ranges of radiuses of curvature are determined, which can be obtained on the basis of the formed BT chain. Within the obtained ranges, the radiuses of curvature in the initial points are assigned. Assigned characteristics are provided as a result of local thickening of the curve section.

Inside the BT, the position of the tangent condensation and the condensation point on it are assigned. As a result, we get two new BT. The positions of the point and the tangent of the condensation are assigned within the ranges providing a second order of smoothness and a monotonic change of radiuses of curvature along the contour.

The formed sections of monotonous DPC are joined with the second order of smoothness at the points of change of increase and decrease of the radius of curvature and inflection points. The developed algorithm will allow the formation of contours with a regular change in the curvature of various fixation orders.

Keywords: discretely presented curve (DPC), radius of curvature, monotonicity of change of characteristics, method of condensation, barycentric coordinates, basic triangle.