

РАСЧЕТ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ МОСТОВ С УЧЕТОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИХ ВОЗВЕДЕНИЯ И СЛОЖНЫХ РЕОЛОГИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА

Пуляевский Д.В.

Потапов В.Д.

Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ)

Процесс возведения строительных сооружений (мостов и тоннелей, а также высотных зданий с монолитным несущим каркасом) часто оказывается растянутым во времени. Вследствие этого материал различных элементов конструкции получается неоднородным по возрасту. Кроме того, в процессе строительства возможны ситуации, когда меняется статическая схема работы сооружения (опирание пролетного строения моста на промежуточную опору при надвигке, замыкание пролета при уравновешенном навесном бетонировании). Ползучесть и неоднородное старение материала приводят к тому, что окончательное поле напряжений и деформаций может существенно, а иногда и качественно отличаться от напряженно-деформированного состояния системы, нагруженной такими же нагрузками уже после завершения процесса возведения. Иначе говоря, при определении напряженно-деформированного состояния наращиваемых систем необходимо учитывать всю предысторию их возведения и нагружения.

Среди материалов, применяемых в строительстве, широкое распространение получил бетон. В силу протекания в нем длительных химических процессов, а также влагообмена с окружающей средой бетон обладает не только свойствами ползучести (которая при высоких уровнях напряжений становится существенно нелинейной) и интенсивного старения, но и усадкой, и переменным во времени модулем упругомгновенной деформации. И хотя уже после восьми суток твердения в нормальных условиях модуль упругомгновенной деформации бетона набирает около 70 – 80% своего предельного значения, при современных высоких темпах строительства и нередкого нарушения технологии бетонирования предположение о постоянстве модуля упругомгновенной деформации может привести к значительным ошибкам в определении истинного напряженно-деформированного состояния сооружения на различных стадиях его работы.

Пренебрежение реологическими свойствами материала и особенностями возведения сооружения может иметь катастрофические последствия. В 60-70-е годы прошлого столетия в России было спроектировано и построено большое количество рамных и рамно-консольных мостовых сооружений, блоки пролетных строений которых монтировались внавес. Вследствие неправильного проектирования и нарушения технологии многие из этих сооружений в скором времени потеряли свои эксплуатационные свойства. Прогибы пролетных строений с течением времени достигли критического значения. В настоящее время практически все эти сооружения полностью реконструированы.

В восьмидесятые годы прошлого столетия Н.Х. Арутюняном были созданы основы нового крупного научного направления – математической теории наращиваемых деформируемых тел. Представления, положенные Н.Х. Арутюняном в основу данной теории, естественно привели его к мысли о необходимости создания математической модели твердого деформируемого тела, которое подвергается наращиванию по внешней границе или ее части не только в плане модификации определяющих уравнений (для учета возрастной неоднородности и старения), но и в плане такого описания полей напряжений и деформаций, которое бы позволяло учесть их несогласованность в основном теле и в наращиваемых элементах.

Так как, например, процесс сооружения пролетов мостов растянут во времени, а в сечениях действуют значительные напряжения, то в элементах системы развиваются деформации ползучести, которые оказывают существенное влияние на ее напряженно-деформированное состояние.

Вариант теории ползучести неоднородно стареющих тел изложен в монографии [1]. В работе [2] эта теория получила дальнейшее развитие и апробацию как работоспособная расчетная модель.

В 1987 г. выходит в свет монография [3], которая знаменует собой завершение оформления этого нового научного направления как самостоятельной теории.

Следует отметить, что расчет наращиваемых систем в условиях нелинейной ползучести сопряжен со значительными трудностями, вследствие чего лишь в простейших случаях может быть выполнен аналитически. Подобные расчеты должны быть ориентированы на широкое использование численных методов, в частности, метода конечных элементов (МКЭ) и ЭВМ. На сегодняшний день существуют мощные промышленные комплексы конечно-элементного анализа (NASTRAN, MARC, ANSYS, ABAQUS, SCAD, Lira и др.), которые позволяют учитывать в расчетах ползучесть материала. Но в большинстве подобных программ используются простейшие модели вязкоупругого материала (модель Максвелла, Кельвина – Фойгта), которые с достаточной степенью точности отражают ползучесть полимеров, но оказываются непригодными для стареющих материалов. К тому же накладываются существенные ограничения на аналитические выражения для функции деформаций ползучести. Поэтому для возможности учета любого экспериментального закона ползучести, старения материала, а также изменения во времени модуля упругомгновенной деформации необходимо дополнительное программное обеспечение.

Основные теоретические предпосылки

Пусть в момент времени $t = 0$ в абсолютной шкале времени начинается изготовление тела из материала, обладающего свойством ползучести. Момент зарождения материала (изготовления) этого тела в окрестности точки с координатой $s \{x_1, x_2, x_3\}$ в абсолютной шкале времени обозначим через $\tau^*(s)$. Функция пространственных координат $\tau^*(s)$ определяет скорость и последовательность изготовления вязкоупругого материала или закон возведения конструкции из вязкоупругих элементов. В дальнейшем будем использовать декартову систему координат, т. е. $s \{x, y, z\}$. На функцию $\tau^*(s)$ обычно накладываются требования ограниченности и кусочной непрерывности.

Если материал, из которого изготавливается вязкоупругое тело или возводится сооружение, обладает свойством старения, а процесс изготовления или возведения сильно растянут во времени, то рассматриваемое тело или сооружение будет обладать возрастной неоднородностью, вследствие чего его физико-механические свойства будут зависеть как от времени, так и от пространственных координат.

Зависимость упругих и реологических свойств материала от пространственных координат в таких телах обусловлена тем, что процесс старения в отдельных элементах протекает с тем или иным запаздыванием или опережением, зависящим от возраста данного элемента тела. Подобные тела называются неоднородно стареющими.

Уравнение состояния неоднородно стареющего материала с учетом его нелинейной ползучести и изменения во времени модуля упругомгновенной деформации запишем в виде [3]:

$$\varepsilon(s, t) = \frac{\sigma(s, t_0(s))}{E(t_0(s) - \tau^*(s))} + \int_{t_0(s)}^t \left[\frac{1}{E(\tau - \tau^*(s))} \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \sigma(s, \tau) d\tau - \int_{t_0(s)}^t F[\sigma(s, \tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t - \tau^*(s), \tau - \tau^*(s)) d\tau, \quad (1)$$

где $\tau^*(s)$ – момент времени, соответствующий зарождению материала в окрестности точки с пространственной координатой $s \{x, y, z\}$; $t_0(s)$ – момент времени приложения нагрузки в окрестности точки с координатой s , причем $t_0(s) \geq \tau^*(s)$; $E(t_0(s) - \tau^*(s))$ – модуль упругомгновенной деформации материала в окрестности точки с координатой s в момент времени t ; $F[\sigma(s, \tau)]$ – нелинейная функция напряжений; $C(t - \tau^*(s), \tau - \tau^*(s))$ – мера ползучести неоднородно стареющего материала при одноосном напряженном состоянии.

В соответствии с рекомендациями [5] деформации усадки бетона в некоторый момент времени t вычисляют по формуле

$$\varepsilon_{sh}(s, t - \tau_w(s)) = \varepsilon_{lim}(\tau_w(s)) (1 - e^{-\alpha_s (t - \tau_w(s))}) \quad (2)$$

где $\varepsilon_{lim}(\tau_w(s))$ – предельное значение относительной деформации усадки с момента начала высыхания бетонного элемента; α_s – параметр, характеризующий скорость нарастания деформаций усадки во времени и принимаемый в зависимости от модуля открытой поверхности элемента по приведенной в [5] таблице; $\tau_w(s)$ – возраст бетона в окрестности точки с координатой s в момент окончания влажного хранения.

Модуль открытой поверхности элемента M_0 определяется как отношение площади поверхности элемента, открытой для испарения влаги F , к его объему V , т. е. $M_0 = F/V$. Для стержневых элементов модуль открытой поверхности M_0 допускается вычислять по формуле $M_0 = P/A$ (P – периметр поперечного сечения, соответствующий указанной открытой поверхности; A – площадь поперечного сечения элемента).

Полная относительная деформация в точке s в момент времени t выражается суммой

$$\varepsilon_{total}(s, t) = \varepsilon(s, t) + \varepsilon_{sh}(s, t - \tau_w(s)) \quad (3)$$

или, с учетом выражений (1) и (2)

$$\varepsilon_{total}(s, t) = \frac{\sigma(s, t_0(s))}{E(t_0(s) - \tau^*(s))} + \int_{t_0(s)}^t \left[\frac{1}{E(\tau - \tau^*(s))} \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \sigma(s, \tau) d\tau - \int_{t_0(s)}^t F[\sigma(s, \tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t - \tau^*(s), \tau - \tau^*(s)) d\tau + \varepsilon_{sh}(s, t - \tau_w(s)), \quad (4)$$

Получить в замкнутом виде аналитическое решение интегрального уравнения (4) возможно лишь в простейших случаях (при соответствующем выборе ядра), представляющих малый практический интерес. Резольвента подобных уравнений может быть построена численно с помощью квадратурно-итерационного метода [9], однако на выражение для ядра и в этом случае накладывается ряд существенных ограничений. Поэтому для решения интегральных

уравнений типа (4) целесообразно использовать шаговый метод, основанный на дискретизации рассматриваемого отрезка времени.

Разобьем временной интервал $[t_0(s), t]$ на n отрезков малой продолжительности Δt . Для некоторого момента времени $t_j = t_0(s) + j\Delta t$ ($j = 1, 2, \dots, n$) представим интегральные слагаемые соотношения (4) в виде конечных сумм интегралов в пределах $[t_i, t_{i+1}]$:

$$\int_{t_0(s)}^t \left[\frac{1}{E(\tau - \tau^*(s))} \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \sigma(s, \tau) d\tau = \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\frac{1}{E(\tau - \tau^*(s))} \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \sigma(s, \tau) d\tau,$$

$$\int_{t_0(s)}^t F[\sigma(s, \tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t - \tau^*(s), \tau - \tau^*(s)) d\tau = \sum_{i=0}^{j-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} F[\sigma(s, \tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t - \tau^*(s), \tau - \tau^*(s)) d\tau.$$

Для вычисления интегралов, фигурирующих под знаками суммы в вышеприведенных выражениях, воспользуемся интегральной теоремой о среднем [8], в соответствии с которой

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \left[\frac{1}{E(\tau - \tau^*(s))} \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \sigma(s, \tau) d\tau = \frac{1}{E(\xi_i - \tau^*(s))} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\partial}{\partial \tau} \sigma(s, \tau) d\tau,$$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} F[\sigma(s, \tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t - \tau^*(s), \tau - \tau^*(s)) d\tau = F[\sigma(s, \zeta_i)] \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\partial}{\partial \tau} C(t - \tau^*(s), \tau - \tau^*(s)) d\tau,$$

где $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $\zeta_i \in [t_i, t_{i+1}]$.

Если приближенно принять $\xi_i \cong t_i$ и $\zeta_i \cong t_i$, тогда

$$\int_{t_0(s)}^t \left[\frac{1}{E(\tau - \tau^*(s))} \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \sigma(s, \tau) d\tau \cong \sum_{i=0}^{j-1} \frac{\sigma(s, t_{i+1}) - \sigma(s, t_i)}{E(t_i - \tau^*(s))}, \quad (5)$$

$$\int_{t_0(s)}^t F[\sigma(s, \tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t - \tau^*(s), \tau - \tau^*(s)) d\tau \cong$$

$$\cong \sum_{i=0}^{j-1} F[\sigma(s, t_i)] \left[C(t_j - \tau^*(s), t_{i+1} - \tau^*(s)) - C(t_j - \tau^*(s), t_i - \tau^*(s)) \right]. \quad (6)$$

С учетом (5) и (6) уравнение (4) примет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{total}(s, t_j) &= \frac{\sigma(s, t_0(s))}{E(t_0(s) - \tau^*(s))} + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{\sigma(s, t_{i+1}) - \sigma(s, t_i)}{E(t_i - \tau^*(s))} + \\ &+ \sum_{i=0}^{j-1} F[\sigma(s, t_i)] \left[C(t_j - \tau^*(s), t_i - \tau^*(s)) - C(t_j - \tau^*(s), t_{i+1} - \tau^*(s)) \right] + \varepsilon_{sh}(s, t_j - \tau_w(s)). \end{aligned} \quad (7)$$

Перепишем соотношение (7) следующим образом

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{\sigma(s, t_{i+1})}{E(t_i - \tau^*(s))} &= \varepsilon_{total}(s, t_j) - \frac{\sigma(s, t_0(s))}{E(t_0(s) - \tau^*(s))} + \\ &+ \sum_{i=0}^{j-1} \frac{\sigma(s, t_i)}{E(t_i - \tau^*(s))} - \varepsilon_{cr}(\sigma, s, t_j) - \varepsilon_{sh}(s, t_j - \tau_w(s)), \end{aligned}$$

где

$$\varepsilon_{cr}(\sigma, s, t_j) = \sum_{i=0}^{j-1} F[\sigma(s, t_i)] \left[C(t_j - \tau^*(s), t_i - \tau^*(s)) - C(t_j - \tau^*(s), t_{i+1} - \tau^*(s)) \right]. \quad (8)$$

Тогда для напряжений получим выражения

$$\sigma(s, t_1) = E(t_0(s) - \tau^*(s)) \left[\varepsilon_{total}(s, t_1) - \varepsilon_{cr}(\sigma, s, t_1) - \varepsilon_{sh}(s, t_j - \tau_w(s)) \right], \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sigma(s, t_j) &= E(t_{j-1} - \tau^*(s)) \left[\varepsilon_{total}(s, t_j) - \varepsilon_{cr}(\sigma, s, t_j) - \varepsilon_{sh}(s, t_j - \tau_w(s)) \right] + \\ &+ E(t_{j-1} - \tau^*(s)) \sum_{i=0}^{j-2} \left(\frac{\sigma(s, t_{i+1})}{E(t_{i+1} - \tau^*(s))} - \frac{\sigma(s, t_i)}{E(t_i - \tau^*(s))} \right), \quad j \geq 2. \end{aligned} \quad (10)$$

Итак, если известны напряжения, действующие в элементах системы в каждый момент времени, то деформации можно найти из выражения (7), а, зная деформации, вычислить перемещения не составляет особого труда. Если же в каждый момент времени известны перемещения, то на основании геометрических уравнений Коши можно найти деформации, а напряжения определить, используя формулы (9) и (10).

Рассмотрим некоторое тело или систему тел Ω_1 . Чтобы определить напряжения $\sigma(s, t)$, деформации $\varepsilon(s, t)$ и перемещения $u(s, t)$ в точке тела с координатой $s \{x, y, z\}$ воспользуемся методом конечных элементов в форме метода перемещений.

Разобьем тело Ω_1 на конечные элементы (рассматриваются стержневые конечные элементы) таким образом, чтобы возраст материала в пределах конечного элемента был одинаковым для всех точек.

Поскольку строится решение нелинейной задачи, которое в дальнейшем будет распространено на случай срачивания нескольких тел, то целесообразно от полных перемещений перейти к их приращениям за промежуток времени Δt .

На основании принципа возможных перемещений и выражений (7), (9), (10) можно записать разрешающую систему уравнений для момента времени t_j относительно вектора приращений узловых перемещений с учетом нелинейной ползучести, изменения во времени модуля упругомгновенной деформации и усадки в виде:

$$\mathbf{K}[t_0(s)]\Delta\vec{Z}(t_j) = \Delta\vec{F}(t_j) - \iiint_V \mathbf{B}^T [\mathbf{D}(t_{j-1}) - \mathbf{D}(t_0(s))] \Delta\vec{\epsilon}_{total}(s, t_{j-1,j}) dV + \\ + \iiint_V \mathbf{B}^T \mathbf{D}(t_{j-1}) [\Delta\vec{\epsilon}_{cr}(\sigma, s, t_{j-1,j}) + \Delta\vec{\epsilon}_{sh}(s, t_{j-1,j})] dV, \quad (11)$$

где V – объем конечного элемента;

$\mathbf{K}[t_0(s)]$ – матрица жесткости системы для начального момента времени $t_0(s)$;

$\Delta\vec{Z}(t_j)$ – вектор приращений узловых перемещений в момент времени t_j ;

$\mathbf{D}(t_{j-1})$ и $\mathbf{D}(t_0(s))$ – матрицы упругомгновенных постоянных, составленные для предшествующего текущему и для начального моментов времени соответственно;

$\Delta\vec{\epsilon}_{total}(s, t_{j-1,j})$ – вектор приращений полных деформаций за промежуток времени Δt ;

$\Delta\vec{\epsilon}_{cr}(\sigma, s, t_{j-1,j})$ – вектор приращений деформаций ползучести;

$\Delta\vec{\epsilon}_{sh}(s, t_{j-1,j})$ – вектор приращений деформаций усадки;

\mathbf{B} – прямоугольная матрица геометрических соотношений;

$\Delta\vec{F}(t_j)$ – вектор приращений узловых нагрузок.

Для вычисления интегралов по объему стержневого конечного элемента в выражении (11) можно использовать любую из формул численного интегрирования. При этом сначала вычисляется интеграл по площади поперечного сечения, а затем производится интегрирование по длине стержня.

Допустим, что в момент времени $t_k > t_0$ происходит срачивание тела Ω_1 с новым телом Ω_2 . Разобьем Ω_2 на конечные элементы таким образом, чтобы возраст материала в пределах одного конечного элемента был одинаковым. Одновременно с приращением тела Ω_2 на тело Ω_1 могут быть наложены дополнительные связи, места постановки которых совпадают с узлами дискретной конечно-элементной модели.

Будем предполагать процесс наращивания достаточно медленным и не требующим учета сил инерции.

Учет в расчетах деформаций усадки принципиальных трудностей не вызывает вследствие их независимости от уровня действующих напряжений. В дальнейшем для сокращения объема математических выражений исключим из них деформации усадки.

Для p -го конечного элемента основное соотношение (1) запишем в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_p^{(k)}(s, t) = & \frac{\sigma_p(s, t_0)}{E_p(t_0 - \tau^*(s))} + \int_{t_0}^{t_k} \left[\frac{1}{E_p(\tau - \tau^*(s))} \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \sigma_p(s, \tau) d\tau + \\ & + \int_{t_k}^t \left[\frac{1}{E_p(\tau - \tau^*(s))} \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \sigma_p^{(k)}(s, \tau) d\tau - \int_{t_0}^{t_k} F[\sigma_p(s, \tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t - \tau^*(s), \tau - \tau^*(s)) d\tau - \\ & - \int_{t_k}^t F[\sigma_p^{(k)}(s, \tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t - \tau^*(s), \tau - \tau^*(s)) d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

В дальнейшем возраст материала p -го конечного элемента будем обозначать τ_p^* . Как и в случае ненаращиваемых систем, интегральные слагаемые в правой части выражения (12) могут быть представлены в виде конечных сумм. Для момента времени $t_j > t_k$ имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_p^{(k)}(s, t_j) = & \frac{\sigma_p(s, t_0)}{E_p(t_0 - \tau_p^*)} + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\sigma_p(s, t_{i+1}) - \sigma_p(s, t_i)}{E_p(t_i - \tau_p^*)} + \\ & \sum_{i=k}^{j-1} \frac{\sigma_p^{(k)}(s, t_{i+1}) - \sigma_p^{(k)}(s, t_i)}{E_p(t_i - \tau_p^*)} + \varepsilon_{p,cr}^*(\sigma, s, t_j) + \varepsilon_{p,cr}^{(k)}(\sigma, s, t_j), \end{aligned} \quad (13)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \varepsilon_{p,cr}^*(\sigma, s, t_j) = & \sum_{i=0}^{k-1} F[\sigma_p(s, t_i)] \left[C(t_j - \tau_p^*, t_i - \tau_p^*) - C(t_j - \tau_p^*, t_{i+1} - \tau_p^*) \right]; \\ \varepsilon_{p,cr}^{(k)}(\sigma, s, t_j) = & \sum_{i=k}^{j-1} F[\sigma_p^{(k)}(s, t_i)] \left[C(t_j - \tau_p^*, t_i - \tau_p^*) - C(t_j - \tau_p^*, t_{i+1} - \tau_p^*) \right]. \end{aligned}$$

На основании выражения (13) после некоторых преобразований для напряжений в момент времени $t_j > t_k$ может быть получено соотношение

$$\begin{aligned} \sigma_p^{(k)}(s, t_j) = & E_p(t_0 - \tau_p^*) \varepsilon_p^{(k)}(s, t_j) + \sum_{i=0}^{k-1} \left[E_p(t_i - \tau_p^*) - E_p(t_0 - \tau_p^*) \right] \Delta \varepsilon_p(s, t_{i,i+1}) - \\ & - \sum_{i=0}^{k-1} E_p(t_i - \tau_p^*) \Delta \varepsilon_{p,cr}(\sigma, s, t_{i,i+1}) + \sum_{i=k}^{j-1} \left[E_p(t_i - \tau_p^*) - E_p(t_0 - \tau_p^*) \right] \Delta \varepsilon_p^{(k)}(s, t_{i,i+1}) - \\ & - \sum_{i=k}^{j-1} E_p(t_i - \tau_p^*) \Delta \gamma_{p,cr}^{(k)}(\sigma, s, t_{i,i+1}), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\Delta \Upsilon_{p,cr}^{(k)}(\sigma, s, t_{i,i+1}) = \Delta \varepsilon_{p,cr}^*(\sigma, s, t_{i,i+1}) + \Delta \varepsilon_{p,cr}^{(k)}(\sigma, s, t_{i,i+1}).$$

Составляя далее функционал полной энергии p -го конечного элемента для момента времени $t_j > t_k$ и варьируя этот функционал по компонентам вектора приращений узловых перемещений $\Delta \vec{Z}_p^{(k)}(t_{j-1,j})$, получим систему нелинейных уравнений относительно приращений узловых перемещений $\Delta \vec{Z}_p^{(k)}(t_{j-1,j})$. Для всего объединенного тела $\Omega_1 \cup \Omega_2$ она имеет вид

$$\mathbf{K}^{(k,k)}[t_0(s)] \Delta \vec{Z}^{(k)}(t_{j-1,j}) = \vec{F}(t_j) - \vec{S}(\sigma, t_j), \quad (15)$$

где $\mathbf{K}^{(k,k)}[t_0(s)]$ – матрица жесткости объединенного тела $\Omega_1 \cup \Omega_2$ и введено следующее обозначение

$$\begin{aligned} \vec{S}(\sigma, t_j) = & \mathbf{K}^{(k,0)}[t_0(s)] \vec{Z}(t_k) + \iiint_V \mathbf{B}^{(k)T} \left[\mathbf{D}(t_{j-1} - \tau^*(s)) - \mathbf{D}(t_0(s) - \tau^*(s)) \right] \Delta \vec{\varepsilon}^{(k)}(s, t_{j-1,j}) dV - \\ & - \iiint_V \mathbf{B}^{(k)T} \mathbf{D}(t_{j-1} - \tau^*(s)) \Delta \Upsilon_{cr}^{(k)}(\sigma, s, t_{j-1,j}) dV + \\ & + \iiint_V \mathbf{B}^{(k)T} \sum_{i=0}^{k-1} \left[\mathbf{D}(t_i - \tau^*(s)) - \mathbf{D}(t_0(s) - \tau^*(s)) \right] \Delta \vec{\varepsilon}(s, t_{i,i+1}) dV - \\ & - \iiint_V \mathbf{B}^{(k)T} \sum_{i=0}^{k-1} \mathbf{D}(t_i - \tau^*(s)) \Delta \vec{\varepsilon}_{cr}(\sigma, s, t_{i,i+1}) dV, \\ \mathbf{K}^{(k,0)}[t_0(s)] = & \iiint_V \mathbf{B}^{(k)T} E(t_0 - \tau^*(s)) \mathbf{B}^{(0)} dV, \vec{Z}(t_k) - \text{вектор узловых перемещений в теле} \end{aligned}$$

в момент времени t_k .

Матрицы геометрических параметров $\mathbf{B}^{(0)}$ (до объединения тел) и $\mathbf{B}^{(k)}$ (после объединения) в общем случае могут не совпадать. Объясняется это тем, что в объединенном теле $\Omega_1 \cup \Omega_2$ в узлах некоторых конечных элементов может измениться число узловых связей.

Система уравнений (15) является нелинейной. Для ее решения применяются итерационные методы. При этом истинные напряжения в пределах шага по времени Δt считаются постоянными.

Рассмотренный подход может быть легко обобщен на случай последовательного сращивания нескольких тел $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ в моменты времени $t_k < t_{k1} < \dots < t_{kk}$. Вследствие громоздкости математических выкладок в данной статье они не приводятся.

Пример расчета наращиваемой системы и некоторые результаты

При сооружении русловых пролетов железобетонных мостов через реки с большой глубиной воды или сильным течением устройство временных опор в русле становится экономически невыгодным, а в некоторых условиях практически невозможным. В подобных случаях одним из вариантов изготовления пролетного строения является метод уравновешенного навесного

бетонирования с промежуточных постоянных опор. В качестве примера можно привести недавно построенный мостовой переход через Ангару (неподалеку от Иркутска), русловые пролеты которого сооружались описанным выше методом. На рис. 1 представлены фотографии различных стадий возведения русловых пролетов. С соседних опор в обе стороны начинают уравниваемое бетонирование первых блоков. После выстойки бетона до момента набора им достаточной прочности опалубка смещается в пролет и бетонируется следующий блок.

По мере изготовления блоков в плите балки устанавливаются пучки предварительно напряженной высокопрочной арматуры, которые создают обжатие сечения и уменьшают тем самым отрицательные изгибающие моменты, возникающие в процессе бетонирования. Иногда в процессе возведения устанавливается некоторое количество напряженной арматуры и в нижнем поясе, что связано с необходимостью обеспечения правильной геометрии продольной оси пролетного строения (на стадиях строительства). После того, как консоли с обеих сторон полностью готовы, производится бетонирование замкового блока и замыкание системы. В дальнейшем производится натяжение нижних пучков арматуры.

а). Начальные стадии сооружения пролета. Уравниваемое навесное бетонирование с промежуточной опоры.



б). Навесное бетонирование. Нарращивание консолей в направлении середины пролета навстречу друг другу.



в). Заключительные стадии. Бетонирование замкового блока. Объединение консолей в неразрезную систему.

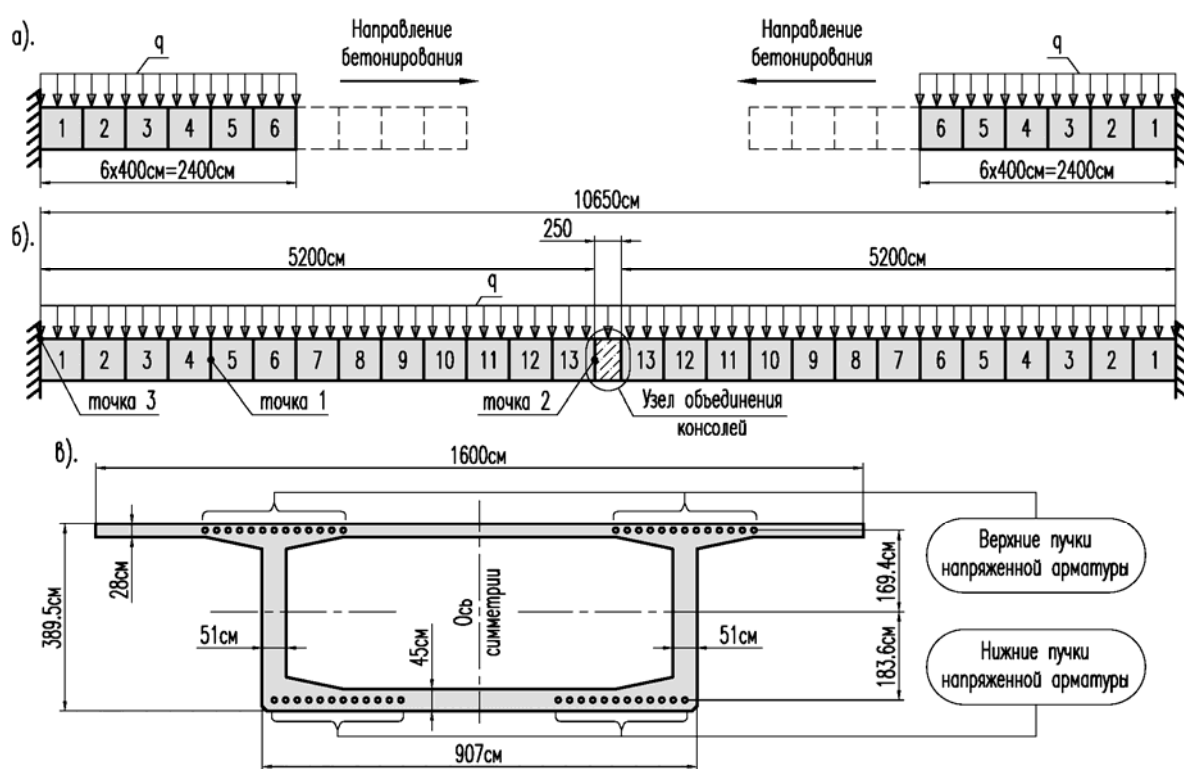
Рис. 1. Различные стадии возведения русловых пролетов моста через р. Ангару

Так как процесс сооружения пролетов моста по технологическим причинам оказывается растянутым во времени, а в сечениях действуют значительные напряжения, то в элементах подобных систем развиваются деформации ползучести, которые оказывают существенное влияние на их напряженно-деформированное состояние.

Для численной оценки влияния сложных реологических свойств материала на напряженно-деформированное состояние наращиваемых систем рассмотрим конкретный пример – возведение одного из русловых пролетов железобетонного моста, выполняемое методом

уравновешенного навесного бетонирования. Хотя основные параметры рассматриваемого ниже сооружения и приближены к реальности, оно не является каким-либо конкретным мостом. Цель приводимого примера – демонстрация влияния (количественно, и, главное, качественно) на окончательное напряженно-деформированное состояние сооружения последовательности его возведения, линейной и нелинейной ползучести материала, а также изменения во времени модуля упругомгновенной деформации и усадки.

На рис. 2 приведена расчетная схема руслового пролета полной длиной 106,5 м. Поскольку бетонирование ведется равномерно в обе стороны, то сечение на опоре не поворачивается, и в расчетной схеме можно установить в опорном сечении жесткую заделку, рассматривая лишь одну из уравновешенных на опоре консолей. Нарращивание производится блоками (захватками) по 4,0 м (рис. 2, а). Время зарождения материала первого от заделки блока принято равным нулю и одинаковым для всех точек в пределах блока.



а) на стадии наращивания консолей; б) на стадии объединения участков системы;
в) поперечное сечение балки пролетного строения

Рис. 2. Расчетная схема руслового пролета

Время зарождения материала каждого последующего блока больше предыдущего на 10 сут. Таким образом, материал в тринадцатом от заделки блоке возникает на 120 сутки в глобальной шкале времени.

В качестве внешней нагрузки выступает собственный вес блоков и обустройств равный $q = 325$ кгс/см. По мере роста консолей в расчет вводятся пучки верхней предварительно напряженной арматуры (рис. 3).

Контролируемое усилие натяжения всех арматурных пучков принято одинаковым и равным 9500 кгс/см^2 . В результате расчета становятся известными напряжения в арматуре в каждый момент времени с учетом ползучести, т. е. могут быть определены потери предварительного обжатия.

На 130 сутки в глобальной шкале времени начинается бетонирование замкового блока (рис. 2(б)), который по истечении 10 суток набирает достаточную прочность и включается в работу. Начиная с этого момента (140 сутки), система начинает работать как защемленная по концам балка.

На 140 сутки с начала бетонирования первого блока осуществляется натяжение нижних пучков арматуры (рис. 3), а еще через 10 суток прикладывается вторая часть постоянной нагрузки (вес выравнивающего слоя, вес асфальтобетонного покрытия и т. п.), которая в данном примере принята равной $q_{add} = 75 \text{ кгс/см}$.

На рис. 2(в) показано принятое в расчете поперечное сечение элементов с основными размерами и зонами расположения пучков напряженной арматуры.

Класс бетона пролетного строения В40, соответствующий гарантированной прочности на сжатие 40 МПа (408 кгс/см^2). Нормативное значение призменной прочности бетона $R_{b,ser} = 29.2 \text{ МПа}$ (297.7 кгс/см^2).

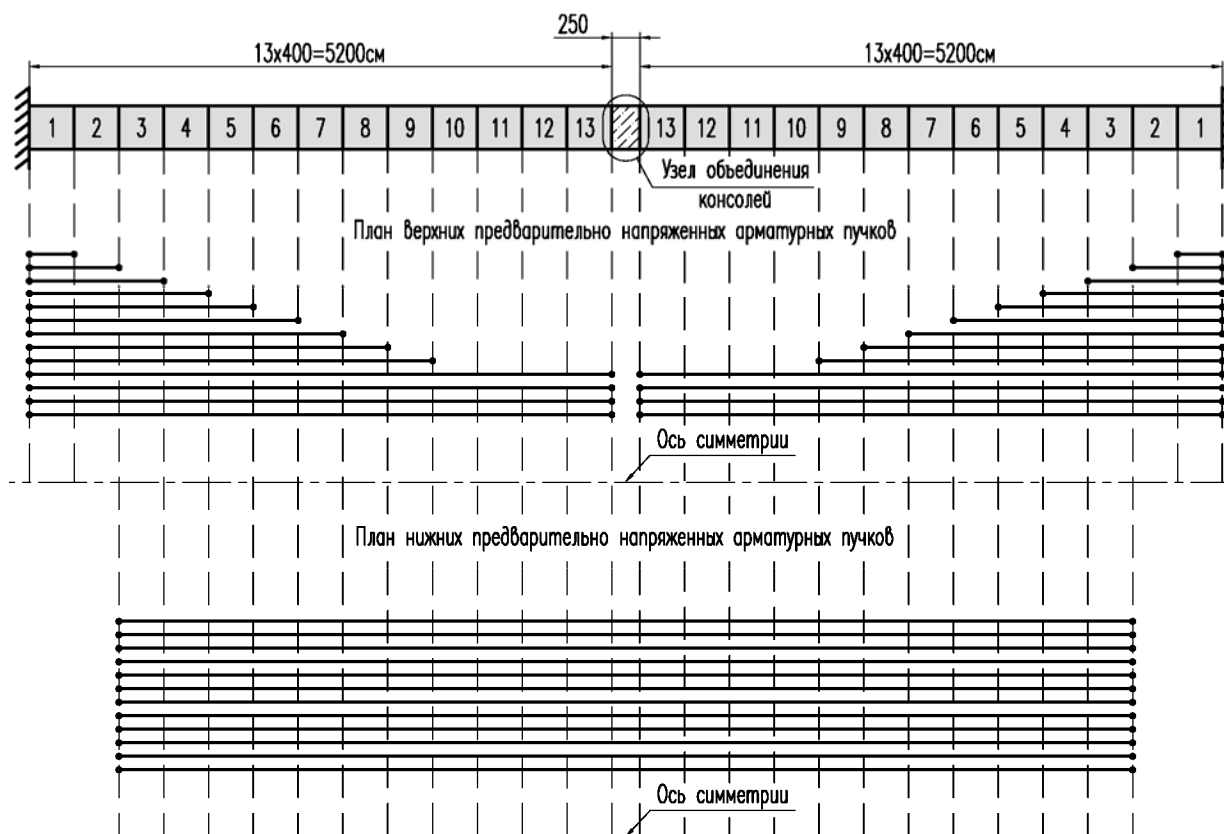


Рис. 3. Схема расположения предварительно напряженных арматурных пучков

Для описания вязкоупругих свойств материала меру ползучести примем в виде произведения двух линейно-независимых функций [4, 6] в соответствии с выражением

$$C(t, \tau) = \varphi(\tau) f(t - \tau), \quad (16)$$

где $\varphi(\tau)$ – функция старения, зависящая только от возраста материала, а $f(t - \tau)$ – функция, характеризующая реологические свойства и зависящая от продолжительности действия нагрузки, причем $f(\infty) = 1$.

Выражение для меры ползучести в виде (16) соответствует российским нормативным документам, действующим в строительстве (в частности в мостостроении).

Для функции старения воспользуемся выражением, предложенным И.Е. Прокоповичем [7, 6],

$$\varphi(\tau) = C_0 + \frac{A_0}{d + \tau}, \quad (17)$$

со следующими значениями постоянных: $C_0 = 2.806 \times 10^{-5}$ МПа⁻¹ (2.752×10^{-6} [кгс/см²]⁻¹); $A_0 = 1.835 \times 10^{-4}$ сут*МПа⁻¹ (1.870×10^{-4} сут*[кгс/см²]⁻¹); $d = 27$ сут.

Функцию реологических свойств (функцию) наследственности примем в виде

$$f(t - \tau) = 1 - \beta_1 e^{-\gamma_1(t-\tau)} - \beta_2 e^{-\gamma_2(t-\tau)}, \quad (18)$$

где $\beta_1 = 0.1660$, $\beta_2 = 0.8340$, $\gamma_1 = 0.0551$ [1/сут], $\gamma_2 = 0.0041$ [1/сут].

Изменение модуля упругомгновенной деформации с течением времени будем учитывать, используя соотношения

$$E_b(\tau) = \frac{400 s R_b^G(\tau)}{s \rho_c + R_b^G(\tau)}, \quad R_b^G(\tau) = \left(1 + \frac{23}{55 + B} \cdot \frac{\tau - 28}{\tau + 11}\right) B, \quad (19)$$

где B – класс бетона по прочности на сжатие; $s = 105$ МПа – параметр, характеризующий влияние упругих свойств заполнителя в бетоне; $\rho_c = 0.2$ – удельное по массе содержание цементного теста в бетонной смеси.

Для определение деформаций усадки использовалось выражение (2) со значениями постоянных, соответствующих нормативным документам.

Расчеты проводились с шагом по времени, равным двум суткам.

С инженерной точки зрения наибольший интерес представляют возникающие в системе перемещения и напряжения. Поэтому по результатам расчетов были построены графики изменения вертикальных перемещений торца четвертого (т. 1 на рис. 2(б)) и тринадцатого (т. 2 на рис. 2(б)) от заделки блоков с течением времени, а также графики изменения напряжений в бетоне верхней фибры сечения у заделки (т. 3 на рис. 2(б)).

Четвертый от заделки блок в период интенсивного старения находится в условиях напряженно-деформированного состояния, возникающего в консольной балке, и к тому времени, когда система оказывается замкнутой, процессы ползучести материала, изменения модуля упругомгновенной деформации и усадки в нем практически затухают. Тринадцатый же блок в период интенсивного старения работает как элемент защемленной балки, и длительные реологические процессы, протекающие в материале, оказывают влияние на его напряженно-деформированное состояние существенно отличное от того, которое можно наблюдать в блоках, близких к заделке.

Опорное сечение вследствие принятой технологии возведения пролетного строения оказывается сжатым значительными усилиями. После объединения консолей статическая схема работы сооружения изменяется, что наряду с длительными процессами, протекающими в

материале, может привести к существенному изменению напряженно-деформированного состояния в рассматриваемом сечении.

Значение модуля упругомгновенной деформации для тех случаев, когда его изменение во времени не учитывалось, соответствует упругим характеристикам материала в возрасте 10-ти суток.

Четвертый блок. Из графиков на рис. 4 видно, что если в расчетах наращиваемой системы учитывать нелинейную ползучесть, то вертикальные перемещения торца четвертого блока по истечении четырех лет отличаются на 229 % по сравнению с результатами «упругого» расчета.

При учете изменения во времени модуля упругомгновенной деформации эта разница составляет 204 %, а если принять во внимание усадку материала, – 202 %. На 23 % отличаются вертикальные перемещения в наращиваемой и ненаращиваемой системах, материал которых обладает нелинейной ползучестью (по прошествии четырех лет). Если сравнивать кривые 6 и 10 (рис. 4), то к концу рассматриваемого временного интервала разница их ординат составляет 285 %.

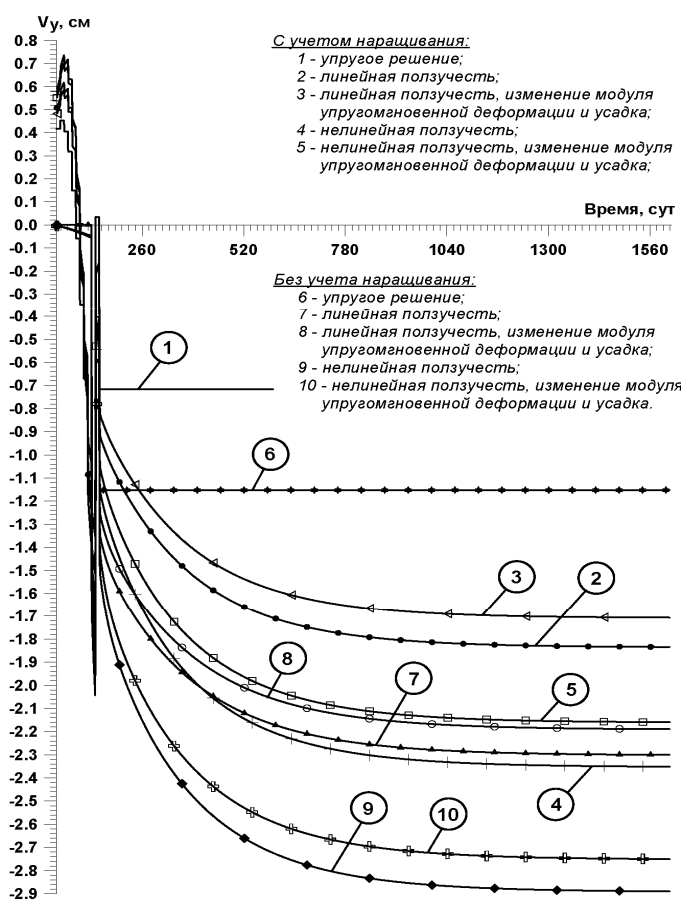


Рис. 4. Вертикальные перемещения торца четвертого блока. Сравнение влияния линейной и нелинейной ползучести материала

При сопоставлении кривых 2 и 4 рисунка 4 видно, что в наращиваемой системе по истечении четырех лет при учете нелинейной ползучести вертикальные перемещения на 28 % больше тех, что возникают в конструкции, материал которой обладает линейной ползучестью. Без учета наращивания указанная разница составляет 26 % (кривые 7 и 9 рис. 4).

Тринадцатый блок. Если при расчетах наращиваемой системы учитывать нелинейную ползучесть, то по истечении 1610 суток вертикальные перемещения по сравнению с «упругими» будут отличаться на 273 %, причем они оказываются разных знаков (рис. 5).

Значения перемещений в наращиваемой и ненаращиваемой вязкоупругих системах с постоянным модулем упругомгновенной деформации через четыре года отличаются на 373 %. Для этого блока процесс усадки материала в наращиваемой системе оказывает более сильное влияние на конечное напряженно-деформированное состояние: разница в перемещениях при учете совместно с ползучестью и изменением модуля упругомгновенной деформации составляет 20 % по сравнению с аналогичным расчетом без учета усадки материала. Изменение модуля упругомгновенной деформации во времени приводит к тому, что вертикальные перемещения в наращиваемой системе по прошествии четырех лет отличаются на 48 % по сравнению с результатами расчета, где принимается во внимание только ползучесть материала.

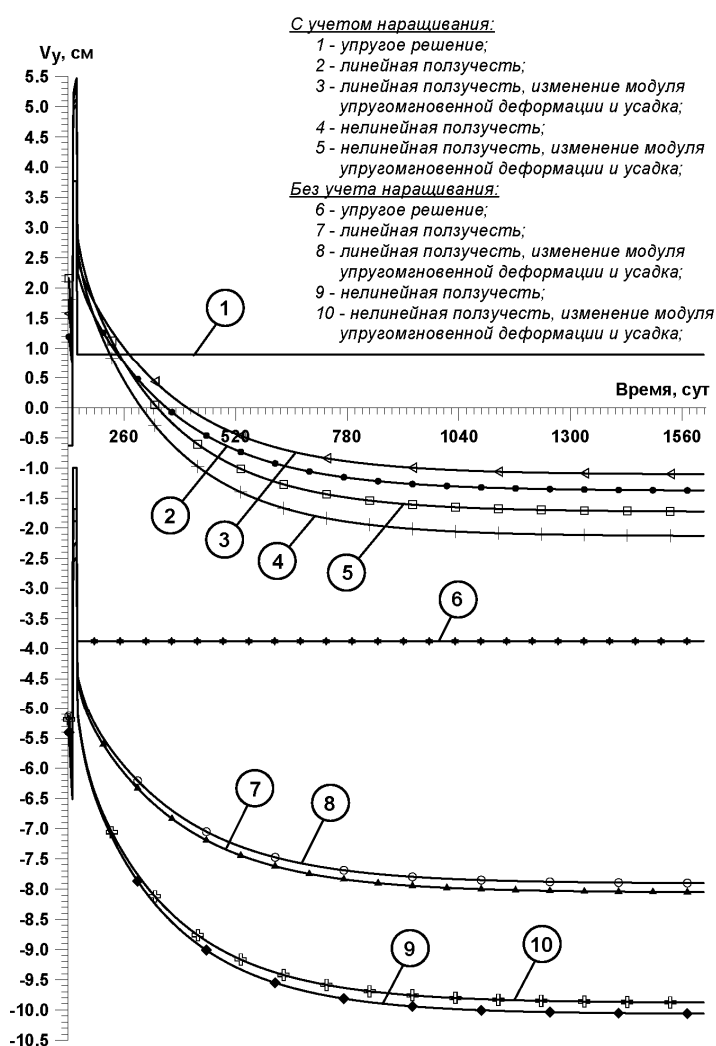


Рис. 5. Вертикальные перемещения торца тринадцатого блока. Сравнение влияния линейной и нелинейной ползучести материала

При сравнении ординат кривых 2 и 4 рисунка 5 можно видеть, что в наращиваемой системе по истечении четырех лет при учете нелинейной ползучести материала вертикальные перемещения на 55 % больше тех, что возникают в конструкции, материал которой обладает

линейной ползучестью. Без учета наращивания указанная разница составляет 25 % (кривые 7 и 9 рис. 5).

Напряжения. На рис. 6 и 7 показаны графики изменения напряжений в бетоне верхней фибры опорного сечения и в одном из пучков верхней предварительно напряженной арматуры (опорное сечение). Как можно видеть из графиков на рис. 6, ползучесть материала с течением времени приводит к тому, что знак напряжений в опорном сечении изменяется.

По истечении четырех лет за счет нелинейной ползучести и усадки материала, а также изменения модуля упругомгновенной деформации во времени, значение напряжения отличается от полученного в результате расчета упругой системы на 184 %. При этом растягивающие напряжения, как и в случае с линейной ползучестью, оказываются больше предельного сопротивления бетона.

Напряжения в бетоне верхней фибры опорного сечения по истечении четырех лет при учете линейной и нелинейной ползучести отличаются на 15 % (кривые 2 и 4 на рис. 6). Это различие не столь значительно, поскольку относительный уровень напряжений в рассматриваемом сечении – невысокий.

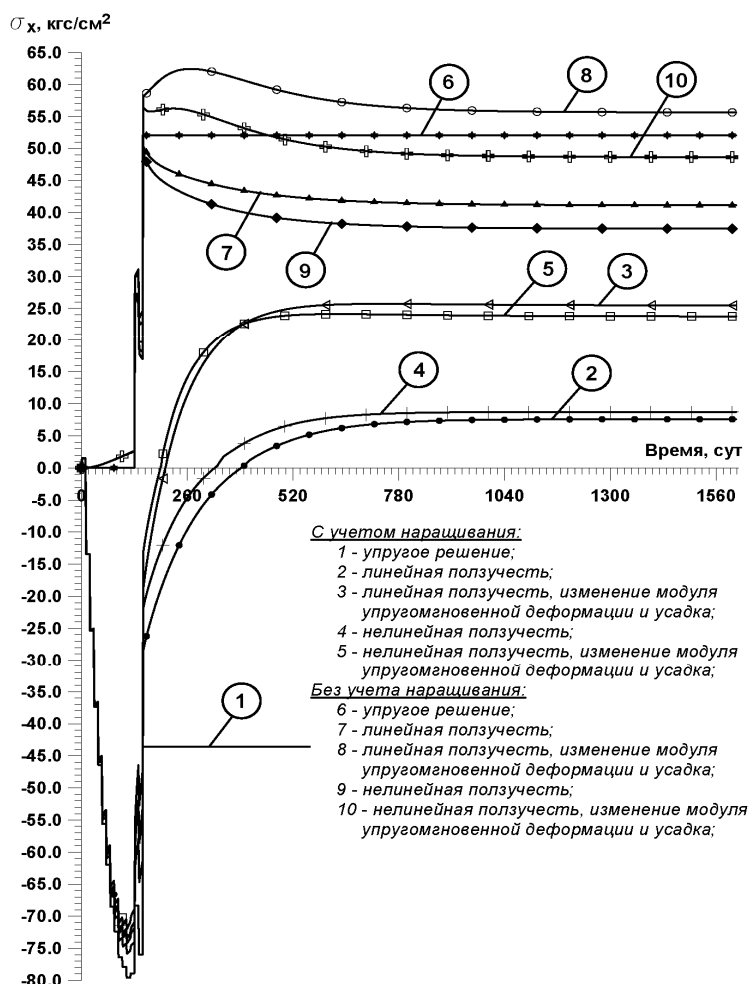


Рис. 6. Напряжения в бетоне верхней фибры опорного сечения. Сравнение влияния линейной и нелинейной ползучести материала

Наряду с реологическими свойствами материала важное значение при определении напряженно-деформированного состояния наращиваемых систем имеет скорость возведения конструкции. На рисунке 8 представлены графики изменения вертикального перемещения торца тринадцатого от заделки блока при различных скоростях изготовления и нагружения элементов: 10 сут, 28 сут и 46 сут. При этом в расчетах учитывалась нелинейная ползучесть материала, а модуль упругомгновенной деформации был принят постоянным и равным предельному (при $t \rightarrow \infty$) значению.

Как можно видеть из графиков, чем выше скорость наращивания и чем в более раннем возрасте материал нагружается, тем большие вертикальные перемещения возникают в системе, причем разница в перемещениях уменьшается при увеличении возраста нагружения материала.

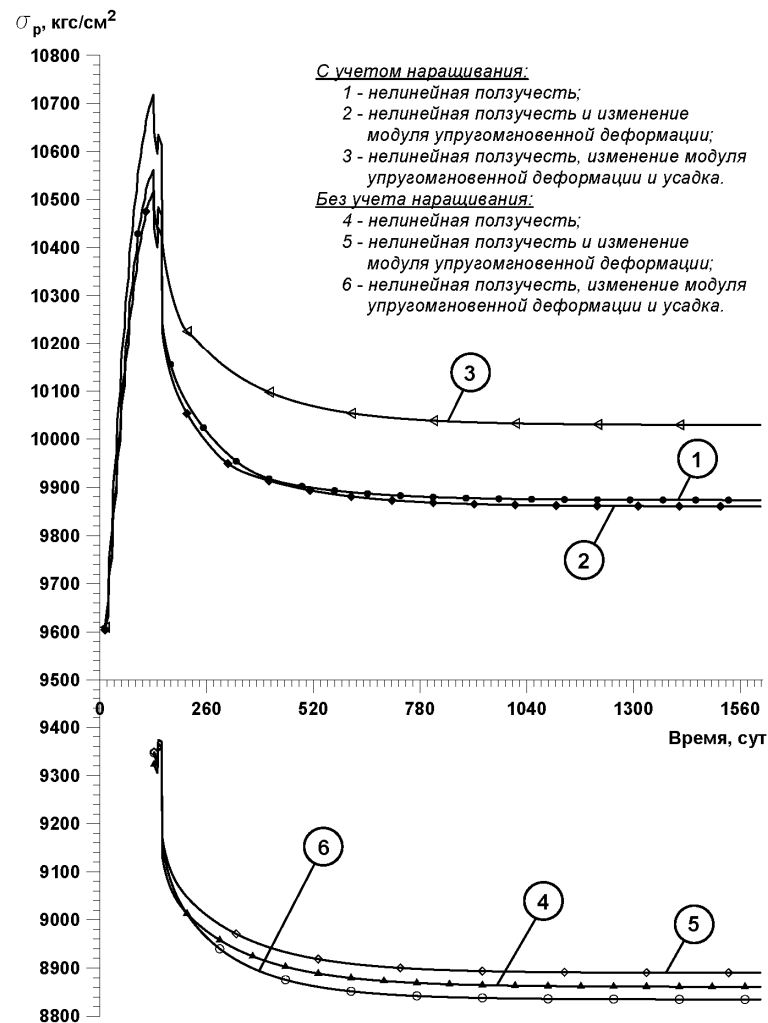


Рис. 7. Изменение напряжения в одном из пучков верхней напряженной арматуры

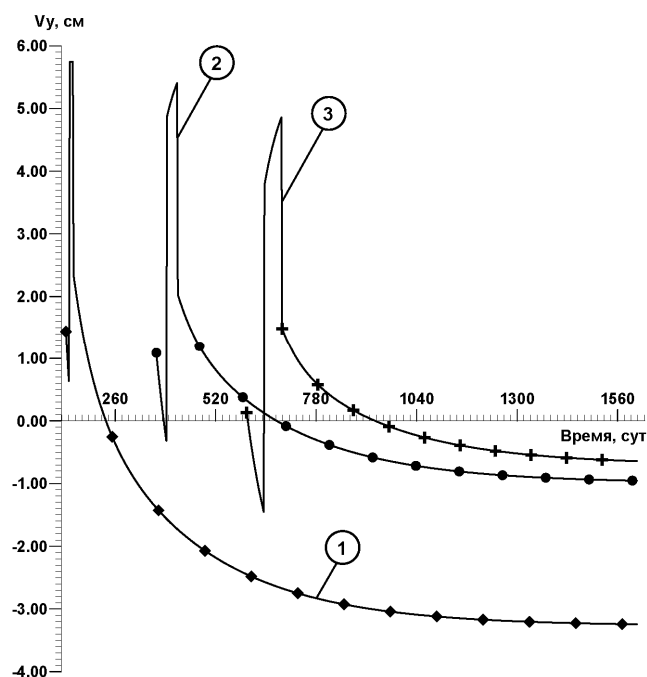


Рис. 8. Влияние скорости наращивания на величину вертикальных перемещений

Заключение

В случаях наращивания систем, продолжающегося длительный период времени, за счет неоднородного старения материала, ползучести и усадки наблюдается заметное изменение напряженно-деформированного состояния, по сравнению с аналогичными ненаращиваемыми системами.

При наличии в элементах систем высоких напряжений в значительной степени проявляется нелинейная вязкоупругость. При нагружении материала в раннем возрасте следует также принимать во внимание изменение модуля упругомгновенной деформации во времени.

Полученные численные результаты для конкретного примера позволяют количественно оценить влияние перечисленных факторов на напряженно-деформированное состояние систем и на их долговечность.

Литература

1. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородно стареющих тел. – М.: Наука, 1983. – 336 с.
2. Арутюнян Н.Х., Зевин А.А. Расчет строительных конструкций с учетом ползучести. – М.: Стройиздат, 1988. – 256 с.
3. Арутюнян Н. Х., Дроздов А.Д., Наумов В.Э. Механика растущих вязкоупругопластических тел. – М.: Наука, 1987. – 472 с.
4. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. – М.: Гостехиздат, 1952. – 323 с.
5. Рекомендации по учету ползучести и усадки бетона при расчете бетонных и железобетонных конструкций. НИИЖБ – М.: Стройиздат, 1988 г.

6. СНиП 2.05.03-84* Мосты и трубы. Минстрой России. – М.: ГП ЦПП, 1996. – 214 с.
7. Прокопович И.Е., Зедгенидзе В.А. Прикладная теория ползучести. – М.: Стройиздат, 1980. – 240 с.
8. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. – М.: Наука, 1968. – 398 с.
9. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов. – 2-е изд., перераб. – М.: Высш. шк., 2005. – 840 с.