Ляпунова [2]. В статье [5] описано новое направление в методе матричных функций Ляпунова, суть которого состоит в том, что отдельные компоненты векторной функции (3) сопровождают соответствующие динамические свойства решений исследуемой системы. Упомянутый подход применен здесь для исследования задачи о практической полиустойчивости движения.

1. *Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A. A.* Practical stability of nonlinear systems. – Singapore: World Scientific, 1990. – 207 p.
2. *Lakshmikantham V., Leela S., Martynyuk A. A.* Stability analysis of nonlinear systems. – New York: Marcel Dekker, 1989. – 315 p.
3. *Martynyuk A. A.* Stability by Liapunov's matrix function method with applications. – New York: Marcel Dekker, 1998. – 276 p.
4. *Stutson D., Vatsala A. S.* Generalized practical stability results by perturbing Lyapunov functions // J. Appl. Math. Stoch. Anal. – 1996. – **9**. – P. 69–75.
5. *Мартынюк А. А.* Новое направление в методе матричных функций Ляпунова // Докл. АН СССР. – 1991. – **319**. – С. 554–557.

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев

Поступило в редакцию 20.12.2006

УДК 517.5

В. В. Савчук

Наближення деяких класів голоморфних функцій середніми Фейєра

(Представлено членом-кореспондентом НАН України $\boxed{\text{О. І. Степанцем}}$)

For the classes $\mathscr{L}_p^\alpha$ and $\mathscr{D}_p^\beta$ of functions f holomorphic in a unit disk for which, respectively, $\sup\limits_{0\leqslant r<1}(1-r^2)^{1-\alpha}M_p(f')(r)\leqslant 1$ and $2\int\limits_0^1 M_p^p(f')(r)(1-r^2)^\beta r dr\leqslant 1$, we determine the exact estimates of upper bounds of deviations of the Fejer means of Taylor series in the Hardy spaces H_p. We establish a relation between the classes $\mathscr{L}_p^\alpha$ and $\mathscr{D}_p^\beta$.

Нехай $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$, $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ і $\mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ — множина усіх функцій, голоморфних у крузі $\mathbb{D}$. Для функції $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ і числа r, $0 \leqslant r < 1$, покладемо

$$M_p(f)(r) := \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(re^{it})|^p dt\right)^{1/p}, \qquad 0 < p < \infty,$$

і

$$M_\infty(f)(r) := \max_{|z|=r}|f(z)|.$$

Простір Гарді H_p складається з усіх функцій $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$, для яких

$$\|f\|_p := \sup_{0 \leqslant r < 1} M_p(f)(r) < \infty.$$

Нехай функція $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})$ і $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{f}_k z^k$ — її розвинення в ряд Тейлора, в якому $\widehat{f}_k := f^{(k)}(0)/k!$. Середніми Фейєра функції f порядку $n \in \mathbb{N}$ називається алгебраїчний многочлен $\sigma_n(f)$ вигляду

$$\sigma_n(f)(z) := \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{n}\right) \widehat{f}_k z^k, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

У роботі наводяться результати дослідження послідовності величин

$$F_n(\mathfrak{A}, H_p) := \sup\{\|f - \sigma_n(f)\|_{H_p} \colon f \in \mathfrak{A}\}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

коли в ролі $\mathfrak{A}$ вибираються класи $\mathscr{L}_p^\alpha$ і $\mathscr{D}_p^\beta$ голоморфних у $\mathbb{D}$ функцій, які означаються так: нехай $0 < \alpha \leqslant 1$ і $-1 < \beta < \infty$, тоді

$$\mathscr{L}_p^\alpha := \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \colon \sup_{0 \leqslant r < 1} (1 - r^2)^{1-\alpha} M_p(f')(r) \leqslant 1 \right\}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty,$$

$$\mathscr{D}_p^\beta := \left\{ f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}) \colon 2 \int_0^1 M_p^p(f')(r)(1 - r^2)^\beta r dr \leqslant 1 \right\}, \qquad 1 \leqslant p < \infty,$$

і $\mathscr{D}_\infty^\beta := \mathscr{L}_\infty^1$.

Галузь теорії наближення, яка пов'язана з дослідженнями апроксимативних властивостей середніх Фейєра (методу Фейєра), значною мірою розвинута для класів функцій дійсної змінної, зокрема для 2π-періодичних функцій. Про її сучасний стан можна дізнатися з монографії О. І. Степанця [1, 2].

Стосовно функцій комплексної змінної подібних досліджень проведено значно менше. Тут слід згадати основоположні результати Д. Алексіча [3], А. Зігмунда [4] і С. Б. Стєчкіна [5], з яких, зокрема, випливає, що для кожного натурального n справджується нерівність

$$F_n(\mathscr{L}_\infty^1, H_\infty) \leqslant \frac{A_n}{n}, \tag{1}$$

в якій A_n — член деякої обмеженої послідовності додатних чисел. Найменше з відомих на цей час значень A_n було знайдене С. Б. Стєчкіним [5]: $A_n = (3n - 1)/(n + 1) < 3$. Одна із цілей нашого дослідження полягала в з'ясуванні того, наскільки оптимальною (точною) є послідовність $\{A_n\}_{n=1}^\infty = \{(3n - 1)/(n + 1)\}_{n=1}^\infty$ в нерівності (1) та який вигляд матиме аналог (1) для класів $\mathscr{L}_p^\alpha$ і $\mathscr{D}_p^\beta$.

Теорема 1. *Нехай $0 < \alpha \leqslant 1$. Тоді для кожного натурального n*

$$F_n(\mathscr{L}_\infty^\alpha, H_\infty) = \theta_{n,\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2} + \alpha\right)}, \qquad \frac{1}{2} \leqslant \theta_{n,\alpha} \leqslant 1, \tag{2}$$

і

$$F_n(\mathscr{L}_p^\alpha, H_p) \leqslant \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}+\alpha\right)}, \qquad 1 \leqslant p < \infty. \tag{3}$$

Зокрема,

$$F_n(\mathscr{L}_p^\alpha, H_p) = O(1)\frac{1}{n^\alpha}, \qquad n \to \infty, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Тут і нижче $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція Ейлера.

Теорема 2. *Нехай* $1 < p < \infty$ *і* $-1 < \beta < p - 1 = 1/(q-1)$*. Тоді:*

1) для будь-якого натурального n

$$F_n(\mathscr{D}_p^\beta, H_p) = \theta_{n,\beta,p}\left[\frac{\Gamma(1-\beta(q-1))\Gamma\left(\dfrac{q}{2}(n-1)+1\right)}{\Gamma\left(\dfrac{q}{2}(n-1)+2-\beta(q-1)\right)}\right]^{1/q}, \tag{4}$$

де

$$\frac{q^{1/q-\beta/p}p^{1/p}}{2^{1-\beta/p}(\Gamma(1-\beta(q-1)))^{1/q}(\Gamma(1+\beta))^{1/p}} \leqslant \theta_{n,\beta,p} \leqslant 1, \tag{5}$$

і, зокрема,

$$F_n(\mathscr{D}_p^\beta, H_p) = O(1)\frac{1}{n^{1-(1+\beta)/p}}, \qquad n \to \infty;$$

2) для будь-якої функції $f \in \mathscr{D}_p^\beta$ *справджується співвідношення*

$$\|f - \sigma_n(f)\|_{H_p} = o(1)\frac{1}{n^{1-(1+\beta)/p}}, \qquad n \to \infty. \tag{6}$$

Зробимо декілька коментарів до теорем 1 і 2 у вигляді таких зауважень.

Зауваження 1. При $\alpha = 1$ із співвідношень (2) і (3) випливає оцінка

$$F_n(\mathscr{L}_p^1, H_p) \leqslant \frac{A_n}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \tag{7}$$

в якій $A_n = 2n/(n+1) < 2$, до того ж $2n/(n+1) < (3n-1)/(n+1)$ для $n = 2, 3, \ldots$. З огляду на це нерівність (7) можна вважати, зокрема при $p = \infty$, підсиленням згаданої вище оцінки С. Б. Стєчкіна.

Зауваження 2. При $p = 2$ і $\beta = 0$ співвідношення (5) перетворюється в рівність $\theta_{n,0,2} = 1$, а відтак (4) набуває вигляду

$$F_n(\mathscr{D}_2^0, H_2) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Зауваження 3. Формально співвідношення (4) залишається правильним і при $p = \infty$:

$$F_n(\mathscr{D}^\beta_\infty, H_\infty) = F_n(\mathscr{L}^1_\infty, H_\infty) = \theta_{n,1}\frac{2}{n+1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Однак співвідношення (6) у цьому випадку перестає бути правильним, оскільки середні Фейєра, як лінійний метод наближення, є насиченими в просторі H_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, з порядком насичення n^{-1} (див., напр., [1, гл. 2]), тобто співвідношення $\|f - \sigma_n(f)\|_{H_p} = o(1)n^{-1}$, $n \to \infty$ можливе лише для функцій, які є сталими в $\mathbb{D}$.

Між класами $\mathscr{L}^\alpha_p$ і $\mathscr{D}^\beta_p$ існує певний зв'язок. Цілком очевидно, що $\mathscr{L}^{1-\beta/p}_p \subset \mathscr{D}^\beta_p$. З іншого боку, якщо, виходячи з теореми 2, послідовно скористатися оберненою теоремою наближення функцій з простору H_p середніми Фейєра (див., напр., [6, с. 106]) та теоремою Гарді–Літтлевуда [7] (див., також [8, с. 78]), отримаємо ланцюжок імплікацій:

$$f \in \mathscr{D}^\beta_p \Rightarrow \|f - \sigma_n(f)\|_{H_p} = O(1)\frac{1}{n^{1-(1+\beta)/p}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|f(e^{ih}\cdot) - f(\cdot)\|_{H_p} = O(1)h^{1-(1+\beta)/p}, \qquad h \to 0+ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_p(f')(r) = O(1)(1-r^2)^{-(1+\beta)/p}, \qquad r \to 1.$$

В такий спосіб доведено таке твердження.

Теорема 3. *Нехай $1 < p < \infty$ і $-1 < \beta < p - 1$. Якщо функція $f \in \mathscr{D}^\beta_p$, то знайдеться стала $K > 0$ така, що $\sup\limits_{0 \leqslant r < 1}(1-r^2)^{(1+\beta)/p}M_p(f')(r) \leqslant K$, іншими словами, справджується включення*

$$\mathscr{D}^\beta_p \subset \bigcup_{K>0} K\mathscr{L}^{1-(1+\beta)/p}_p,$$

де $K\mathscr{L}^{1-(1+\beta)/p}_p := \{f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D})\colon f/K \in \mathscr{L}^{1-(1+\beta)/p}_p\}$.

У доведеннях теорем 1 і 2 ключовим є таке твердження.

Лема. *Нехай f — функція, голоморфна в $\mathbb{D}$. Тоді для будь-яких $\theta \in [0, 2\pi]$, $\varrho \in [0, 1)$ і $n \in \mathbb{N}$ виконується рівність*

$$f(\varrho^2 e^{i\theta}) - \sum_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{n}\varrho^{2(n-k-1)}\right)\widehat{f}_k \varrho^{2k} e^{ik\theta} = \frac{e^{in\theta}}{\pi}\int\limits_0^\varrho r^n \int\limits_0^{2\pi} f'(re^{it})e^{-i(n-1)t}P(t-\theta, r)\,dtdr,$$

в якій

$$P(t,r) := \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}.$$

1. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 1. – 427 с.
2. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 ч. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч. 2. – 467 с.
3. *Alexits G. A.* Fourier-sor Cesàro-këzepeivel való approximáció nagyságredjéröl // Mat. és Fiz. Lapok. – 1941. – **48**. – P. 410–422.
4. *Zygmund A.* On the degree of approximation of functions by Fejer means // Bull. Amer. Math. Soc. – 1945. – **51**. – P. 274–278.

5. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1953. – **17**, № 5. – С. 462–472.
6. *Butzer P., Nessel J. R.* Fourier analysis and approximation. – Basel: Birkhäuser, 1971. – 553 p.
7. *Hardy G., Littlewood J. E.* Some properties of fractional integrals. II // Math. Z. – 1931. – **34**. – P. 403–439.
8. *Duren P.* Theory of H^p spaces. – New York: Academic Press, 1970. – 258 p.

Інститут математики НАН України, Київ

Надійшло до редакції 03.05.2007