ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

6 • 2012

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

Т. О. Банах, О. В. Маслюченко

Фрактальна розмірність і лінійно неперервні функції

(Представлено членом-кореспондентом НАН України В. В. Шарком)

З використанням фрактальної розмірності побудовано таку замкнену множину $F \subseteq \mathbb{R}^2$, яка не може бути множиною точок розриву жодної лінійно неперервної функції $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, але будь-яка її афінна проекція ніде не щільна. Також доведено, що будь-яка сферична проекція множини точок розриву лінійно неперервної функції $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ є множиною першої категорії.

1. Питання про точки неперервності нарізно неперервних функцій, яке бере свій початок ще з класичних праць Р. Бера і В. Осгуда, на даний момент добре вивчено. Зокрема, в роботі [1] отримано повний опис множин точок розриву нарізно неперервних функцій, що визначені на добутках метризовних просторів. *Лінійно неперервні функції* — це такі функції $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, звуження $f|_L$ яких на кожну пряму $L \subseteq \mathbb{R}^n$ неперервне (на відміну від нарізно неперервних функцій, для яких, фактично, вимагається неперервність звужень на прямі, що паралельні координатним осям). Зрозуміло, що питання про вивчення множини точок розриву лінійно неперервних функцій має спільні риси із дослідженням розривів нарізно неперервних функцій. Проте при вивченні лінійно неперервних функцій є одна істотна трудність: для лінійно неперервних функцій є континуум різних напрямків, відносно яких вимагається неперервність, а для нарізно неперервних функцій — їх скінченна кількість. Ця обставина ускладнює геометричну структуру точок розривів лінійно неперервних функцій. Скажімо, множини точок розриву нарізно неперервних функцій $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — це, в точності, такі F_σ-множини, проекції яких паралельні до кожної з координатних осей першої категорії. А для характеризації множин точок розриву лінійно неперервних функцій $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ в [2] була введена спеціальна геометрична умова: σ-лінійна стичність. Множина $E \subseteq \mathbb{R}^n$ називається *σ-лінійно стичною*, якщо існують послідовності множин F_k, A_k, B_k, для яких $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, $\overline{A}_k \bigcap B_k = A_k \bigcap \overline{B}_k = \varnothing$, $F_k = \overline{A}_k \bigcap \overline{B}_k$, і для довільного $x \in F_k$ та напрямку $e \in \mathbb{R}^n$ існує таке $\varepsilon > 0$, що відрізок $[x, x+\varepsilon e] \subseteq \overline{A}_k$. В [2] було встановлено такий результат.

Теорема А. *Для того щоб множина $E \subseteq \mathbb{R}^n$ була множиною точок розриву деякої лінійно неперервної функції $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ першого класу Бера, необхідно і достатньо, щоб E була σ-лінійно стичною.*

Оскільки лінійно неперервна функція є нарізно неперервною, а кожна нарізно неперервна функція двох дійсних змінних, як відомо, належить до першого класу Бера, то звідси випливає така характеризація множин точок розриву лінійно неперервних функцій двох дійсних змінних.

Наслідок. *Множина $E \subseteq \mathbb{R}^2$ є множиною точок розриву деякої лінійно неперервної функції $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли E є σ-лінійно стичною.*

Проте досі ще не з'ясовано, якою є множина точок розриву лінійно неперервних функцій багатьох змінних. Дана робота присвячена встановленню деяких необхідних умов на множину точок розриву лінійно неперервних функцій, які, на жаль, не є достатніми. Для цього нам буде потрібний один результат про сукупну неперервність K_hC-функцій. Нагадаємо, що функція $f\colon X \times Y \to Z$ називається *K_hC-функцією*, якщо вона неперервна відносно другої змінної і *горизонтально квазінеперервна*, тобто для довільної точки $(x_0, y_0) \in X \times Y$, її околу $U \times V$ і околу W її образу $f(x_0, y_0)$ існує відкрита непорожня множина $U_1 \subseteq U$ і точка $y_1 \in V$ така, що $f(x, y_1) \in W$ при $x \in U_1$. Нижчеподаний результат був отриманий у роботі [3].

Теорема В. *Нехай X — топологічний простір, Y — топологічний простір з другою аксіомою зліченності, Z — метризовний простір і $f\colon X \times Y \to Z$ — K_hC-функція. Тоді проекція $\mathrm{pr}_X(D(f))$ множини точок розриву на X є множиною першої категорії.*

2. У роботі, оскільки терміни "ніде не щільна множина" і "множина першої категорії" беруть участь у формуванні похідних термінів, ми використовуватимемо для них короткі замінники. А саме множини першої категорії називатимемо *худими*, а ніде не щільні — *мізерними.* Нехай X — топологічний векторний простір. Підмножина $C \subseteq X$ називається *циліндричною (конічною)*, якщо існує $a \in X$ таке, що для довільних $x \in C$ і $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ виконується, що $\lambda a + x \in C$ (чи відповідно $a + \lambda x \in C$). Казатимемо, що множина E є *циліндрично (конічно) мізерною*, якщо для довільної відкритої непорожньої конічної (циліндричної) множини $G \subseteq X$ існує відкрита непорожня конічна (циліндрична) множина $H \subseteq G$, для якої $H \bigcap E = \varnothing$. Казатимемо, що E є *σ-циліндрично σ-конічно мізерною*, якщо існує послідовність циліндрично (конічно) мізерних множин E_n таких, що $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$.

Зрозуміло, що відкриті циліндричні множини — це, в точності, прообрази відкритих множин при дії лінійних неперервних проекторів з одновимірним ядром. Тому множина E буде проективно ніде не щільною тоді і тільки тоді, коли для довільного лінійного неперервного проектора $p\colon X \to X$ з одновимірним ядром виконується, що $p(E)$ мізерна в $p(X)$. Множину $E \subseteq X$ називатимемо *лінійно проективно худою*, якщо для довільного лінійного проектора $p\colon X \to X$ з одновимірним ядром виконується, що $p(E)$ худа в $p(X)$. Оскільки замкнена худа підмножина берівського простору буде мізерною і за теоремою Куратовського про замкненість проекції матимемо, що для довільного проектора з одновимірним ядром образ замкненої обмеженої множини є замкненим, то лінійно проективно худа F_σ-підмножина банахового простору буде σ-циліндрично мізерною.

Нагадаємо, що відображення $f\colon X \to Y$ називається *квазінеперервним*, якщо для довільної точки $x \in X$ її околу U і околу V її образу $f(x)$ існує відкрита непорожня множина $U_1 \subseteq U$ така, що $f(U_1) \subseteq V$. Почнемо з одного нескладного наслідку з теореми В.

Лема 1. *Нехай S, T, X, Y — топологічні простори, причому T з другою аксіомою зліченності, $t^* \in T$, $T^* = T \setminus \{t^*\}$, а Y — метризовний, $f\colon X \to Y$ — квазінеперервна функція і $\varphi\colon S \times T \to X$ — таке неперервне відображення, що відображення $f \circ \varphi^s = f(\varphi(s, \cdot))$ неперервне для кожного $s \in S$ і звуження $f^* = f|_{S \times T^*}$ відкрите. Тоді $D^\varphi(f) =$*

$= \{s \in S$*: для деякого* $t \in T$ *відображення* f *розривне в точці* $\varphi(s,t)\}$ *є множиною першої категорії. Якщо, крім того,* S *— берівський, а* T *— метризовний компакт, то для довільно* $\varepsilon > 0$ *множина* $D^{\varphi}_{\varepsilon}(f) = \{s \in S$*: для деякого* $t \in T$ *коливання* $\omega_f(\varphi(s,t)) \geqslant \varepsilon\}$ *мізерна в* S.

Доведення. Розглянемо відображення $g = f \circ \varphi \colon S \times T \to Y$. Ясно, що g неперервне відносно другої змінної. Перевіримо, що g є горизонтально квазінеперервним. Візьмемо деяку точку $(s_0, t_0) \in S \times T$ і покладемо $x_0 = \varphi(s_0, t_0)$ та $y_0 = f(x_0) = g(s_0, t_0)$. Ясно, що досить розглянути випадок, коли точка t_0 не ізольована. Розглянемо відкриті околи U_0 точки s_0 в S, V_0 точки t_0 в T і W_0 точки y_0 в Y.

Оскільки $g^{s_0} = f \circ \varphi^{s_0}$ неперервне, то існує точка $t_1 \in U_0 \setminus \{t^*\}$, для якої $g^{s_0}(t_1) \in W_0$. Нехай $x_1 = \varphi(s_0, t_1)$. Зрозуміло, що множина $G_0 = \varphi(U_0 \times V_0)$ є відкритим околом точки x_1. Але f квазінеперервне. Тому існує відкрита непорожня множина $G_1 \subseteq G_0$ така, що $f(G_1) \subseteq$ $\subseteq W_0$. Візьмемо деяку точку $x_2 \in G_1$. Тоді існують $s_2 \in U_0$ і $t_2 \in V_0$ такі, що $x_2 = \varphi(s_2, t_2)$. Виберемо такі околи $U_2 \subseteq U_0$ точки s_2 і $V_2 \subseteq V_0$ точки t_2, що $\varphi(U_2 \times V_2) \subseteq G_1$. Тоді $g(U_2 \times$ $\times \{t_2\}) \subseteq g(U_2 \times V_2) \subseteq f(G_1) \subseteq W_0$. Таким чином, g є K_hC-функцією. Тому за теоремою В матимемо, що $D^{\varphi}(f) = \mathrm{pr}_S(D(g))$ є множиною першої категорії. Для доведення другої частини леми досить скористатись теоремою Куратовського про замкненість проекції.

Теорема 1. *Нехай* X *— топологічний векторний простір,* Y *— метризовний простір і* $f \colon X \to Y$ *— квазінеперервне лінійно неперервне відображення. Тоді його множина точок розриву* $D(f)$ *є лінійно проективно худою. Зокрема, якщо* X *— банахів простір, то* $D(f)$ *є* σ*-циліндрично мізерною.*

Доведення. Розглянемо деякий лінійний проектор $p \colon X \to X$ з одновимірним ядром $T = p^{-1}(0)$. Нехай $S = p(X)$ — образ даного проектора. Ясно, що $S \oplus T = X$. Розглянемо відображення $\varphi \colon S \times T \to X$, що діє за правилом $\varphi(s,t) = s + t$. За лемою 1 матимемо, що $p(D(f)) = D^{\varphi}(f)$ худа.

3. Для нормованого простору X розглянемо проекцію $\pi \colon X \setminus \{0\} \to S_X$ на одиничну сферу $S_X = \{x \in X \colon \|x\| = 1\}$, яка визначається формулою $\pi(x) = x/\|x\|$. Крім того, для довільної точки $a \in X$ розглянемо відображення $\pi_a \colon X \setminus \{a\} \to S_X$, $\pi_a(x) = \pi(x - a)$. Зрозуміло, що множина $E \subseteq X$ буде конічно мізерною тоді і тільки тоді, коли для довільного $a \in X$ множина $\pi_a(E \setminus \{a\})$ мізерна в S_X. Казатимемо, що множина $E \subseteq X$ є *сферично проективно худою*, якщо для довільного $a \in X$ сферична проекція $\pi_a(E \setminus \{a\})$ худа в S_X. Очевидно, що σ-конічно мізерна множина є сферично худою. Пізніше ми переконаємось, що обернене не вірне.

Теорема 2. *Нехай* X *— нормований простір,* Y *— метризовний простір і* $f \colon X \to Y$ *— квазінеперервне лінійно неперервне відображення. Тоді його множина точок розриву* $D(f)$ *є сферично проективно худою. Якщо* X *— банахів простір, то* $D(f)$ *є* σ*-конічно мізерною.*

Доведення. Зафіксуємо деяку точку $a \in X$. Позначимо $S = S_X$, $T = [0, +\infty)$ і $t^* = 0$. Розглянемо відображення $\varphi \colon S \times T \to Y$, що діє за правилом $\varphi(s,t) = a + ts$. За лемою 1 матимемо, що $\pi_a(D(f)) = D^{\varphi}(f)$ худа. А якщо X — банахів простір, то, покладаючи $E_n = \omega_f^{-1}([1/n, +\infty]) \bigcap B_X[0, n]$, матимемо, що $\pi_a(E_n \setminus \{a\})$ є ніде не щільною для кожного a, а тому E_n є конічно мізерною. Значить, $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ є σ-конічно мізерною.

Добре відомо, що кожна нарізно неперервна (а значить, і лінійно неперервна) функція $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ є квазінеперервною. Тому з попередніх теорем у скінченно вимірному випадку одержуємо такі твердження.

Наслідок 1. *Нехай $X = \mathbb{R}^n$, Y — метризовний простір і $f\colon X \to Y$ — квазінеперервне лінійно неперервне відображення. Тоді його множина точок розриву $D(f)$ є σ-сферично проективно мізерною. Зокрема, $D(f)$ є сферично проективно худою.*

Наслідок 2. *Нехай $X = \mathbb{R}^n$, Y — метризовний простір і $f\colon X \to Y$ — лінійно неперервне відображення. Тоді його множина точок розриву $D(f)$ є σ-конічно мізерною.*

4. Побудуємо σ-циліндрично мізерну множину, яка не є σ-конічно мізерною. Для цього корисним є поняття фрактальної розмірності. Нехай X — метричний простір. Візьмемо $\varepsilon > 0$. Якщо в просторі X існує нескінченна ε-сітка, то покладемо $\nu_X(\varepsilon) = \infty$. Інакше, через $\nu_X(\varepsilon)$ позначимо мінімальну потужність ε-сітки в X, тобто $\nu_X(\varepsilon) = \min\{|S|\colon B(S,\varepsilon) = X\}$. Покладемо

$$\overline{\mathrm{fd}}(X) = \varlimsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln \nu_X(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}, \qquad \underline{\mathrm{fd}}(X) = \varliminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln \nu_X(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}} \qquad \text{та} \qquad \mathrm{fd}(X) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln \nu_X(\varepsilon)}{\ln \frac{1}{\varepsilon}}.$$

Ці числа називаються *(верхньою, нижньою) фрактальною розмірністю* X.

Лема 2. *Нехай X та Y — такі метричні простори, для яких існує ліпшицева сюр'єкція з X в Y, або Y є підпростором X. Тоді $\overline{\mathrm{fd}}(Y) \leqslant \overline{\mathrm{fd}}(X)$, $\underline{\mathrm{fd}}(Y) \leqslant \underline{\mathrm{fd}}(X)$ і $\mathrm{fd}(Y) \leqslant \mathrm{fd}(X)$.*

Доведення. Візьмемо деяку сюр'єкцію $f\colon X \to Y$, яка є ліпшицевою з деякою константою γ. Тоді, якщо S є ε-сіткою в X, то $f(S)$ є $\gamma\varepsilon$-сіткою в Y. Але $|f(S)| \leqslant |S|$. Тому $\nu_Y(\gamma\varepsilon) \leqslant \nu_X(\varepsilon)$. Звідси випливають потрібні нерівності.

Нехай тепер Y є підпростором X і S є ε-сіткою Y. Покладемо $S_1 = \{s \in S\colon B(s,\varepsilon) \bigcap Y \neq$ $\neq \varnothing\}$ і для кожного $s \in S_1$ виберемо $t_s \in Y$ таке, що $|s - t_s|_X \subseteq \varepsilon$. Тоді множина $T =$ $= \{t_s\colon s \in S_1\}$ є 2ε-сіткою простору Y, причому $|T| \leqslant |S|$. Таким чином, $\nu_Y(2\varepsilon) \leqslant \nu_X(\varepsilon)$. Звідси одержуємо потрібні нерівності.

Лема 3. *Нехай X — нормований простір, $d = \dim(X)$ і E — обмежена десь щільна підмножина X. Тоді $\mathrm{fd}(E) = d$.*

Доведення. Покладемо $F = \overline{E}$. Нескладно перевірити, що $\mathrm{fd}(F) = \mathrm{fd}(E) = d$. Далі, якщо $d = \infty$, то за лемою про майже перпендикуляр в F для досить малих $\varepsilon > 0$ існує нескінченна ε-відокремна множина. Отже, $\mathrm{fd}(E) = \infty$. Нехай тепер $d < \infty$. Оскільки всі d-вимірні нормовані простори ізоморфні, а значить, і ліпшицево гомеоморфні, то можна вважати, що $X = \ell_\infty^d$. Нехай $K = [0,1]^d$. Оскільки F обмежена і має непорожню внутрішність, існують невироджені паралелепіпеди $K' = \prod\limits_{j=1}^{d} [a_j', b_j']$ і $K'' = \prod\limits_{j=1}^{d} [a_j'', b_j'']$ такі, що $K' \subseteq F \subseteq K''$. Але K' і K'' очевидним чином ліпшицево гомеоморфні до K. Тому за лемою 2 матимемо, що $\mathrm{fd}(K') = \mathrm{fd}(K'') = \mathrm{fd}(K)$, а тому $\mathrm{fd}(K) = \mathrm{fd}(F)$. Залишилось довести, що $\mathrm{fd}(K) = d$.

Доведемо спочатку, що $\overline{\mathrm{fd}}(K) \leqslant d$. Нехай тепер $S_n = \left\{ \left(\dfrac{k_i}{n}\right)_{i=1}^{d} : k_i = 1, \ldots, n \right\}$. Тоді $|S_n| = n^d$. Причому, якщо $\varepsilon > 1/n$, то S_n є ε-сіткою. Отже, $n_K(\varepsilon) \leqslant n^d$ при $\varepsilon > 1/n$. Тоді нерівність $\overline{\mathrm{fd}}(K) \leqslant d$ випливає з того, що при $1/n < \varepsilon \leqslant 1/(n-1)$ виконується оцінка

$$\frac{\ln \nu_K(\varepsilon)}{\ln \dfrac{1}{\varepsilon}} \leqslant \frac{\ln n^d}{\ln \dfrac{1}{1/(n-1)}} = \frac{d \ln n}{\ln n + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)} \to d \qquad \text{при} \qquad n \to \infty.$$

Доведемо, що $\underline{\mathrm{fd}}(K) \geqslant d$. Візьмемо $\varepsilon < 1/(2n)$ і знайдемо таку ε-сітку T, що $|T| = \nu_K(\varepsilon)$. Далі для довільного $s \in S_n$ існує таке $t_s \in T$, для якого $\|s - t_s\| \leqslant 1/n$. Але для різних s',

$s'' \in S_n$ матимемо, що $|s_{t'} - s(t'')| \geqslant 1/n - 2\varepsilon > 0$. Тому $s_{t'} \neq s_{t''}$. Таким чином, $n^d = |S_n| \leqslant$ $\leqslant |T| = n_K(\varepsilon)$ при $\varepsilon < 1/(2n)$. Отже, при $1/(2(n+1)) \leqslant \varepsilon < 1/(2n)$ виконується нерівність

$$\frac{\ln \nu_K(\varepsilon)}{\ln \dfrac{1}{\varepsilon}} \geqslant \frac{\ln n^d}{\ln \dfrac{1}{1/(2n+2)}} = \frac{d \ln n}{\ln n + \ln 2 + \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)} \to d \qquad \text{при} \qquad n \to \infty.$$

А значить, $\underline{\mathrm{fd}}(K) \geqslant d$. Отже, ми довели, що $d \leqslant \underline{\mathrm{fd}}(K) \leqslant \overline{\mathrm{fd}}(K) \leqslant d$. Тому $\mathrm{fd}(K) = d$.

Лема 4. *Нехай X — нормований простір і $E \subseteq X$, причому $\underline{\mathrm{fd}}(E) = 0$ і $\dim X \geqslant 2$. Тоді:*

(i) E ніде не щільна;

(ii) якщо p — ненульововий проектор в X, то множина $p(E)$ ніде не щільна в $p(X)$;

(iii) E циліндрично мізерна;

(iv) E сферично проективно худа.

Доведення. По-перше, з лем 2 і 3 матимемо (i), (ii), (iii). Доведемо (iv). Зауважимо, що для довільних x, $y \in X$ з $\varepsilon \leqslant \|x\| \leqslant \|y\|$ матимемо, що

$$\|\pi(x) - \pi(y)\| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|x\|\|\pi(x) - \pi(y)\| = \frac{1}{\varepsilon}\|x - \|x\|\pi(y)\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon}(\|x - y\| + \|y - \|x\|\pi(y)\|) = \frac{1}{\varepsilon}(\|x - y\| + \|y\| - \|x\|) \leqslant \frac{2}{\varepsilon}\|x - y\|.$$

Таким чином, відображення π є ліпшицевим при $\|x\| \geqslant \varepsilon$. А тому π_a ліпшицеве при $\|x-a\| \geqslant$ $\geqslant \varepsilon$. Залишилось знову скористатись лемою 2 і аналогом леми 3 для сфери в нормованому просторі.

Нехай $\Delta = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ і $e = (\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$, де $\varepsilon_n \downarrow 0$. На множині Δ визначимо метрику ρ_e, покладаючи $\rho_e(s,t) = \varepsilon_m$, якщо $s = (\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$, $t = (\tau_n)_{n=1}^{\infty} \in \Delta$ такі, що $\sigma_n = \tau_n$ при $n < m$ і $\sigma_m \neq \tau_m$. Метричний простір (Δ, ρ_e) позначатимемо Δ_e.

Лема 5. *Нехай послідовність $e = (\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ така, що $\varepsilon_n \downarrow 0$ і $d = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\log_2(1/\varepsilon_n)}$. Тоді* $\mathrm{fd}(\Delta_e) = d$.

Доведення. Нехай $S_m = \{s = (\sigma_n) \in \Delta \colon \sigma_n = 0 \text{ при } n > m\}$. Ясно, що $|S_m| = 2^m$. Крім того, S_m є ε-сіткою при $\varepsilon > \varepsilon_m$. А також для довільних різних s, $t \in S_m$ виконується, що $\rho_e(s,t) \geqslant \varepsilon_m$.

Теорема 3. *Нехай X — сепарабельний банахів простір. Тоді існує компактна множина $K \subseteq X$, яка не є σ-конічно мізерною і $\mathrm{fd}(K) = 0$. Зокрема, K є σ-циліндрично мізерною, лінійно і сферично проективно худою, проте не може бути множиною точок розриву жодного лінійно неперервного і квазінеперервного відображення $f \colon X \to \mathbb{R}$.*

Доведення. Розглянемо щільну в S_X послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Нехай також $\varepsilon_n = 2^{-n^2}$, $\delta_n = \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}$ і $e = (\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$. Розглянемо відображення $f \colon \Delta_e \to X$, що діє за правилом $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n \tau_n x_n$, для $t = (\tau_n)_{n=1}^{\infty} \in \Delta_n$. Візьмемо такі $s = (\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$, $t = (\tau_n)_{n=1}^{\infty} \in \Delta_e$, що $\sigma_n = \tau_n$ при $n < m$ і $\sigma_m \neq \tau_m$. Тоді $\rho_e(s,t) = \varepsilon_m$. Крім того,

$$\|f(s) - f(t)\| = \left\|\sum_{n \geqslant m} \delta_n(\sigma_n - \tau_n)x_n\right\| \leqslant \sum_{n \geqslant m} \delta_n = \sum_{n \geqslant m}(\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}) = \varepsilon_m = \rho_e(s,t),$$

$$\|f(s) - f(t)\| \geqslant \delta_m - \sum_{n > m} \delta_n = \varepsilon_m - 2\varepsilon_{m+1} = \varepsilon_m\left(1 - \frac{1}{4^m}\right) \geqslant \frac{3}{4}\rho_e(s,t).$$

Таким чином, відображення f є ліпшицевим гомеоморфізмом. Покладемо $K = f(\Delta_e)$. Тоді за лемами 2 і 5 матимемо, що $\mathrm{fd}(K) = \mathrm{fd}(\Delta_e) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\log_2(1/\varepsilon_n)} = 0$. Доведемо, що K не є σ-конічно мізерною. Нехай це не так і $K = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, для деяких конічно мізерних множин E_k. Тоді замкнені множини $F_n = \overline{E}_k$ також є конічно мізерними і $K = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_k$. Але K — компакт. Отже, існує такий номер k, для якого множина F_k десь щільна, а значить, має непорожню внутрішність. Тоді $U_k = \operatorname{int} f^{-1}(F_k) \neq \varnothing$. Отже, існує такий скінченний набір $(\tau_n)_{n=1}^{m-1} \in \{0,1\}^m$, що для довільного $s = (\sigma_n) \in \Delta_e$, з $\sigma_n = \tau_n$ при $n < m$, виконується, що $s \in U_k$. Нехай $t = (\tau_1, \ldots, \tau_{m-1}, 0, 0, \ldots)$ і $a = f(t)$. Візьмемо $n > m$ і розглянемо набір $t_n \in \Delta_e$, який від набору t відрізняється тим, що у нього на n-му місці стоїть одиниця. Тоді $t_n \in U$, а значить, $x_n = f(t_n) \in F_k$. Але $x_n = a + \delta_n x_n$. Тому $\pi_a(F_k) \ni \dfrac{x_n - a}{\|x_n - a\|} = x_n$ для довільного $n \geqslant m$. Отже, $\pi_a(F_k)$ щільна в S_X. Таким чином, F_k не є конічно мізерною.

Наслідок 3. *Нехай $d \in \mathbb{N}$. Тоді існує компактна множина $K \subseteq \mathbb{R}^d$, яка не є σ-конічно мізерною і $\mathrm{fd}(K) = 0$. Зокрема, K є σ-циліндрично мізерною, лінійно і сферично проективно худою, проте не може бути множиною точок розриву жодного лінійно неперервного відображення $f\colon X \to \mathbb{R}$.*

1. *Маслюченко В. К., Михайлюк В. В.* Характеризація множин точок розриву нарізно неперервних функцій багатьох змінних на добутках метризовних просторів // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 6. – С. 740–747.
2. *Маслюченко О. В.* Множина точок розриву l-неперервних функцій першого класу // Наук. вісн. Чернівецьк. ун-ту. Математика. – 2008. – Вип. 374. – С. 96–98.
3. *Маслюченко В. К., Нестеренко В. В.* Сукупна неперервність та квазінеперервність горизонтально квазінеперервних функцій // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 12. – С. 1711–1714.

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича

Надійшло до редакції 07.06.2011

Т. О. Банах, О. В. Маслюченко

Фрактальная размерность и линейно непрерывные функции

С использованием фрактальной размерности построено такое замкнутое множество $F \subseteq \mathbb{R}^2$, которое не может быть множеством точек разрыва линейно непрерывной функции $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, но каждая его аффинная проекция нигде не плотна. Также доказано, что каждая сферическая проекция множества точек разрыва линейно непрерывной функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ есть множеством первой категории.

T. O. Banakh, O. V. Maslyuchenko

The fractal dimension and linearly continuous functions

Using the fractal dimension, we construct a closed set $F \subseteq \mathbb{R}^2$ which is not the discontinuity point set of a linearly continuous function $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, but any affine projection of F is nowhere dense. We also prove that any spherical projection of the discontinuous point set of any linearly continuous function $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is meager.