

Э.Н. Михайлова, Н.Б. Шапиро

*Морской гидрофизический институт НАН Украины, г. Севастополь*

### **ТРЕХМЕРНАЯ НЕГИДРОСТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СУБМАРИННОЙ РАЗГРУЗКИ В ПЕРИОД НАГОНА**

В рамках трехмерной негидростатической модели рассматривается задача о формировании промежуточного слоя пониженной солености вследствие действия подводного источника пресной воды на берегу (субмаринная разгрузка).

Отклонение от гидростатики, как и в других негидростатических трехмерных моделях, учитывается с помощью метода расщепления. Подробно описываются алгоритм метода и способы расчета трехмерного уравнения Пуассона для негидростатической части давления, которое получается на определенном этапе расщепления. Численные эксперименты, проведенные в рамках негидростатической и гидростатической версий модели, показывают, что отклонение от гидростатики приводит к количественным изменениям характеристик промежуточного слоя пониженной солености, при этом агидростатическая добавка давления заметно проявляется только в сравнительно небольшой, примерно в 3-метровой, зоне около источника пресной воды.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** *субмаринная разгрузка, негидростатическая трехмерная модель, численный эксперимент.*

**Введение.** Настоящая работа посвящена исследованию в рамках трехмерной негидростатической модели субмаринной разгрузки пресных вод в районе мыса Айя на южном берегу Крыма, наблюдаемой во время экспедиции в сентябре 2011 г., когда при нагоне температура практически имела двухслойную структуру: в верхнем 8-ом слое равнялась 22 °С, а глубже до дна – 9 °С.

Особенностью субмаринной разгрузки в это время являлось существование четко выраженного промежуточного слоя пониженной солености около скачка температуры, который наблюдался в открытой части моря вблизи и на удалении (до 60 м) от берега, причем на достаточно большом протяжении (сотни метров) параллельно береговой линии.

В рамках двумерной негидростатической модели было показано, что формирование наблюдаемой структуры поля солености может быть связано с наличием источников пресной воды, расположенных вне карстовой полости (глубина ее не превышает 8 м) глубже слоя скачка температуры.

С действием источников пресной воды, расположенных внутри полости, связано образование поверхностного распресненного слоя воды. Моделирование субмаринной разгрузки в карстовой полости проводилось ранее в рамках трехмерной гидростатической модели и негидростатической двумерной модели [1 – 4].

Данная работа посвящена разработке трехмерной негидростатической модели, в рамках которой исследуется субмаринная разгрузка, обусловленная действием глубоководных источников пресной воды, расположенных вне карстовой полости глубже слоя скачка температуры.

© Э.Н. Михайлова, Н.Б. Шапиро, 2012

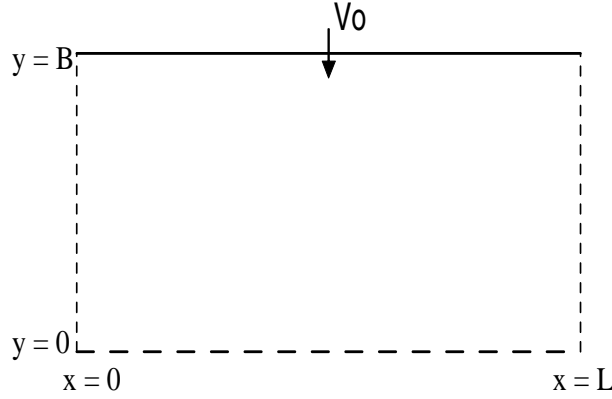


Рис. 1. Форма бассейна. Указано положение источника пресной воды ( $x = L/2$ ).

Как и в предыдущих работах, моделирование будем проводить с использованием приближения «твёрдой крышки» и без учета процедуры «конвективного приспособления», не имеющей, как было установлено ранее, принципиального значения. Для простоты будем рассматривать движение в море, ограниченном прямолинейным берегом без учета рельефа дна (см. рис. 1).

**Постановка задачи.** Исходные уравнения запишем в дивергентной форме

$$\begin{aligned}
 u_t + (u^2)_x + (vu)_y + (wu)_z - fv &= -p_x / \rho_0 + Au_{zz} + A_l \Delta u, \\
 v_t + (uv)_x + (v^2)_y + (wv)_z + fu &= -p_y / \rho_0 + Av_{zz} + A_l \Delta v, \\
 w_t + (uw)_x + (vw)_y + (w^2)_z &= -p_z / \rho_0 + g\rho / \rho_0 + Aw_{zz} + A_l \Delta w,
 \end{aligned} \quad (1)$$

$$u_x + v_y + w_z = 0, \quad (2)$$

$$T_t + (uT)_x + (vT)_y + (wT)_z = \kappa T_{zz} + \kappa_l \Delta T,$$

$$S_t + (uS)_x + (vS)_y + (wS)_z = \kappa S_{zz} + \kappa_l \Delta S, \quad (3)$$

$$\rho = \rho(T, S), \quad (4)$$

где  $u, v, w$  – компоненты скорости течения, направленные вдоль осей  $x, y, z$  соответственно;  $p$  – давление;  $\rho$  – плотность,  $\rho_0 = \text{const}$  – средняя плотность морской воды;  $T$  – температура,  $S$  – солёность;  $f$  – параметр Кориолиса;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $A, A_l, \kappa, \kappa_l$  – коэффициенты вертикального и горизонтального обмена. Здесь  $x, y$  – горизонтальные координаты,  $z$  – вертикальная координата, направленная вниз,  $t$  – время. Индексы внизу означают дифференцирование.

Следуя работам [5 – 15], посвященных разработке и использованию негидростатических океанических моделей, представим давление  $p$  в виде суммы гидростатической части  $\Pi$  и агидростатической добавки  $q$

$$p = \rho_0 \Pi - \rho_0 q, \quad (5)$$

так что

$$\begin{aligned}
 \Pi_z &= g\rho / \rho_0, \\
 -p_z / \rho_0 + \Pi_z &= q_z, \\
 -p_x / \rho_0 &= -\Pi_x + q_x, \\
 -p_y / \rho_0 &= -\Pi_y + q_y.
 \end{aligned} \quad (6)$$

Учитывая специфику рассматриваемой задачи, принимаем следующие граничные условия. Используя, как и в работах [1 – 4], приближение «твердой крышки», на невозмущенной поверхности моря задаем касательное напряжение ветра  $(\tau^x, \tau^y)$ , атмосферное давление  $p_a$  и равные нулю потоки массы, тепла и соли, а именно при  $z = 0$  (истинный уровень моря  $z = \zeta$ ),

$$Au_z = -\tau^x, \quad Av_z = -\tau^y, \quad w = 0, \quad p = p_a - g\rho\zeta, \quad T_z = S_z = 0. \quad (7)$$

При этом для определения агидростатической добавки  $q$  полагаем, что при  $z = 0$

$$\Pi = p_a/\rho_0 - g\zeta, \quad q = 0. \quad (7')$$

На дне, при  $z = H = \text{const}$ , принимаем условия прилипания и отсутствия потоков тепла и соли

$$u = v = w = 0, \quad T_z = S_z = 0. \quad (8)$$

На боковых границах (рис. 1), при  $x = 0$  и  $x = L$ , ставятся такие же условия, как и на дне

$$u = v = w = 0, \quad T_x = S_x = 0. \quad (9)$$

На береговой границе, при  $y = B$ , области  $D = \{l_1 \leq x \leq l_2, z_1 \leq z \leq z_2\}$  расположен источник пресной воды, втекающей в море со скоростью  $v_0 < 0$ , температурой  $T_0$  и нулевой соленостью. Условия для скорости течения и для потоков тепла и соли (транспортности) запишем в виде

$$\begin{aligned} \text{если } (x, z) \in D, \quad \text{то } u = w = 0, \quad v = v_0, \\ \text{если } (x, z) \notin D, \quad \text{то } u = w = 0, \quad v = 0, \\ (-\kappa_l T_y + v_0 T) = v_0 T_0, \\ (-\kappa_l S_y + v_0 S) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

На открытой границе, при  $y = 0$ , принимаем условия свободного протекания для скорости течения и транспортности для потоков тепла и соли

$$\begin{aligned} u_y = v_y = w_y = 0, \\ (-\kappa_l T_y + v T) = v^+ T_{fon}^+ + v^- T^-, \\ (-\kappa_l S_y + v S) = v^+ S_{fon}^+ + v^- S^-, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $v^+ = \max(0, v) \geq 0$ ,  $v^- = \min(0, v) \leq 0$ ,  $T_{fon}(z)$ ,  $S_{fon}(z)$  – фоновые распределения температуры и солености, меняющиеся только с глубиной; вода втекает в бассейн с фоновой, а вытекает со своей температурой (соленостью).

В начальный момент времени, при  $t = 0$ , задаем покой и фоновую стратификацию

$$u = v = w = 0, \quad T = T_{fon}, \quad S = S_{fon}. \quad (12)$$

Отметим, что вследствие равенства нулю вертикальной скорости на поверхности моря и на дне интегральное уравнение неразрывности имеет вид

$$U_x + V_y = 0, \quad (13)$$

что позволяет ввести интегральную функцию тока  $\Psi$

$$U = -\Psi_y, \quad V = \Psi_x, \quad (14)$$

где  $U = \int_0^H u dz$ ,  $V = \int_0^H v dz$ , – составляющие полного потока.

**Численная модель.** Конечно-разностная схема, как в [16], основана на бокс-методе с сеткой  $B$ , двухслойной схеме интегрирования по времени, неявной аппроксимации вертикального обмена теплом, солью, импульсом и ускорения Кориолиса. При этом уравнение для интегральной функции тока, полученное непосредственно из разностных уравнений движения и неразрывности, решается методом верхней релаксации.

Адвективные члены в уравнениях аппроксимируются направленными разностями с первым порядком точности (со схемной диффузией), чтобы обеспечить устойчивость, положительную определенность численной схемы и выполнение принципа максимума (температура и соленость не должны быть меньше минимальных и больше максимальных фоновых значений).

Все цитируемые трехмерные негидростатические модели базируются на уже существующих гидростатических моделях. Для определения агидростатической добавки давления  $q$  используется метод расщепления по физическим процессам. В данной работе по существу используется версия метода расщепления, описанная в работах Ю.В. Канарской и В.С. Мадерича [12 – 14].

Схематично алгоритм метода расщепления можно описать следующим образом. Пусть в  $n$ -ый момент времени ( $t = n \Delta t$ ) нам известны распределения всех полей, а именно  $u^n, v^n, w^n, T^n, S^n, \rho^n, q^n, \zeta^n, \Psi^n$ . Для получения решения на следующем  $(n + 1)$  шаге расчет разбивается на два этапа.

На **первом этапе** расщепления рассчитываются температура  $T^{n+1}$ , соленость  $S^{n+1}$ , плотность  $\rho^{n+1}$  и интегральная функция тока  $\Psi^{n+1}$  (следовательно, и наклоны уровня  $\zeta_x^{n+1}, \zeta_y^{n+1}$ ). На этом этапе используется ранее применяемый алгоритм в базовой гидростатической модели [16], когда градиенты давления берутся за  $(n + 1)$  момент и реализуется вариант экономичной явной схемы, обладающей дополнительной устойчивостью по времени. Уравнение для интегральной функции тока выводится непосредственно из конечно-разностных уравнений движения и уравнения неразрывности. Для этого вводятся промежуточные выражения для горизонтальных

компонент скорости течения  $\tilde{u}^{n+1}$ ,  $\tilde{v}^{n+1}$ , в которых учитывается ( $\alpha=1$ ) агидростатическая добавка  $q^n$

$$\begin{aligned}
& \frac{\tilde{u}^{n+1} - u^n}{\Delta t} + (u^n u^n)_x + (v^n u^n)_y + (w^n \tilde{u}^{n+1})_z - f \tilde{v}^{n+1} = \\
& = g \zeta_x^{n+1} + \alpha q_x^n - g \int_0^z \rho_x^{n+1} dz + A \tilde{u}_{zz}^{n+1} + A_l \Delta u^n, \\
& \frac{\tilde{v}^{n+1} - v^n}{\Delta t} + (u^n v^n)_x + (v^n v^n)_y + (w^n \tilde{v}^{n+1})_z + f \tilde{u}^{n+1} = \\
& = g \zeta_y^{n+1} + \alpha q_y^n - g \int_0^z \rho_y^{n+1} dz + A \tilde{v}_{zz}^{n+1} + A_l \Delta v^n.
\end{aligned} \tag{15}$$

В разностном виде по пространству этим уравнениям на каждой вертикали соответствует система линейных трехточечных уравнений, которая решается методом немоной (из-за отсутствия диагонального преобладания) матричной прогонки. В результате для каждой вертикали получаем следующие выражения для горизонтальных компонент скорости течения

$$\begin{aligned}
\tilde{u}^{n+1} &= +N \tau^x + M \tau^y + \Theta \zeta_x^{n+1} + \Lambda \zeta_y^{n+1} + u^* (\alpha=1), \\
\tilde{v}^{n+1} &= -M \tau^x + N \tau^y - \Lambda \zeta_x^{n+1} + \Theta \zeta_y^{n+1} + v^* (\alpha=1).
\end{aligned} \tag{16}$$

Здесь  $N$ ,  $M$ ,  $\Theta$ ,  $\Lambda$  – функции, зависящие от глубины  $z$  (номера горизонта  $k$ ), коэффициента вертикальной вязкости  $A$ , параметра Кориолиса  $f$ , глубины моря  $H$  и известной за предыдущий момент вертикальной скорости  $w^n$ . Слагаемые  $u^*$ ,  $v^*$  зависят от известных за предыдущий момент горизонтальных компонент скорости течения, плотности и агидростатической добавки, поскольку  $\alpha=1$ .

Интегрируя уравнения (16) по глубине, точнее суммируя по  $k$  функции  $N$ ,  $M$ ,  $\Theta$ ,  $\Lambda$ ,  $u^*$ ,  $v^*$ , получаем выражения для полных потоков, которые относим к  $(n+1)$  моменту времени

$$\begin{aligned}
U^{n+1} &= +n \tau^x + m \tau^y + \vartheta \zeta_x^{n+1} + \lambda \zeta_y^{n+1} + U^* = -\Psi_y^{n+1}, \\
V^{n+1} &= -m \tau^x + n \tau^y - \lambda \zeta_x^{n+1} + \vartheta \zeta_y^{n+1} + V^* = +\Psi_x^{n+1},
\end{aligned} \tag{17}$$

откуда, исключая уровень, получаем уравнение для функции тока. Определив функцию тока  $\Psi^{n+1}$ , вычисляем также наклоны уровня  $\zeta_x^{n+1}$ ,  $\zeta_y^{n+1}$ , сами же компоненты скорости  $\tilde{u}^{n+1}$ ,  $\tilde{v}^{n+1}$  не рассчитываются.

На **втором этапе** расщепления производится расчет компонент скорости, который разбивается на два полушага. На первом полушаге, используя вычисленные значения наклонов уровня  $\zeta_x^{n+1}$ ,  $\zeta_y^{n+1}$ , рассчитываются гидростатические компоненты горизонтальной скорости течения  $u^{n+1/2}$ ,  $v^{n+1/2}$ , а также из «третьего» уравнения движения без учета агидростатической добавки  $q_z$  рассчитывается вертикальная компонента скорости  $w^{n+1/2}$ . Горизонтальные компоненты скорости  $u^{n+1/2}$ ,  $v^{n+1/2}$  рассчитываются, как и  $\tilde{u}^{n+1}$ ,  $\tilde{v}^{n+1}$ , из уравнений (15), но при  $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} u^{n+1/2} &= +N \tau^x + M \tau^y + \Theta \zeta_x^{n+1} + \Lambda \zeta_y^{n+1} + u^* (\alpha = 0), \\ v^{n+1/2} &= -M \tau^x + N \tau^y - \Lambda \zeta_x^{n+1} + \Theta \zeta_y^{n+1} + v^* (\alpha = 0). \end{aligned} \quad (18)$$

Вертикальная компонента скорости  $w^{n+1/2}$  рассчитывается с помощью немонотонной прогонки из уравнения

$$\frac{w^{n+1/2} - w^n}{\Delta t} + (u^n w^n)_x + (v^n w^n)_y + (w^n w^{n+1/2})_z = A w_{zz}^{n+1/2} + A_l \Delta w^n. \quad (19)$$

Важно, что при решении уравнений (15), (19) удовлетворяются все граничные условия для скорости течения.

На втором полушаге рассчитываются все три компоненты скорости течения  $u^{n+1}$ ,  $v^{n+1}$ ,  $w^{n+1}$  и агидростатическая добавка  $q^{n+1}$  с учетом уравнения неразрывности. Отметим, что на первом этапе уравнение неразрывности учитывалось только в интегральной форме. Теперь уравнения движения и неразрывности записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{u^{n+1} - u^{n+1/2}}{\Delta t} &= q_x^{n+1}, \\ \frac{v^{n+1} - v^{n+1/2}}{\Delta t} &= q_y^{n+1}, \\ \frac{w^{n+1} - w^{n+1/2}}{\Delta t} &= q_z^{n+1}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$u_x^{n+1} + v_y^{n+1} + w_z^{n+1} = 0. \quad (21)$$

Подставляя выражения  $u^{n+1}$ ,  $v^{n+1}$ ,  $w^{n+1}$  в уравнение неразрывности (21), получаем трехмерное уравнение Пуассона для функции  $q^{n+1}$

$$\Delta q^{n+1} = q_{xx}^{n+1} + q_{yy}^{n+1} + q_{zz}^{n+1} = \Delta t (u_x^{n+1/2} + v_y^{n+1/2} + w_z^{n+1/2}) = F. \quad (22)$$

Граничные условия для этого уравнения, помимо условия  $q^{n+1} = 0$  на поверхности моря, следуют из исходных граничных условий для нормальной к границе скорости течения.

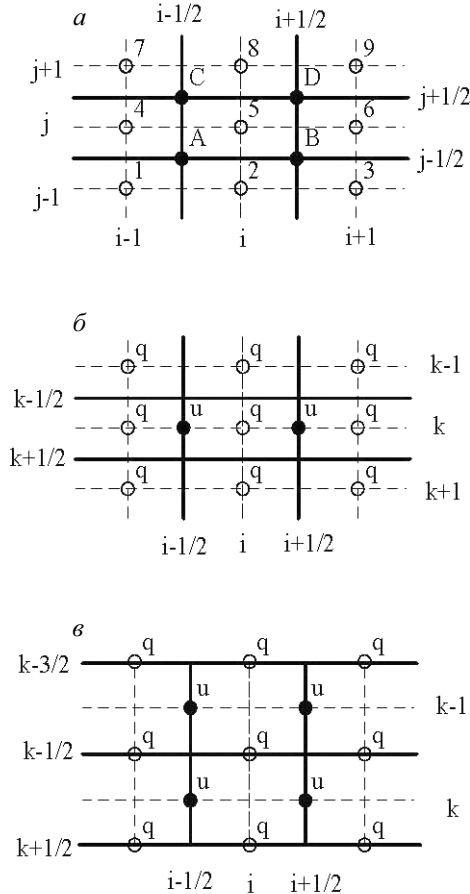


Рис. 2. Сетка B (а), сетка Z1 при использовании 11-точечного шаблона (б) и сетка Z2 при использовании 27-точечного шаблона (в).

и на 27-точечном шаблоне при использовании сетки Z2 с нулевыми граничными условиями для функции  $q$ .

Для решения системы линейных алгебраических уравнений для агидростатической добавки  $q^{n+1}$  в данной работе использовался обобщенный на трехмерный случай метод верхней релаксации и два варианта метода сопряженных градиентов [17 – 19]. Детали вывода системы линейных алгебраических уравнений и граничных условий излагаются в Приложении 1, методы решения этой системы уравнений в Приложении 2.

Система разностных уравнений для функции  $q$  и граничные условия выводятся непосредственно из разностных уравнений (20) и (21), вид которых определяется типом используемой сетки, причем как по горизонтали, так и по вертикали. По горизонтали, как уже отмечалось, используется сетка B (см. рис. 2, а), а по вертикали представляется возможным использовать две Z-координатные сетки Z1 и Z2 (см. рис. 2 б, в). Сетки отличаются положением уровней, на которых рассчитывается функция  $q$ . На сетке Z1 (см. рис. 2, б) функция  $q$  определяется на целых уровнях, где определяются горизонтальные компоненты скорости течения  $u$ ,  $v$ , температура  $T$  и соленость  $S$ . На сетке Z2 (см. рис. 2, в) функция  $q$  определяется на промежуточных (полуцелых) горизонтах, которые являются фактически границами боксов по вертикали (граница верхнего бокса – поверхность моря, а граница нижнего – дно моря).

Фактически получается система линейных алгебраических уравнений на 11-точечном шаблоне при использовании сетки Z1

После расчета  $q^{n+1}$  по формулам (20) рассчитываются компоненты скорости течения  $u^{n+1}$ ,  $v^{n+1}$ ,  $w^{n+1}$ . Чтобы обеспечить интегральный баланс массы, соответствующий рассчитанным на первом этапе компонентам полного потока  $U^{n+1}$ ,  $V^{n+1}$  (17), производится коррекция горизонтальных компонент скорости течения. А именно вводится поправка к баротропной составляющей скорости течения, которая обеспечивает выполнение равенств

$$\sum_{k=1}^N u_k^{n+1} \Delta z = U^{n+1}, \quad \sum_{k=1}^N v_k^{n+1} \Delta z = V^{n+1}. \quad (23)$$

После этого с помощью уравнения неразрывности вычисляется скорректированная вертикальная скорость на внутренних горизонтах. При этом автоматически обращается в нуль вертикальная скорость на дне и во всех боксах выполняется закон сохранения массы.

**Численные эксперименты.** Итак, рассмотрим область открытого моря постоянной глубины  $H$ , ограниченную прямолинейным берегом  $y = B$ , в определенном месте которого  $(x, z) \in D$  находится источник пресной воды. Предполагая, что область имеет большую протяженность вдоль берега, для простоты, положим, что она ограничена твердыми боковыми границами  $x = 0$ ,  $x = L$ , расположенными на достаточно большом расстоянии по обе стороны от источника пресной воды (см. рис. 1). На открытой границе  $y = 0$ , параллельной берегу и также расположенной достаточно далеко от источника, ставится условие свободного протекания. Постановка условий свободного протекания и на боковых границах приводит, к сожалению, к неустойчивости используемой численной схемы, причем как в негидростатической модели, так и при использовании приближения гидростатики.

В данной работе моделируется ситуация, которая имела место во время экспедиции в сентябре 2011 г., когда, по-видимому, имел место нагон, и стратификация имела необычный вид. А именно, в поле температуры наблюдался резкий слой скачка, а соленость выше и ниже скачка температуры была одинаковой. Поэтому в качестве фоновой стратификации принимались двухслойное распределение температуры (от поверхности до 8 м фоновая температура  $T_{fon} = 22^\circ\text{C}$ , а от 8 м до дна  $T_{fon} = 9^\circ\text{C}$ ) и постоянная по глубине фоновая соленость ( $S_{fon} = 17,8\%$ ).

Расчеты проводились в рамках 40-уровневой ( $N = 40$ ) модели на равномерной сетке с шагами  $\Delta x = 2$  м,  $\Delta y = 1$  м по горизонтали и  $\Delta z = 0,5$  м по вертикали. Глубина моря полагалась равной 20 м, размеры области  $L = 200$  м,  $B = 100$  м. Коэффициенты вязкости и диффузии принимались равными  $A_l = 10^3 \text{ см}^2/\text{с}$ ,  $K_l = 10^2 \text{ см}^2/\text{с}$ ,  $A = 10 \text{ см}^2/\text{с}$ ,  $K = 0,1 \text{ см}^2/\text{с}$ . Источник со скоростью истечения  $v_0 = -2,5 \text{ см/с}$  располагался на одной вертикали посередине между боковыми границами в четырех слоях между горизонтами  $z_1 = 10,5$  м,  $z_2 = 12,5$  м, так что расход пресной воды  $Q = 0,01 \text{ м}^3/\text{с}$ . Температура и соленость втекающей воды принимались равными  $T_0 = 15^\circ\text{C}$ ,  $S_0 = 0\%$ .



В начальный момент времени скорости течений полагались равными нулю, температура и соленость принималась фоновой. Расчет (с шагом по времени  $\Delta t = 1,8$  с) проводился на 3 суток, все поля за это время практически выходили на установившийся режим. Выбор такого периода, связан также с тем, нагон вод, который имел место во время экспедиции в сентябре 2011 г., продолжался, по-видимому, не больше нескольких суток.

Для сопоставления методов решения трехмерного уравнения Пуассона для функции  $q$  (верхней релаксации и сопряженных градиентов – двух вариантов), при различных пространственных аппроксимациях по вертикали (сетки  $Z1$  и  $Z2$ ) было проведено шесть вариантов расчета в рамках негидростатической модели. Поскольку результаты расчетов во всех этих вариантах оказались практически одинаковыми, далее в основном будут приводиться результаты численного эксперимента, проведенного в рамках негидростатической модели при расчете агидростатической части давления  $q$  на сетке  $Z2$  методом сопряженных градиентов [17] (далее основной вариант). Также был проведен расчет в приближении гидростатики для анализа влияния эффекта отклонения от гидростатики. Таким образом, было проведено семь численных экспериментов.

Представление о процессе формирования стратификации при субмаринной разгрузке можно получить на рис. 3, где показано поведение солености в слое пониженной солености (на глубинах 15, 17, 19 и 21 м) в середине бассейна ( $x = 100$  м) на расстоянии 5 и 15 м ( $y = 95$  и 85 м) от источника пресной воды. Цифры 1, 2, 3, 4 на линиях соответствуют глубинам 15, 17, 19 и 21 м соответственно. Сплошными линиями показан результат основного варианта негидростатической модели. Штриховые линии – результат, полученный в гидростатической модели. Учитывая, что вне указанного слоя соленость практически не меняется со временем, можно считать, что за 3 суток соленость (как и температура) с достаточной точностью выходит на установившийся режим. На рисунке видно, что отказ от приближения гидростатики приводит в целом к увеличению солености в зоне распресненных вод.

На рис. 4 показано также полученное в основном варианте модели, изменение по времени агидростатической добавки  $q$  ( $\text{см}^2/\text{с}^2$ ) на различных горизонтах на удалении 1 и 5 м ( $y = 99$  и 95 м) от источника пресной воды в середине бассейна ( $x = 100$  м). Цифры 1, 2, 3, ...,  $k$  на линиях соответствуют горизонтам 5, 10, 15 м, ...,  $5 \times k$  м соответственно. Видно, что непосредственно около источника, где эта добавка достигает больших величин и наиболее существенна, она очень быстро, значительно быстрее солености, выходит на установившийся режим.

На рис. 5 показано вертикальное распределение функции  $q$  ( $\text{см}^2/\text{с}^2$ ) в середине бассейна ( $x = 100$  м) на удалении 1, 3 и 5 м ( $y = 99, 97$  и 95 м) от источника пресной воды, полученное в конце расчета ( $t = 72$  ч). Сплошными кривыми показаны результаты, полученные при аппроксимации уравнения Пуассона для функции  $q$  на 11-точечном шаблоне, штриховыми – на 27-точечном. Оба метода решения трехмерного уравнения Пуассона для функции  $q$  (верхней релаксации и сопряженных градиентов) приводят практически к одинаковым результатам. Различия в профилях функции  $q$  связа-

ны только с использованием разных сеток. Сплошными кривыми показаны результаты, полученные при аппроксимации уравнения Пуассона для функции  $q$  на сетке Z1, штриховыми на сетке Z2. Подчеркнем, что метод сопряженных градиентов, как и ожидалось, быстрее сходится, чем метод верхней релаксации. Как видно на рисунке, помимо уже отмеченного уменьшения  $q$  при удалении от источника пресной воды, функция  $q$  имеет разные знаки в области выше и ниже глубины расположения источника.

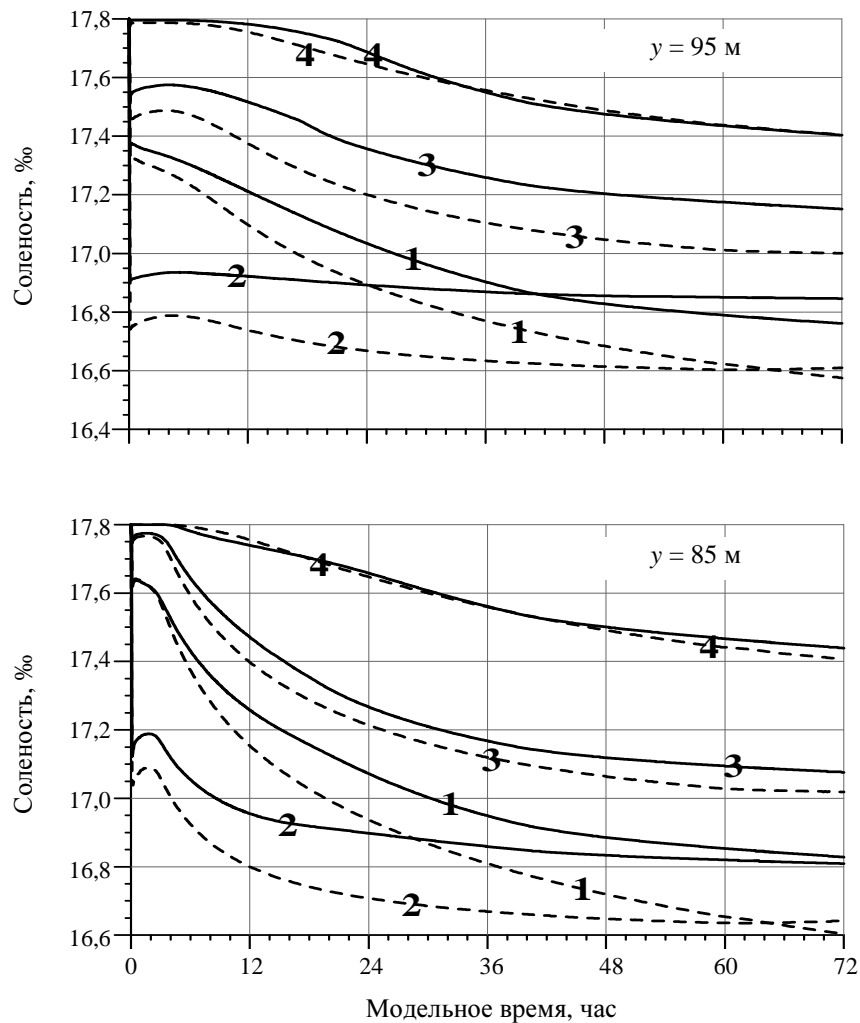


Рис. 3. Графики изменения по времени солёности  $S$  (‰) в промежуточном слое пониженной солёности. Цифры 1, 2, 3, 4 на линиях соответствуют глубинам 15, 17, 19 и 21 м соответственно. Сплошные линии – результат основного варианта негидростатической модели. Штриховые линии – результат, полученный в гидростатической модели.

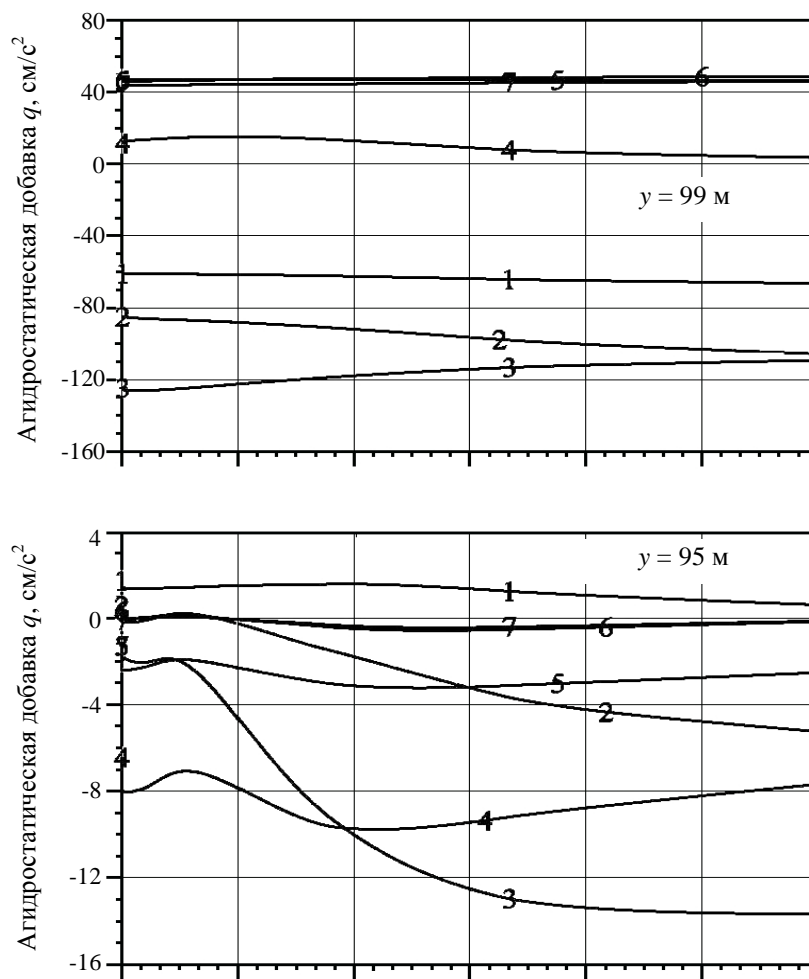


Рис. 4. Графики изменения во времени агидростатической добавки давления  $q$  вблизи источника пресной воды. Цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 маркированы линии, соответствующие глубинам 5, 10, 15, 20, 25, 30 и 35 м .

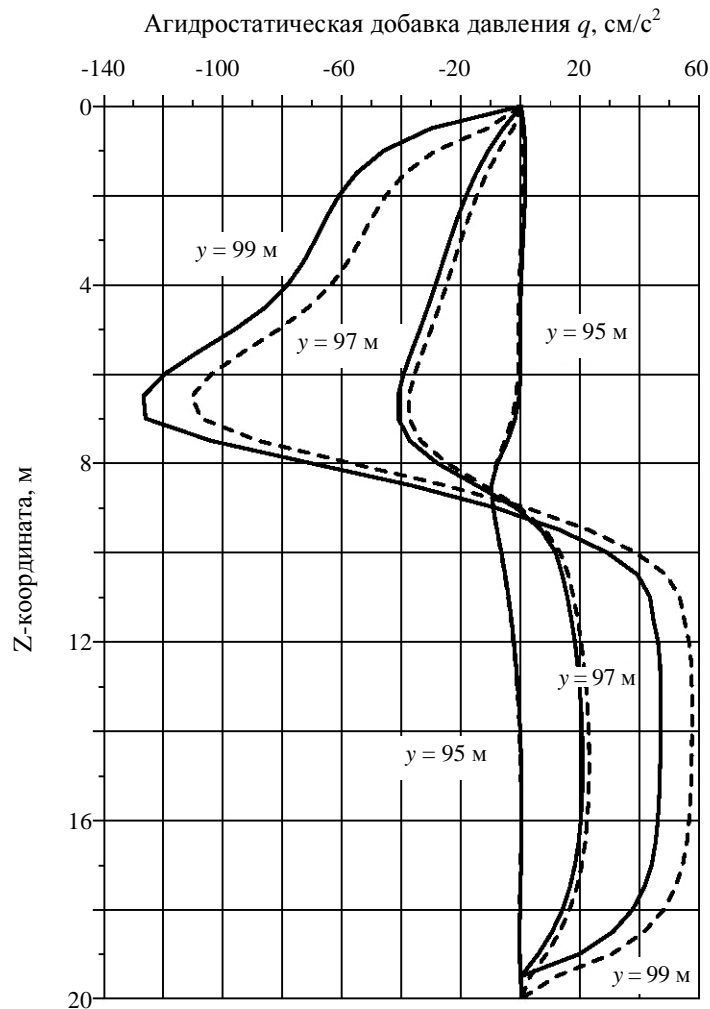


Рис. 5. Вертикальные профили агидростатической добавки давления  $q$ , полученные на разных пространственных шаблонах: сплошная линия – 11-точечный; пунктир – 27-точечный.

На рис. 6 показаны пространственные распределения функции  $q$  на горизонтах 7 и 14 м в окрестности источника, полученные к концу расчета ( $t = 72$  ч). Штриховыми кривыми указаны изолинии  $q = 0$ . Вне этой окрестности  $q$  практически равняется нулю. Таким образом, негидростатическая часть давления  $q$  проявляется только в непосредственной близости от источника, примерно в 3-х метровой зоне.

На рис. 7 для момента времени  $t = 72$  ч приведены вертикальные профили температуры  $T^\circ\text{C}$ , солёности  $S\%$ , условной плотности  $R$ . На рис. 8 – вертикальные профили агидростатической добавки давления  $q$  ( $\text{см}^2/\text{с}^2$ ) и компонент скорости течения  $v, w$  ( $\text{см}/\text{с}$ ). Графики относятся к точке, расположенной в середине бассейна на расстоянии 5 м ( $x = 100$  м,  $y = 95$  м) от источника пресной воды.

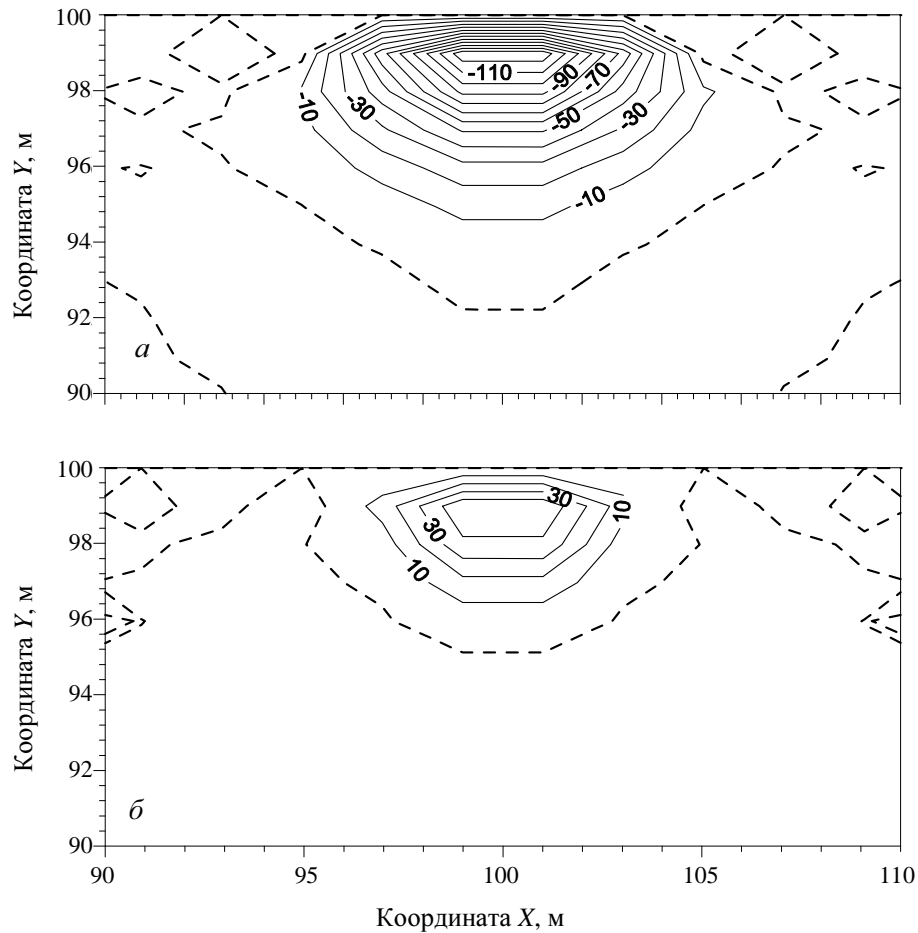


Рис. 6. Распределения функции  $q$  ( $\text{cm}^2/\text{c}^2$ ) вблизи источника пресной воды:  $a$  – координата  $Z = 7$  м;  $b$  – координата  $Z = 14$  м.

Сплошными линиями на рис. 7 и рис. 8 показаны результаты, полученные в основном варианте негидростатической модели, штриховыми – в гидростатической модели. Видно, что наиболее сильно отказ от приближения гидростатики проявляется в солёности, солёность в слое пониженной солёности меньше, чем в гидростатической модели примерно на 0,25%. Следует отметить также довольно существенное изменение профиля вертикальной скорости течения.

На рис. 9 показаны распределения полей солёности, температуры, всех трех компонент скорости течения на нормальном к берегу разрезе, проведенном через середину бассейна (при  $x = L/2$ ), полученные в расчете с помощью гидростатической (слева) и основного варианта негидростатической (справа) моделей. Солёность, температура и горизонтальные компоненты скорости течения показаны в 30-метровой зоне около источника.

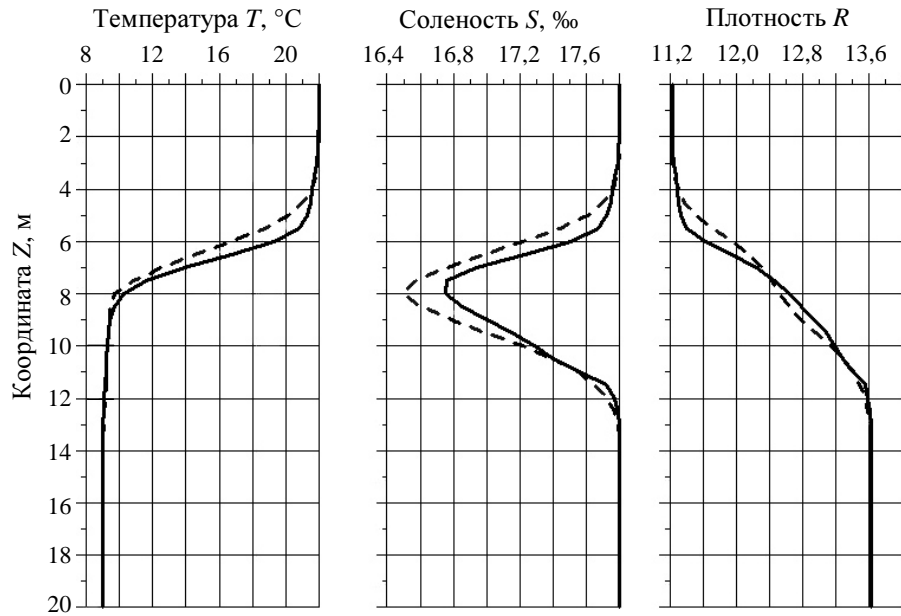


Рис. 7. Вертикальные профили температуры  $T$ , солёности  $S$  плотности  $R$  (в условных единицах).

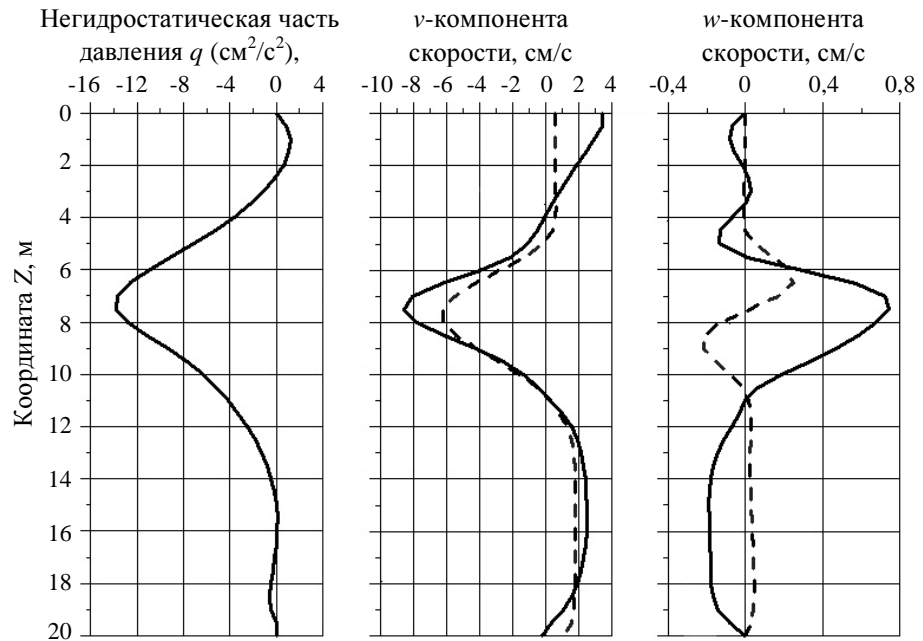


Рис. 8. Вертикальные профили негидростатической части давления  $q$  и  $v$ - и  $w$ -компонент скорости течения.

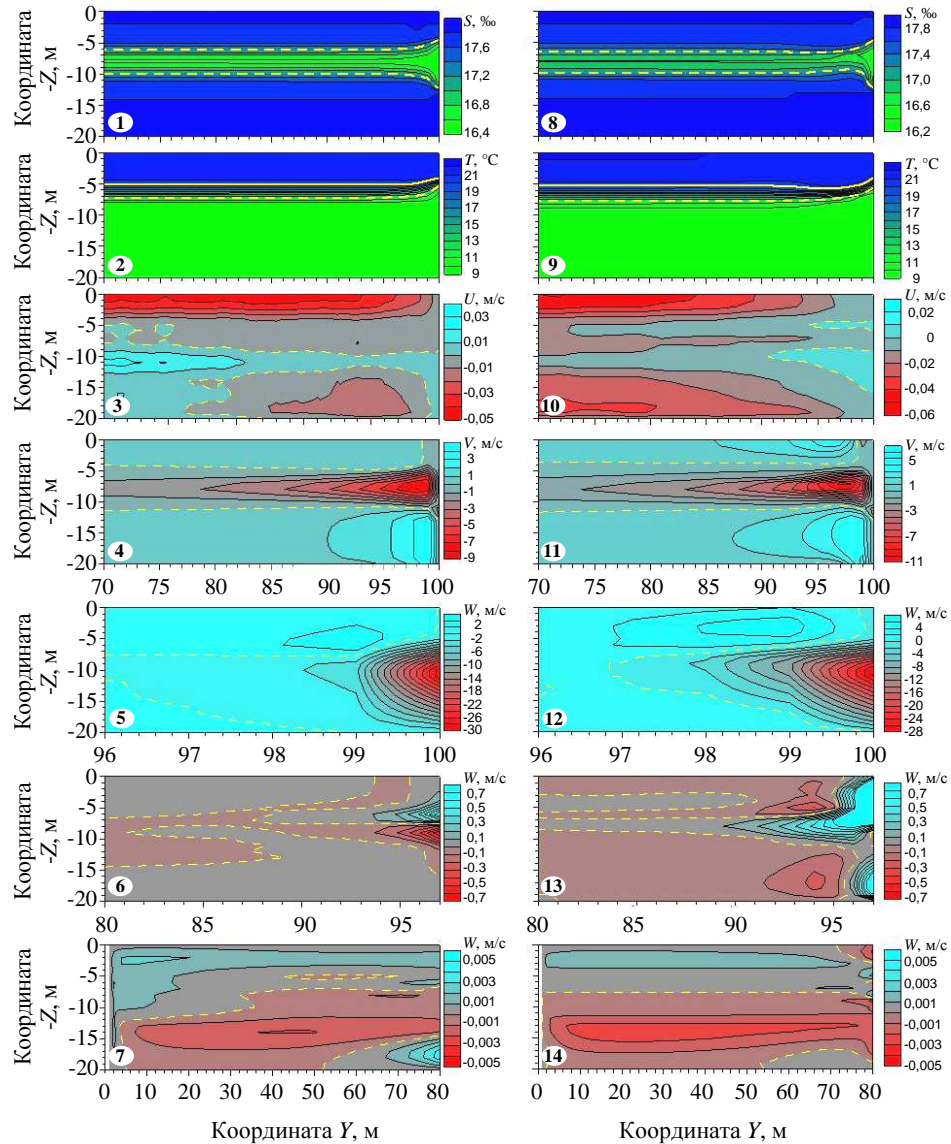


Рис. 9. Распределения солёности  $S$  (‰), температуры  $T$  ( $^{\circ}\text{C}$ ), компонент скорости течения  $u$ ,  $v$ ,  $w$  (см/с) на нормальном к берегу разрезе, проходящем через середину бассейна ( $X = 0$ ): 1, 2, ... 7 – с учетом гидростатики; 8, 9, ... 14 – без учета гидростатики.

Вертикальная скорость показана по отдельности вблизи и вдали от источника. Штриховыми желтыми линиями указаны изолинии  $S = 17,2$  ‰,  $T = 12$   $^{\circ}\text{C}$ ,  $u = v = w = 0$ . Сплошными желтыми линиями указаны изолинии  $T = 20$   $^{\circ}\text{C}$ . Видно, что на качественном уровне обе модели дают достаточно близкие результаты. На количественном уровне можно отметить более резкий халоклин в негидростатической модели, заметно также усиление «продольной»  $v$  и вертикальной  $w$  компонент скорости течения вблизи источника пресной во-

ды. «Поперечная» компонента скорости  $u$  на данном разрезе мала, что указывает на слабое влияние вращения Земли на рассматриваемый процесс.

На рис. 10. приведены распределения солёности  $S$  (‰), температуры  $T$  (°C), компонент скорости течения  $u, v, w$  (см/с) на «поперечном» разрезе, проходящем на расстоянии 5 м от источника ( $y = 95$  м). Штриховыми желтыми линиями указаны изолинии  $S = 17,2$ ‰,  $T = 12$ °C,  $u = v = w = 0$ . Сплошными желтыми линиями указаны изолинии  $T = 20$ °C. Слева – результаты гидростатической модели, справа – негидростатической. Достаточно заметно проявляется влияние отклонения от гидростатики в поле солёности. Так, линза пониженной солёности в гидростатической модели получается более широкой и более вытянутой. Усиливается струйный характер течений, которые концентрируются у середины бассейна на глубине слоя скачка температуры.

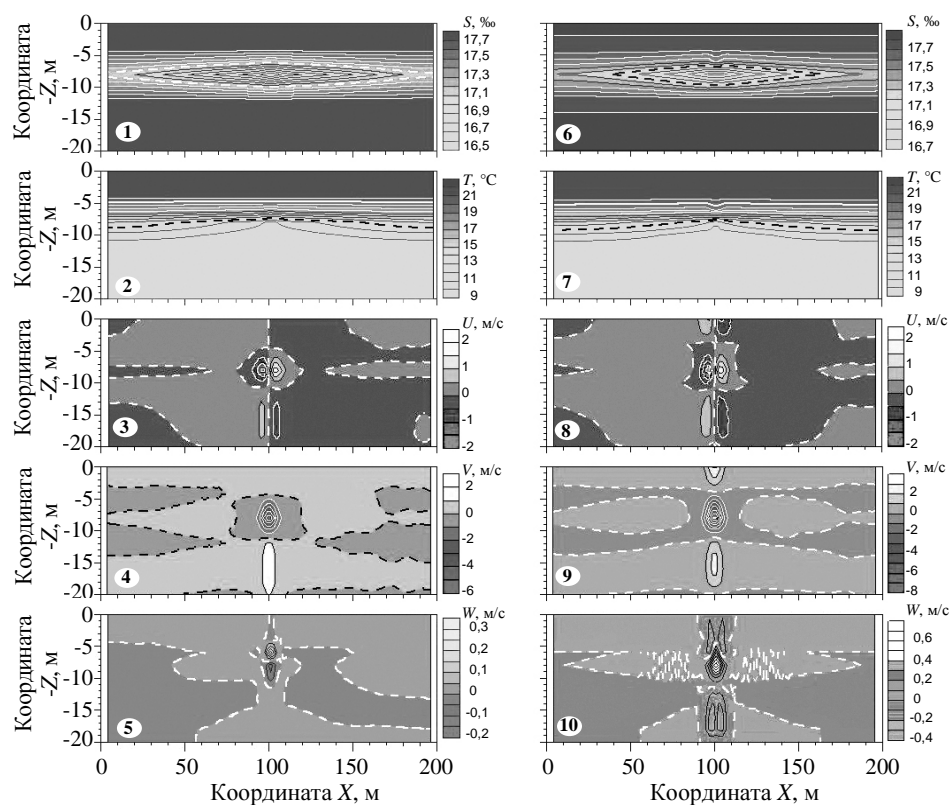


Рис. 10. Распределения солёности, температуры, компонент скорости течения  $u, v, w$  на параллельном берегу разрезе ( $Y = 95$  м): 1 – 5 – с учетом гидростатики; 6 – 10 – без учета гидростатики.

Особенности горизонтального распределения солёности и температуры показаны на рис. 11 и рис. 12, на которых приведены соответствующие поля на глубине 8,5 м во всей области (см. рис. 11, *a, в* и рис. 12, *a, в*) слева и с детализацией в окрестности источника пресной воды (см. рис. 11, *б, г* и рис. 12, *б, г*). Этот горизонт выбран потому, что он находится в промежуточном слое пониженной солёности, который в свою очередь располагается в окрестности скачка температуры.



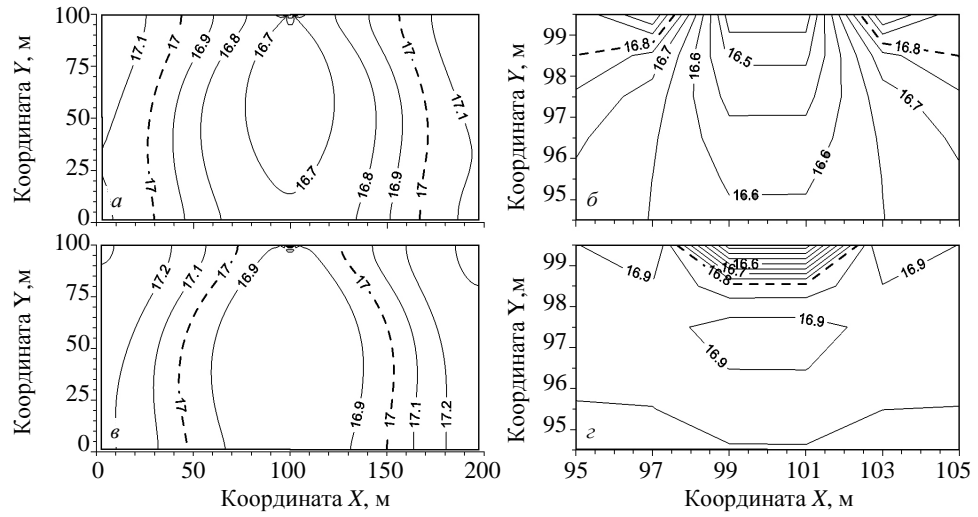


Рис. 11. Распределения солёности  $S$  (‰), полученные в гидростатической (а, б) и негидростатической (в, г) моделях ( $z = 8,5$  м).

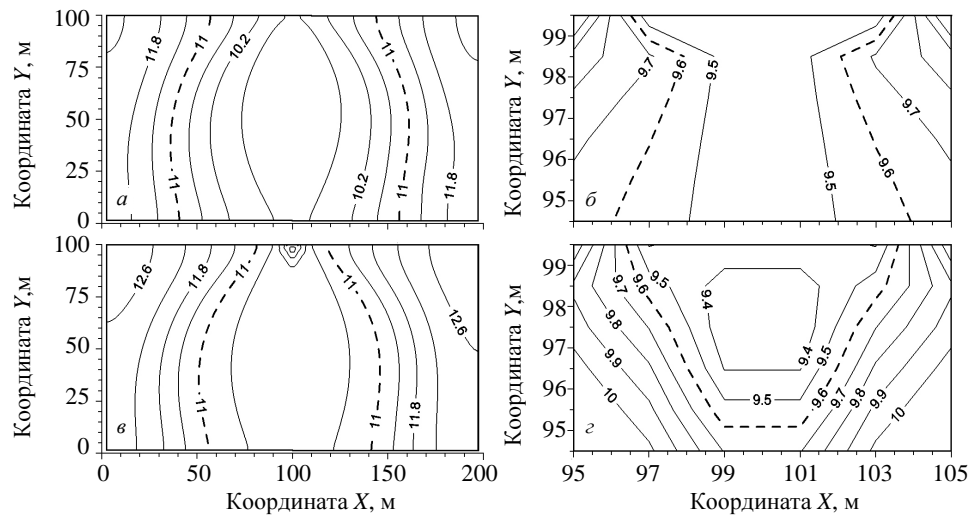


Рис. 12. Распределения температуры  $T$  (°C), полученные в гидростатической (а, б) и негидростатической (в, г) моделях ( $z = 8,5$  м).

Штриховыми линиями на рис. 11 и рис. 12 указаны изолинии  $S = 17\text{‰}$  и  $T = 11\text{°C}$  на распределениях во всей области и изолинии  $S = 16,8\text{‰}$  и  $T = 9,6\text{°C}$  в окрестности источника. Видно, что эффект субмариной разгрузки, в самом деле, более ярко проявляется в поле солености в гидростатической модели.

На рис. 13 приведены распределения интегральной функции тока  $\psi$  в  $\text{м}^3/\text{с}$  (см. рис. 13, *а*, *б*) и векторы средней по глубине скорости течений в  $\text{см}/\text{с}$  (см. рис. 13, *в*, *г*), рассчитанные в гидростатической (см. рис. 13, *а*, *в*) и негидростатической (см. рис. 13, *б*, *г*) моделях. Штриховыми линиями указаны нулевые изолинии функции тока. Над рис. 13, *в* и рис. 13, *г* приведены максимальные значения скорости течения. В обеих моделях структура циркуляции одинаковая, хотя в негидростатической модели циркуляция немного интенсивнее. Так, вытекающая из источника вода вызывает появление струи в середине бассейна, которая, вытекая из бассейна через открытую границу, затягивает по обе стороны от нее воду из открытой части моря, приводя к появлению двух круговоротов. Несимметричный относительно середины бассейна характер циркуляции связан, очевидно, с влиянием силы Кориолиса.

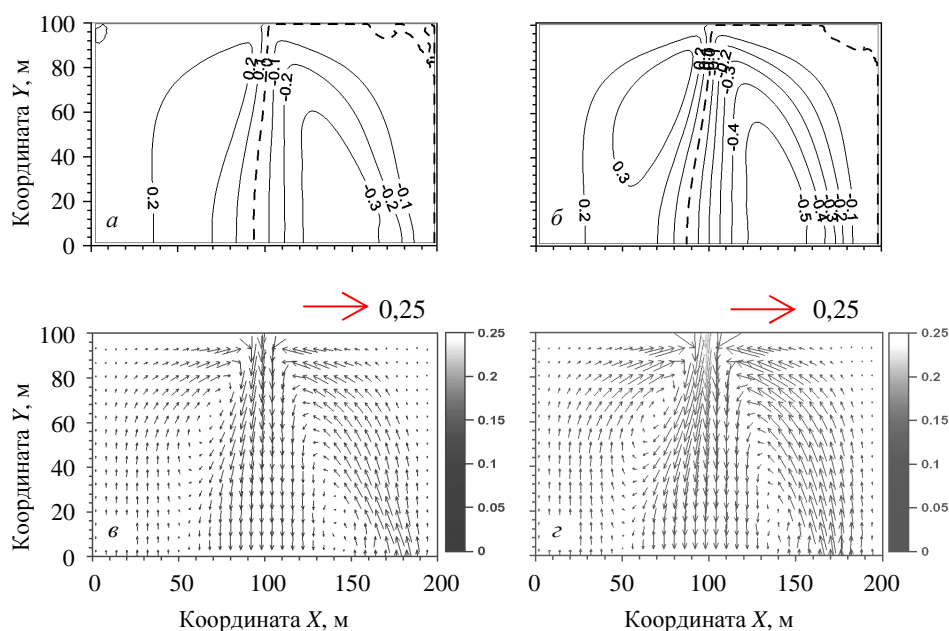


Рис. 13. Интегральная функция тока  $\psi$  ( $\text{м}^3/\text{с}$ ) (*а*, *б*) и векторы средней по глубине скорости течения (*в*, *г*), рассчитанные с учетом (*а*, *в*) и без учета (*б*, *г*) гидростатики.

На рис. 14 приведены распределения горизонтальной скорости течения на различных горизонтах, рассчитанные в негидростатической модели. Эти распределения практически не отличаются от соответствующих распределений, рассчитанных в гидростатической модели, которые здесь не показаны. Видно, что на всех глубинах течения в основном сосредоточены у сере-

дины бассейна, вытекая или, наоборот, втекая в бассейн. Заметим, что вода вытекает из источника со скоростью 2,5 см/с, а во внутренней области на глубине термоклина вблизи источника скорость превышает 10 см/с.

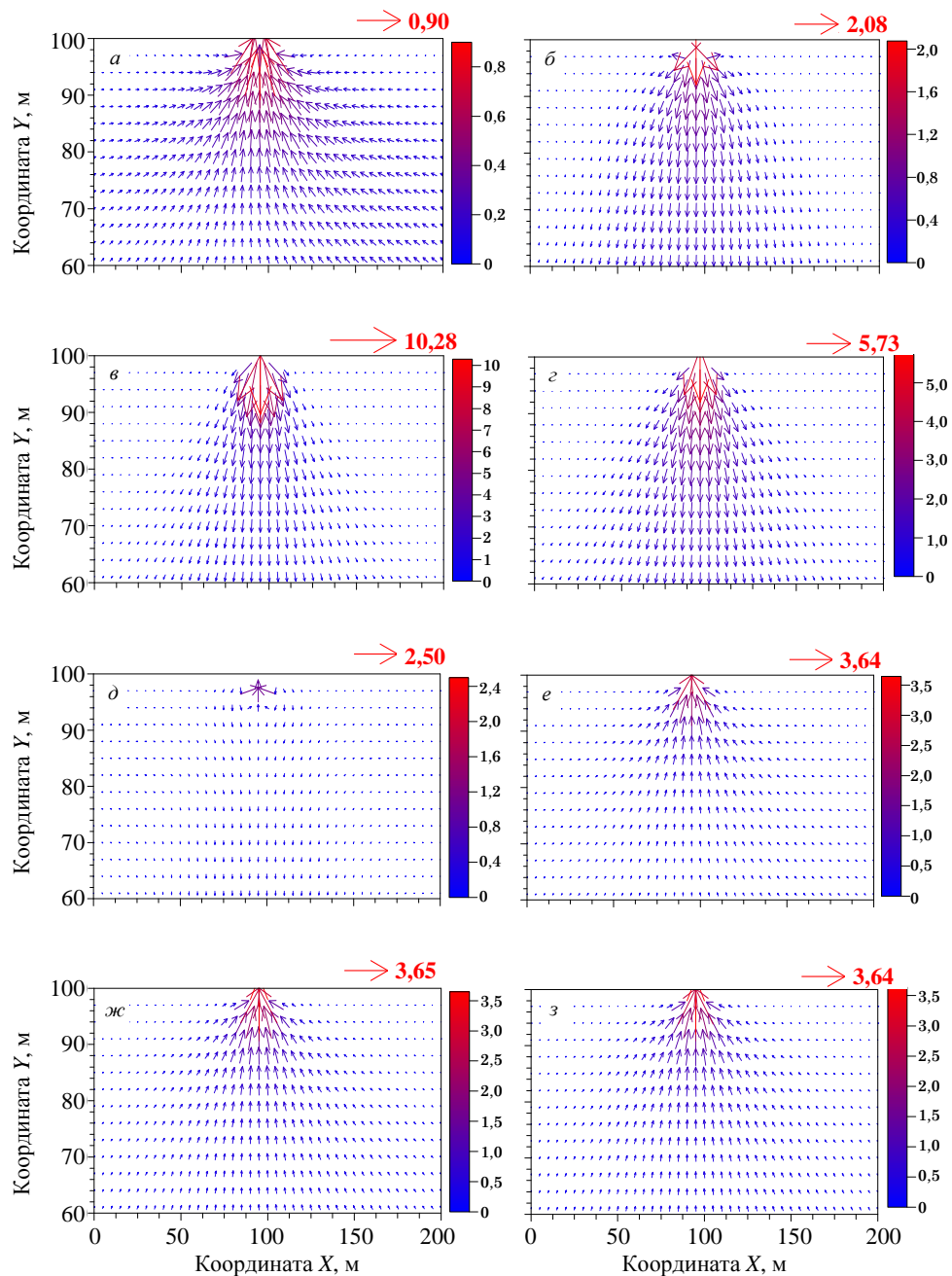


Рис. 14. Векторы скорости течения (в см/с), рассчитанные по основному варианту негидростатической модели на горизонтах: а – 3 м; б – 5 м; в – 7 м; г – 9 м; д – 11 м; е – 13 м; ж – 15 м и з – 17 м. Стрелками и цифрами возле них указаны максимальные значения скорости течения.

Наконец, на рис. 15 показаны распределения вертикальной скорости на горизонтах 5 и 8,5 м, которые дополняют картину вертикальных движений на нормальном к берегу разрезе, приведенную на рис. 8. Штриховыми линиями указаны изолинии  $w = 0$ .

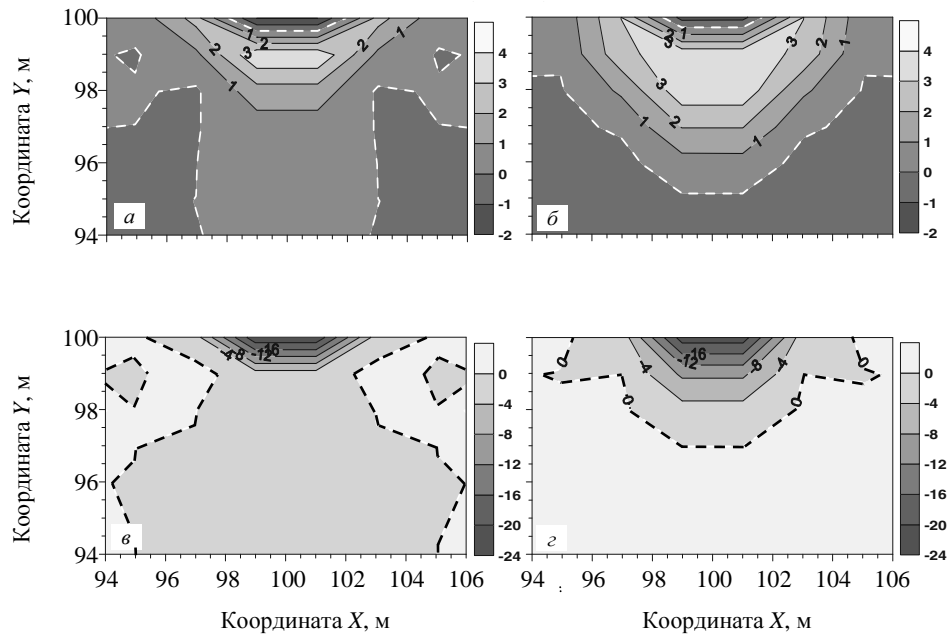


Рис. 15. Распределения вертикальной скорости течения  $w$  (в см/с) в окрестности источника пресной воды на глубинах 5 (а, б) и 8,5 м (в, г) с учетом гидростатики (а, в) и без ее учета (б, г).

Видно, что в термоклине, в данном случае на горизонте 8,5 м, где подъем вод наиболее интенсивен, вертикальные движения при использовании приближения гидростатики получаются чуть более сильными. Отметим, вне показанной на данном рисунке окрестности источника вертикальные скорости малы, порядка  $10^{-3}$  см/с, причем как в гидростатической, так и в негидростатической модели.

**Заключение.** На основе разработанной трехмерной негидростатической модели исследован процесс субмариной разгрузки пресных вод от «точечного» источника в ситуации, когда в прибрежной зоне моря вследствие ветрового нагона образуется резкий слой скачка температуры при однородной по глубине солености. Отклонение от гидростатики, следуя работам [12 – 14], учитывается с помощью метода расщепления. В данной работе, для простоты, рассматривается модель в Z-координатах без учета рельефа дна и в приближении «твердой крышки», обобщение на более сложные модели не вызывает проблем.

Ранее в работах авторов [3, 4] негидростатические эффекты при исследовании субмариной разгрузки (под действием распределенного источника) рассматривалась в рамках двумерной негидростатической модели. Сопос-

тавление результатов численных экспериментов, проведенных в рамках обеих моделей, показывает, что формирование наблюдавшейся трехмерной структуры полей температуры и солености в районе м. Айя в сентябре 2011 г. может быть связано с наличием источников пресной воды, расположенных глубже скачка температуры.

Отклонение от гидростатики не влияет на качественный характер результатов и приводит только к количественным эффектам. Меняется, например, величина скорости течения непосредственно у источника пресной воды и уменьшается (или увеличивается) соленость распресненных вод, как вблизи у источника, так и вдали от него.

Представляется, что такое не очень существенное влияние негидростатических эффектов связано с достаточно большими пространственными масштабами рассматриваемого процесса субмариной разгрузки. Речь идет и о размерах морского бассейна ( $L$ ,  $B$ ,  $H$ ) и величинах шагов сетки ( $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ ).

**УРАВНЕНИЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ  
ДЛЯ НЕГИДРОСТАТИЧЕСКОЙ ЧАСТИ ДАВЛЕНИЯ  $q$**

Уравнение (22) для функции  $q$  получается на последнем этапе расщепления непосредственно из конечно-разностных уравнений движения и неразрывности (20), (21), в которых производные  $q$  аппроксимируются со вторым порядком точности. Для аппроксимации используются сдвинутые сетки: сетку  $B$  по горизонтали,  $Z1$  и  $Z2$  по вертикали (см. рис. 2). Сетки  $Z1$  и  $Z2$  отличаются взаимным расположением узлов, в которых рассчитываются значения негидростатической части давления  $q$  и вертикальной скорости течения  $w$ . Для простоты будем рассматривать равномерные сетки и не учитывать рельеф дна.

На сетке  $B$  (см. рис. 2, *a*) обе компоненты горизонтальной скорости течения  $u, v$  определяются в узлах боксов ( $A, B, C, D$ ), а температура  $T$  и соленость  $S$  в центрах боксов (1, 2, ... 9). Далее центры боксов и уровни, на которых определяются горизонтальные компоненты скорости течения, нумеруются целочисленными индексами, а узлы боксов и горизонты (границы слоев) дробными. Вертикальная компонента скорости течения  $w$  и негидростатическая часть давления  $q$  определяются в центрах граней боксов, в зависимости от вида сетки по вертикали. На сетке  $Z1$  (см. рис. 2, *b*) функция  $q$  определяется посередине между горизонтами, где (как в гидростатической модели) определяются горизонтальные компоненты скорости течения, температура и соленость. Вертикальная скорость, рассчитываемая из уравнения (19), определяется непосредственно на горизонтах (далее  $W$ ). На сетке  $Z2$  (см. рис. 2, *в*), наоборот,  $q$  определяется на горизонтах, а вертикальная скорость (далее  $w$ ) на уровнях, где рассчитываются горизонтальные компоненты скорости течения.

На сетке  $Z1$  уравнение неразрывности (21) расписывается в пространственном боксе, верхняя и нижняя грань которого расположена на горизонтах, где определяется вертикальная скорость  $W$ . Тогда для точки с индексом  $(i, j, k)$

$$\{[(u_B + u_D - u_A - u_C)_k / \Delta x + (v_C + v_D - v_A - v_B)_k / \Delta y] / 2 + (W_{k+1/2} - W_{k-1/2})_{i,j} / \Delta z\}^{n+1} = 0 \quad (\text{П1.1})$$

и с учетом того, что

$$\begin{aligned} (q_x)_D &= (q_x)_{i+1/2, j+1/2, k} = (q_6 + q_9 - q_5 - q_8) / (2 \Delta x), \\ (q_y)_D &= (q_y)_{i+1/2, j+1/2, k} = (q_8 + q_9 - q_5 - q_6) / (2 \Delta y), \\ (q_z)_{i,j,k+1/2} &= (q_{k+1} - q_k) / \Delta z, \end{aligned} \quad (\text{П1.2})$$

уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} & a_5^{-1} q_{5,k+1} + \\ & + a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_3 q_3 + a_4 q_4 + a_5 q_5 + a_6 q_6 + a_7 q_7 + \\ & + a_8 q_8 + a_9 q_9 + a_5^1 q_{5,k+1} + a_{10} = 0, \end{aligned} \quad (\text{П1.3})$$

где

$$\begin{aligned}
a_1 = a_3 = a_7 = a_9 &= (1/\Delta x^2 + \Delta y^2)/4; \\
a_2 = a_8 = -a_4 = -a_6 &= (-1/\Delta x^2 + \Delta y^2)/4; \\
a_5^{-1} = a_5^1 &= 1/\Delta z^2; a_5 = -(4a_1 + 2a_5^{-1}); \\
a_{10} &= \{[(u_B + u_D - u_A - u_C)_k/\Delta x + (v_C + v_D - v_A - v_B)_k/\Delta y]/2 + (W_{k+1/2} - \\
&\quad - W_{k-1/2})_{i,j}/\Delta z\}^{n+1/2} \Delta t.
\end{aligned}$$

На сетке Z2 уравнение неразрывности расписывается в боксе, верхняя и нижняя грань которого расположены на уровнях, на которых определяется вертикальная скорость  $w$ . Тогда, учитывая горизонтальную скорость течения на  $(k-1)$  и  $k$ -м горизонтах, для точки с индексом  $(i, j, k-1/2)$  получим систему уравнений на 27-точечном шаблоне

$$\sum_{m=1}^9 \sum_{k=-1}^1 (a_m q_m)_k^k + a_{10} = 0, \quad (\text{П1.4})$$

где верхний индекс относится к коэффициентам  $a_m$ , а нижний к функции  $q_m$ . Здесь:

$$\begin{aligned}
(a_1 = a_3 = a_7 = a_9)^{k-1} &= (a_1 = a_3 = a_7 = a_9)^k = \\
&= (a_1 = a_3 = a_7 = a_9)^{k+1} = (1/\Delta x^2 + \Delta y^2)/16;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(a_2 = a_8 = -a_4 = -a_6)^{k-1} &= (a_2 = a_8 = -a_4 = -a_6)^k = \\
&= (a_2 = a_8 = -a_4 = -a_6)^{k+1} = (-1/\Delta x^2 + \Delta y^2)/8;
\end{aligned}$$

$$a_5^{k-1} = a_5^{k+1} = -(4 a_1^k - 1/\Delta z^2);$$

$$a_5^k = -(8 a_1^k + 2/\Delta z^2);$$

$$\begin{aligned}
a_{10} &= \{[(u_B + u_D - u_A - u_C)_k/\Delta x + (v_C + v_D - v_A - v_B)_k/\Delta y + \\
&\quad + (u_B + u_D - u_A - u_C)_{k-1}/\Delta x + (v_C + v_D - v_A - v_B)_{k-1}/\Delta y]/4 + \\
&\quad + (w_k - w_{k-1})_{i,j}/\Delta z\}^{n+1/2}.
\end{aligned}$$

Граничные условия для полученных уравнений, вообще говоря, вытекают из условий для исходной системы уравнений. Проблема состоит в том, что метод расщепления приводит на последнем этапе к системе уравнений, тип которых отличается от типа исходных. С определенной мерой условности можно сказать, что приходим к системе уравнений Эйлера для идеальной жидкости при исходной системе уравнений Навье-Стокса для вязкой жидкости, когда в отличие от условий прилипания на твердых границах в

вязкой жидкости достаточно поставить условие непротекания (равенства нулю только нормальной компоненты скорости).

Напомним, что на втором этапе метода расщепления до расчета функции  $q$  учитываются все граничные условия для скорости течения. Тогда на боковых границах области  $x = 0$ ,  $x = L$ ,  $y = B$ , на поверхности моря  $z = 0$  и на дне  $z = H$  нормальные компоненты скорости течения должны равняться компонентам скорости течения, рассчитанным на первом полушаге ( $u^{n+1} = u^{n+1/2}$ ,  $v^{n+1} = v^{n+1/2}$ ,  $w^{n+1} = w^{n+1/2}$ ). В результате в соответствии с видом уравнений (22) должны равняться нулю нормальные к границам производные функции  $q$ , а именно

$$(q_x)_{x=0} = (q_x)_{x=L} = (q_y)_{y=B} = (q_z)_{z=0} = (q_z)_{z=H} = 0. \quad (\text{П1.5})$$

На открытой границе  $y = 0$  в силу условия «свободного протекания» логично потребовать, чтобы выполнялось условие  $v_y = v_y^{n+1/2} = 0$  или

$$(q_{yy})_{y=0} = 0. \quad (\text{П1.5'})$$

Остановимся теперь на численной реализации граничных условий, начиная с сетки Z1. На поверхности моря  $z = 0$  ( $k = 1/2$ ) условие  $(q_z)_{z=0} = 0$  можно записать в виде

$$q_{i,j,1} = q_{i,j,-1}.$$

С другой стороны,  $q$ , по определению, равняется нулю непосредственно на поверхности моря, т.е. с использованием линейной интерполяции

$$q_{i,j,1} = -q_{i,j,-1}.$$

В результате получаем, причем для всех  $i, j$ , что

$$q_{i,j,1} = q_{i,j,0} = 0. \quad (\text{П1.6})$$

Рассмотрим теперь боковую границу  $x = 0$  ( $i = 1/2$ ). Условие  $(q_x)_{x=0} = 0$  на сетке  $B$  принимает вид

$$q_{0,j,k} + q_{0,j+1,k} = q_{1,j,k} + q_{1,j+1,k}.$$

Видно, что из-за сетки «В» требуется дополнительное условие, в качестве которого используем условие  $(v)_{x=0} = (v^{n+1/2})_{x=0}$  или  $(q_y)_{x=0} = 0$ . Тогда получим

$$q_{0,j,k} + q_{1,j,k} = q_{0,j+1,k} + q_{1,j+1,k},$$



откуда следуют равенства

$$q_{0,j,k} = q_{1,j+1,k}, \quad q_{0,j+1,k} = q_{1,j,k}.$$

Поскольку эти равенства выполняются для всех  $k$ , то учитывая также условия для вертикальной скорости течения  $(w)_{x=0} = (w^{n+1/2})_{x=0}$  или  $(q_z)_{x=0} = 0$ , т. е.

$$q_{1,j,k} - q_{1,j,k-1} = q_{0,j,k} - q_{0,j,k-1},$$

с учетом условия (П1.6) получим

$$q_{0,j,k} = q_{1,j,k} = 0, \quad (\text{П1.7})$$

причем для всех  $j$  и  $k$ .

Аналогично получаем условия на другой боковой границе  $x = L$  ( $i = I - 1/2$ ), на берегу  $y = B$  ( $j = J - 1/2$ ) и на дне  $z = H$  ( $k = N + 1/2$ ), а именно

$$q_{I,j,k} = q_{I-1,j,k} = 0, \quad (\text{П1.8})$$

$$q_{i,J,k} = q_{i,J-1,k} = 0, \quad (\text{П1.9})$$

$$q_{i,j,N} = q_{i,j,N+1} = 0. \quad (\text{П1.10})$$

Полагая, наконец, что на открытой границе, проходящей по линии  $j = 1$ , помимо условия  $v_y = v_y^{n+1/2} = 0$  выполняются также условия  $u_y = u_y^{n+1/2} = 0$  и  $w_y = w_y^{n+1/2} = 0$ , то с учетом равенства нулю функции  $q$  на боковых границах и на поверхности моря получим

$$q_{i,0,k} = q_{i,1,k} = q_{i,2,k} = 0. \quad (\text{П1.11})$$

На сетке  $Z2$ , на которой функция  $q$  определяется непосредственно на горизонтах и равна нулю на верхнем горизонте, условия на всех боковых границах принимают такой же вид, как и на сетке  $Z1$ . Условия на дне ( $k = N + 1/2$ ), исходя из приведенных выше соображений, принимают, вид

$$q_{i,j,N-1/2} = q_{i,j,N+1/2} = 0. \quad (\text{П1.12})$$

Таким образом, из-за использования сетки  $B$  для обеих сеток  $Z1$  и  $Z2$  фактически для трехмерного уравнения Пуассона получаем задачу Дирихле с нулевыми граничными условиями.

**МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ  
ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИИ  $q$**

Для решения полученных систем линейных уравнений (П1.3) и (П1.4) использовались два метода. Первый, это обобщенный на трехмерный случай итерационный метод верхней релаксации, использующийся для расчета интегральной функции тока. Фактически этим методом ищется выходящее на установившийся режим решение уравнения теплопроводности с фиктивным временем с помощью двухслойной полунеявной схемы интегрирования по времени. Второй, по существу прямой, метод сопряженных градиентов, причем в двух несколько отличающихся версиях [17] и [18, 19].

Алгоритм метода верхней релаксации для системы уравнений (П1.4), и аналогично для системы (П1.3), можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 q_{m,0}^{p+1} = & - \{ a_{10} + \sum_{m=1}^9 a_m^{-1} q_{m,-1}^{p+1} + \\
 & + \sum_{m=1}^4 [ a_m^0 q_{m,0}^{p+1} + a_m^1 q_{m,1}^{p+1} ] + a_7^0 q_{7,0}^{p+1} + a_7^1 q_{7,1}^{p+1} + a_6^0 q_{6,0}^p + \\
 & + \sum_{m=8}^9 a_m^0 q_{m,0}^p + \sum_{m=5}^6 a_m^1 q_{m,1}^p + \sum_{m=8}^9 a_m^1 q_{m,1}^p \} \times \Delta \xi / a_5^0 + \\
 & + (1 - \Delta \xi) q_{m,0}^p.
 \end{aligned}
 \tag{П2.1}$$

Здесь использованы введенные в Приложении 1 обозначения для координат точек, индекс  $m$  относится к точке с координатой  $(i, j, k - 1/2)$ ,  $\Delta \xi$  – параметр релаксации, или шаг по фиктивному времени  $t' = p \Delta \xi$ ,  $p$  – номер шага, целое число. Параметр релаксации  $\Delta \xi$  подбирается эмпирически из соображений устойчивости схемы и ее быстрой сходимости.

Зная  $q_m^p$ , расчет ведется, начиная с верхнего горизонта, выше которого значения  $q$  известны из граничного условия. Двигаясь слева направо по  $i$  (при  $j = 1$ ), учитываются известные на границе или уже рассчитанные значения  $q$ , они берутся за  $(p + 1)$  момент по фиктивному времени. Далее происходит переход на следующий уровень по  $j$ , а затем и на следующий горизонт. Расчет продолжается до тех пор, пока разность между значениями  $q_{i,j,k}^{p+1}$  и  $q_{i,j,k}^p$  не станет достаточно малой. Опыт показал, что процесс сходится достаточно быстро.

Для использования метода сопряженных градиентов систему линейных алгебраических уравнений необходимо переписать в векторно-матричной форме, т.е. воспользоваться так называемым лексикографическим упорядо-

чиванием [17] и перенумеровать внутренние узлы. Тогда неизвестные  $q_{i, j, k}$  объединяются в вектор  $X$  и система уравнений принимает вид

$$AX = b, \quad (\text{П2.2})$$

где  $b$  – вектор, состоящий из правых частей уравнений, а  $A$  – двумерная разреженная матрица, в данном случае симметричная и положительно определенная.

Согласно [17], алгоритм метода сопряженных градиентов формулируется следующим образом.

1. а) Выбрать нулевое приближение  $X^0$ ;
- б) вычислить невязку  $r^0 = b - AX^0$ ;
- в) положить  $p^0 = r^0$  и  $k = 0$ .
2. а) Вычислить число  $\alpha_k = (r^k, p^k)/(p^k, Ap^k)$ ,  
где  $(r^k, p^k)$  - скалярное произведение векторов;
- б) вычислить  $X^{k+1} = X^k + \alpha_k p^k$ ;
- в) вычислить  $r^{k+1} = r^k - \alpha_k Ap^k$ ;
- г) проверить сходимость:  $\|r^{k+1}\| \leq \varepsilon$ ?,  
где  $\|r^{k+1}\|$  – норма вектора  $r^{k+1}$ , например, его длина,  $\varepsilon$  – наперед заданное малое число.

Если неравенство не выполняется, продолжить алгоритм.

3. а) Вычислить число  $\beta_k = (r^{k+1}, Ap^k)/(p^k, Ap^k)$ ;
- б) вычислить  $p^{k+1} = r^{k+1} - \beta_k p^k$ ;
- в) увеличить  $k$  на 1 и вернуться к шагу 2а.

В работах [18, 19] предлагается улучшенная форма метода сопряженных градиентов, которая, по мнению авторов, имеет более простой вид и более устойчива к ошибкам округления. В этом случае вводится два вектора  $p$  и  $q$ .

Далее:

1. Полагаем  $p^0 = 0$ ,  $X^1$  – любое.
2. На последующих итерациях ( $k = 1, 2, \dots$ ) вычисляем невязку  $r^k$   
 $r^k = AX^k - b$  для  $k = 1$ ,  
 $r^k = r^{k-1} - q^{k-1}/(q^{k-1}, p^{k-1})$  для  $k \geq 2$ ,  
и вычисляем вектора  $p^k$  и  $q^k$  и  $X^{k+1}$   
 $p^k = p^{k-1} + r^k/(r^k, r^k)$ ,  
 $q^k = Ap^k$ ,  
 $X^{k+1} = X^k - p^k/(q^k, p^k)$ .

Расчет заканчивается, когда норма невязки становится достаточно малой. Опыт показал, что метод является эффективным и выход решения на установившийся режим требует меньше времени по сравнению с используемым методом верхней релаксации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шати́ро Н.Б.* Моделирование трехмерной структуры гидрологических полей в карстовой полости под действием субмаринной разгрузки подземных вод // Морской гидрофизический журнал. – 2010. – № 1. – С. 46-62.
2. *Шати́ро Н.Б.* Численная модель субмаринной разгрузки пресных вод в карстовой полости // Морской гидрофизический журнал. – 2011. – № 5. – С. 66-84.
3. *Шати́ро Н.Б.* Моделирование трехмерной структуры гидрологических полей в карстовой полости на мысе Айя под действием субмаринной разгрузки // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. – Севастополь.: НПЦ «ЭКОСИ-Гидрофизика». – 2011. – Вып. 25, том 2. – С. 252-274.
4. *Михайлова Э.Н., Шати́ро Н.Б.* Роль гидростатического приближения при моделировании субмаринной разгрузки пресных вод в карстовой полости // Морской гидрофизический журнал. – 2012. – № 3. – С. 44-60.
5. *Mahadevan A., Olinger J., Street R.* A non-hydrostatic mesoscale ocean model. Part 1: Well-posedness and scaling // J. Phys. Oceanogr. – 1996. – Vol. 26. – P. 1868-1880.
6. *Mahadevan A., Olinger J., Street R.* A non-hydrostatic mesoscale ocean model. Part 2: Numerical implementation // J. Phys. Oceanogr. – 1996. – Vol. 26. – P. 1881-1900.
7. *Marshall J., Hill C., Perelman L., Adcroft A.* Hydrostatic, quasi-hydrostatic, and nonhydrostatic ocean modeling // J. Geophys. Res. – 1997. – Vol. 102. – № C3. – P. 5733-5752.
8. *Marshall J., Adcroft A., Hill C., Perelman L., Heisey C.* A finite-volume, incompressible Navier-Stokes model for studies of the ocean on parallel computers // J. Geophys. Res. – 1997. – Vol. 102. – № C3. – P. 5753-5766.
9. *Marshall J., Jones H., Hill C.* Efficient ocean modeling using non-hydrostatic algorithms // J. Mar. Systems. – 1998. – Vol. 18. – P. 115-134.
10. *Casulli V., Stelling G.S.* Numerical simulation of three-dimensional quasi-hydrostatic, free-surface flows // ASCE J. Hydraul. Eng. – 1998. – Vol. 124. – P. 678-686.
11. *Casulli V.S.* A semi-implicit finite difference method for non-hydrostatic, free-surface flows // Int. J. Numer. Meth. Fluids. – 1999. – Vol. 30. – P. 425-440.
12. *Канарская Ю.В., Мадерич В.С.* Численная негидростатическая модель стратифицированных течений со свободной поверхностью // Прикладная гидромеханика. – 2002. – Том 4, № 3. – С. 12-21.
13. *Канарская Ю.В.* Математическая модель негидростатических течений в обобщенных криволинейных координатах // Прикладная гидромеханика. – 2003. – Том 5, № 1. – С. 17-27.
14. *Kanarska Y., Maderich V.* A non-hydrostatic numerical model for calculating free-surface stratified flows // Ocean Dynamics. – 2003. – Vol. 53. – P. 176-185.
15. *Adcroft, A., C. Hill, J.-M. Campin, J. Marshall, and P. Heimbach.* Overview of the formulation and numerics of the MITgcm / Proceedings of the ECMWF seminar series on Numerical Methods, Recent developments in numerical methods for atmosphere and ocean modeling. – 2004. – P. 139-149. Available from: <http://mitgcm.org/pdfs/ECMWF2004-Adcroft.pdf>.
16. *Михайлова Э.Н., Шати́ро Н.Б.* Опыт воспроизведения пространственно-временной изменчивости термохалинных полей в Севастопольской бухте // Морской гидрофизический журнал. – 2008. – № 5. – С. 23-39.
17. *Ортега Дж., Пул У.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. – М.: Наука. (Гл. ред. физ.-мат. лит). – 1986. – 288 с.

18. *Калиткин Н.Н., Южно Л.Ф., Кузьмина Л.В.* Количественный критерий обусловленности систем алгебраических уравнений // Математическое моделирование. – 2011. – Том 23, № 2. – С. 3-26.
19. *Калиткин Н.Н., Кузьмина Л.В.* Улучшенная форма метода сопряженных градиентов // Математическое моделирование. – 2011. – Том 23, № 7. – С. 33-51.

Материал поступил в редакцию 12.11.2012 г.

*АНОТАЦІЯ* В рамках тривимірної негідростатичної моделі розглядається завдання про формування проміжного шару зниженої солоності унаслідок дії підводного джерела прісної води на березі (субмаринне розвантаження).

Відхилення від гідростатики, як і в інших негідростатичних тривимірних моделях, враховується за допомогою методу розщеплювання. Детально описуються алгоритм методу і способи розрахунку тривимірного рівняння Пуассона для негідростатичної частини тиску, який виходить на певному етапі розщеплювання. Чисельні експерименти, проведені в рамках негідростатичної і гідростатичної версій моделі, показують, що відхилення від гідростатики наводить до кількісних змін характеристик проміжного шару зниженої солоності, при цьому агідростатична добавка тиску помітно виявляється лише в порівняно невеликій, приблизно в 3-метровій, зоні біля джерела прісної води.

*ABSTRACT* In framework of a three-dimensional non-hydrostatic model, the problem of the formation of an intermediate layer of low salinity due to the action of the underwater source of fresh water on the shore (submarine discharge) are modeled.

Deviation from hydrostatics, as in other non-hydrostatic three-dimensional models, is accounted for by the splitting method. Details of the algorithm and techniques calculations the three-dimensional Poisson's equation for non-hydrostatic part of the pressure, which is obtained at a certain stage of splitting, are described. Numerical experiments carried out under hydrostatic and non-hydrostatic versions of the model show that the deviation from the hydrostatic lead to quantitative changes in the characteristics of the intermediate layer of low salinity, at that the addition of non-hydrostatic pressure markedly manifested only in a relatively small, about 3 meters, the vicinity near the source of fresh water.