Електронне наукове фахове видання "Ефективна економіка" включено до переліку наукових фахових видань України з питань економіки

Ефективна ЕКОНОМІКА Дніпропетровський державний аграрно-економічний університет

№ 7, 2011 Назад Головна

УДК 338.47

О. В. Стець,
доцент кафедри математичного моделювання економічних систем,
Факультет менеджменту та маркетингу,
Національний технічний університет України «КПІ»

В. В. Стасюк,
студент, факультет менеджменту та маркетингу,
Національний технічний університет України «КПІ»

ДИНАМІЧНА МОДЕЛЬ ЗМІШАНОЇ ДУОПОЛІЇ КОМЕРЦІЙНОЇ ТА НЕКОМЕРЦІЙНОЇ ПЛАТФОРМИ ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ

Анотація. *У статті досліджується рекомендацій виробнику комерційного програмного забезпечення у виборі оптимальної ціни на основі моделі, що враховує монополістичний ринок, ринок дуополії виробника комерційного програмного забезпечення та некомерційного програмного забезпечення, та із врахуванням змінних витрат та тіньового сектору (піратства).*

Summary. *This article studies approaches recommendation of optimal price to commercial software developer with taking into account different scenarios: monopoly market, commercial software developer and noncommercial software developer duopoly and latter one with technical service costs and non-legal use of commercial software.*

Ключові слова*: програмне забезпечення, змішана дуополія, мобільні операційні системи, ціноутворення*

Вступ. Ринок мобільних операційних систем розвивається дуже стрімко. Присутність на ньому некомерційної мобільної операційної системи Android ускладнює комерційному виробнику розробку цінової стратегії.

Актуальність теми дослідження. Ціна на програмне забезпечення формується з врахуванням багатьох чинників: витрат на розробку, рівня конкуренції на ринку, рівня попиту ринку на даний клас продуктів, відповідності характеристик пакету вимогам ринку, досвіду і популярності розробника і продавця на ринку. Тому визначення реальної ціни програмного забезпечення на ринку потребує врахування всіх цих характеристик, причому окремі з цих чинників можна реально оцінити тільки під час маркетингу продукту на ринку.

Враховуючи вартість проведення маркетингового дослідження та його складність, все більш заманливим є метод визначення ціни програмного забезпечення, судячи з моделі ринку програмного забезпечення. Цей метод дешевий і швидкий, дозволяє вибрати оптимальну ціну відповідно до вибраного критерію, проте може бути неточним, якщо модель недостатньо точно та адекватно описує ринок.

Предметом даного дослідження є динаміка ціноутворення на комерційний програмний продукт на ринку мобільних операційних систем.

Об’єктом дослідження є розробка динамічної моделі змішаної дуополії виробників комерційного та некомерційного програмного забезпечення, що дозволяє визначати оптимальну ціну ліцензії на комерційне програмне забезпечення з метою отримання максимального дисконтованого інтегрального доходу.

Метою дослідження є надання рекомендацій виробнику комерційного програмного забезпечення у виборі оптимальної ціни на основі моделі, що враховує монополістичний ринок, ринок дуополії виробника комерційного програмного забезпечення та некомерційного програмного забезпечення, та із врахуванням змінних витрат та тіньового сектору (піратства).

Науковою новизною досліджуваної теми є: розробка і застосування динамічної моделі змішаної дуополії виробників комерційного та некомерційного програмного забезпечення для визначення ціни ліцензії комерційного продукту з оптимізацією інтегрального дисконтованого доходу;

Теоретичне та практичне значення роботи полягає в обґрунтуванні вибору ціни ліцензії комерційного продукту на ринку мобільних операційних систем, де присутні некомерційні продукти.

Монополія єдиного виробника комерційного програмного забезпечення.

Задача оптимального керування ціною ліцензії на комерційний програмний продукт для отримання максимального інтегрального дисконтованого прибутку на монопольному ринку.

Розглянемо спочатку випадок, коли на ринку присутній тільки комерційний продукт Windows Mobile.

Його виробник – Microsoft – прагне так керувати ціною ліцензії $c(t)$, щоб забезпечити собі максимум інтегрального дисконтованого (за неперервною ставкою δ) доходу

$$J = \int_0^{+\infty} aq(t)c(t)e^{-\delta t}dt \to max \qquad (1)$$

за умов

$$\frac{dy}{dt} = aq(t); \qquad (2)$$

$$c(t) = a_W\big(y(t)\big)\big(1 - q(t)\big); \qquad (3)$$

$$c(t) \geq 0.$$

Постановка задачі максимізації доходу (а не прибутку) в даному випадку виправдана, оскільки мова йде про стадію поширення, коли виробник уже поніс постійні витрати з розробки продукту, а змінні витрати з його тиражування близькі до нуля (і включені в ціну ліцензії).

Дослідження моделі. Властивості оптимальної стратегії виробника комерційного програмного забезпечення на монопольному ринку визначаються наступним твердженням.

Твердження 1. Оптимальна стратегія монопольного виробника комерційного програмного забезпечення, що забезпечує необмежений ріст ринку та нескінченний інтегральний дисконтований прибуток, в тривалій перспективі відповідає встановленню ціни ліцензії на рівні половини від потенційної споживчої корисності даного програмного забезпечення; при цьому миттєвий прибуток дорівнює чверті добутку темпу росту ринку на потенційну споживчу цінність продукту.

Доведення. Виразимо із формули (3)

$$q(t) = 1 - \frac{c(t)}{a_W(y(t))} \qquad (4)$$

і підставимо в (1) та (2), тоді задача матиме такий вигляд:

$$J = \int_0^{+\infty} a\left(1 - \frac{c(t)}{a_W(y(t))}\right)c(t)e^{-\delta t}dt \to max$$

за умов

$$\frac{dy}{dt} = a\left(1 - \frac{c(t)}{a_W(y(t))}\right);$$

$$c(t) \geq 0.$$

Складемо гамільтоніан [спряжену змінну позначимо $m(t)e^{-\delta t}$]:

$$H = a\left(1 - \frac{c(t)}{a_W(y(t))}\right)c(t)e^{-\delta t} + m(t)e^{-\delta t}a\left(1 - \frac{c(t)}{a_W(y(t))}\right) =$$

$$= ae^{-\delta t}\left(1 - \frac{c(t)}{a_W(y(t))}\right)\big(c(t) + m(t)\big).$$

Запишемо необхідні умови принципу максимуму Понтрягіна:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \Leftrightarrow c(t) = \frac{a_W(y(t)) - m(t)}{2}; \qquad (5)$$

$$\frac{d(m(t)e^{-\delta t})}{dt} = -\frac{dH}{dy} \Leftrightarrow \frac{dm}{dt} == \delta m(t) - \frac{aa'_W(y(t))c(t)(c(t)+m(t))}{a_W^2(y(t))}; \qquad (6)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = a\left(1 - \frac{c(t)}{a_W(y(t))}\right). \qquad (7)$$

Підставляючи вираз $c(t)$ з (5) в (6) та (7), отримуємо відповідно:

$$\frac{dm}{dt} = \delta m(t) - \frac{aa'_W(y(t))(a_W^2(y(t)) - m^2(t))}{4a_W^2(y(t))};$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a}{2}\left(1 + \frac{m(t)}{a_W(y(t))}\right).$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{t\to+\infty} y^*(t) = +\infty,$$

тому

$$\lim_{t\to+\infty} a_W(y(t)) = \bar{a}_W,$$

тобто, з ростом обсягу продажів функція попиту перестає змінюватися:

$$c = \bar{a}_W(1-q),$$

значить,

$$\lim_{t\to+\infty} c^*(t) = \frac{\bar{a}_W}{2},$$

$$\lim_{t\to+\infty} m^*(t) = +\infty,$$

і з формули (4)

$$\lim_{t\to+\infty} q^*(t) = \frac{1}{2}.$$

Миттєвий прибуток при цьому рівний

$$\pi^* = \lim_{t\to+\infty}(aq^*(t)c^*(t)) = \frac{a\bar{a}_W}{4}.$$

Твердження повністю доведено.

Змішана дуополія виробників комерційного та некомерційного програмного забезпечення.

Задача оптимального керування ціною ліцензії на комерційний програмний продукт для отримання максимального інтегрального дисконтованого прибутку в конкуренції із некомерційним продуктом-замінником.

Перейдемо тепер до основного предмету даної роботи – дослідженню динаміки конкурентної боротьби виробників комерційного та некомерційного програмних продуктів.

Оскільки функції попиту на Windows Mobile та Android задані формулами (7) та (8) відповідно, при цьому Android поширюється безкоштовно, а Windows Mobile в момент t продається за ціною $c(t) \geq 0$, ціна Windows Mobile, за якою користувачу буде байдужий вибір між комерційним та некомерційним продуктами, визначається формулою

$$a_W\big(y(t)\big)\big(1-q(t)\big)-c(t)=a_A\big(y(t)\big)\big(1-q(t)\big).$$

Звідси

$$c(t)=\Big(a_W\big(y(t)\big)-a_A\big(y(t)\big)\Big)\big(1-q(t)\big)$$

або

$$c(t)=\beta\big(y(t)\big)\big(1-q(t)\big),$$

де функція $\beta(y)$ визначена формулою (2.1.6).

Іншими словами, якщо в момент часу t Microsoft встановлює ціну ліцензії на Windows Mobile рівною $c(t)$, то частка

$$q(t)=1-\frac{c(t)}{\beta(y(t))}$$

нових користувачів, які в поточний момент вважають, що різниця між споживчими корисностями Windows Mobile і Android перевищує ціну ліцензії Windows Mobile, купує легальні копії цієї комерційної мобільної операційної системи, а частка, що залишилася

$$1-q(t)=\frac{c(t)}{\beta(y(t))}$$

нових користувачів безкоштовно користуватиметься некомерційним продуктом Android.

$$y(t)=n_W(t)-sn_A(t)=\int_0^t aq(\tau)d\tau-s\int_0^t a\big(1-q(\tau)\big)d\tau=$$

$$=\int_0^t a\Big(q(\tau)-s\big(1-q(\tau)\big)\Big)d\tau=\int_0^t a\big((1+s)q(\tau)-s\big)d\tau.$$

Тепер задача оптимального керування, що стоїть перед Microsoft, приймає такий вигляд: так змінювати ціну ліцензії $c(t)$ у часі, щоб забезпечити собі максимум інтегрального дисконтованого (за неперервною ставкою δ) доходу

$$J=\int_0^{+\infty} aq(t)c(t)e^{-\delta t}dt\to max \tag{7}$$

за умов

$$\frac{dy}{dt}=a\big((1+s)q(t)-s\big); \tag{8}$$

$$q(t)=1-\frac{c(t)}{\beta(y(t))}; \tag{9}$$

$$c(t)\geq 0; \tag{10}$$

$$\beta(y(0))>0. \tag{11}$$

Дослідження моделі. Умови сумісного існування комерційного та некомерційного продуктів на ринку визначаються твердженням 1.

Твердження 1. Комерційний та некомерційний продукт співіснують на ринку тоді і тільки тоді, коли $s>1$, при цьому оптимальна ціна ліцензії і миттєвий прибуток виробника комерційного продукту менші, ніж на монопольному ринку комерційного продукту.

Доведення. Очевидно, у випадку $s\leq 1$ переваги користувачів такі, що мобільна операційна система Android навіть не могла би почати поширюватися, оскільки всі користувачі надавали би перевагу використанню Windows Mobile. Дослідимо більш складний випадок $s>1$.

Підставляючи вираз $q(t)$, перетворимо задачу:

$$J=\int_0^{+\infty} a\left(1-\frac{c(t)}{\beta(y(t))}\right)c(t)e^{-\delta t}dt\to max$$

за умов

$$\frac{dy}{dt}=a\left((1+s)\left(1-\frac{c(t)}{\beta(y(t))}\right)-s\right);$$

$$c(t)\geq 0;$$

$$\beta(y(0))>0.$$

Складемо гамільтоніан:

$$H=a\left(1-\frac{c(t)}{\beta\big(y(t)\big)}\right)c(t)e^{-\delta t}+m(t)e^{-\delta t}a\left((1+s)\left(1-\frac{c(t)}{\beta\big(y(t)\big)}\right)-s\right)=$$

$$=ae^{-\delta t}\left(c(t)+m(t)-\frac{c(t)(c(t)+(1+s)m(t))}{\beta\big(y(t)\big)}\right)$$

[тут $m(t)e^{-\delta t}$ – спряжена змінна].

Економічний смисл спряженої змінної виражається таким чином: $m(t)$ рівне сучасній цінності приросту інтегрального дисконтованого доходу Microsoft в результаті посилення переваг користувачами бренду Windows Mobile бренду Android [тобто, в результаті збільшення на одиницю величини $y(t)=n_W(t)-sn_A(t)$].

Умови принципу максимуму Понтрягіна для цієї задачі мають такий вигляд:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0 \Leftrightarrow c(t) = \frac{\beta\big(y(t)\big) - (1+s)m(t)}{2}; \qquad (12)$$

$$\frac{d\big(m(t)e^{-\delta t}\big)}{dt} = -\frac{dH}{dy} \Leftrightarrow \frac{dm}{dt} == \delta m(t) - \frac{a\beta'\big(y(t)\big)c(t)\big(c(t) + (1+s)m(t)\big)}{\beta^2\big(y(t)\big)}; \qquad (13)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = a\left(1 - \frac{(1+s)c(t)}{\beta\big(y(t)\big)}\right). \qquad (14)$$

Підставляючи вираз $c(t)$ із (2.3.6) в (2.3.7) та (2.3.8) отримаємо відповідно:

$$\frac{dm}{dt} = \delta m(t) - \frac{a\beta'\big(y(t)\big)\big(\beta^2\big(y(t)\big) - (1+s)^2 m^2(t)\big)}{4\beta^2\big(y(t)\big)}; \qquad (15)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a\Big((1-s)\beta\big(y(t)\big) + (1+s)^2 m(t)\Big)}{2\beta\big(y(t)\big)}. \qquad (16)$$

Визначимо стаціонарні стани системи диференційних рівнянь (2.3.9)-(2.3.10) як рішення $(m; y)$ відповідної системи нелінійних рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dm}{dt} = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta m(t) = \dfrac{a\beta'\big(y(t)\big)\big(\beta^2\big(y(t)\big) - (1+s)^2 m^2(t)\big)}{4\beta^2\big(y(t)\big)} \\ \dfrac{a\Big((1-s)\beta\big(y(t)\big) + (1+s)^2 m(t)\Big)}{2\beta\big(y(t)\big)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1+s)^2 m^2 + \dfrac{4\delta\beta^2(y)}{a\beta'(y)} m - \beta^2(y) = 0, \\ m = \dfrac{(s-1)\beta(y)}{(1+s)^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{\beta(y)\big(-2\delta\beta(y) \pm \sqrt{4\delta^2\beta^2(y) + a^2(1+s)^2(\beta'(y))^2}\big)}{a(1+s)^2\beta'(y)}, \\ m = \dfrac{(s-1)\beta(y)}{(1+s)^2}. \end{cases}$$

Таким чином, можливі два випадки:

$$\begin{cases} m = \dfrac{\beta(y)\big(-2\delta\beta(y) + \sqrt{4\delta^2\beta^2(y) + a^2(1+s)^2(\beta'(y))^2}\big)}{a(1+s)^2\beta'(y)}, \\ m = \dfrac{(s-1)\beta(y)}{(1+s)^2} \end{cases} \qquad (17)$$

$$\begin{cases} m = \dfrac{\beta(y)\big(-2\delta\beta(y) - \sqrt{4\delta^2\beta^2(y) + a^2(1+s)^2(\beta'(y))^2}\big)}{a(1+s)^2\beta'(y)}, \\ m = \dfrac{(s-1)\beta(y)}{(1+s)^2}. \end{cases} \qquad (18)$$

Система (2.3.11) має два рішення:

1. $(m = 0;\ y = y^{\circ})$, де y° - рішення рівняння $a_W(y) = a_A(y)$

як було в розділі 2.1: оскільки $\beta(y^{\circ}) = 0$, праві частини обох рівнянь системи (2.3.11) при $y = y^{\circ}$ перетворюються на нуль;

2. $(m = \widehat{m};\ y = \hat{y})$, де $\hat{y}$ - рішення рівняння

$$\frac{\beta'(y)}{\beta(y)} = \frac{\delta(s-1)}{as}, \qquad (19)$$

яке отримується шляхом спрощення рівняння

$$\frac{\beta(y)\big(-2\delta\beta(y) - \sqrt{4\delta^2\beta^2(y) + a^2(1+s)^2(\beta'(y))^2}\big)}{a(1+s)^2\beta'(y)} = \frac{(s-1)\beta(y)}{(1+s)^2},$$

а

$$\widehat{m} = \frac{(s-1)\beta(\hat{y})}{(1+s)^2}. \qquad (20)$$

Система (2.3.12) має єдиний розв'язок $(m = 0;\ y = y^{\circ})$, але на всіх траєкторіях, що ведуть в цю стійку стаціонарну точку, спряжена змінна (тобто сучасна цінність приросту інтегрального дисконтованого доходу Microsoft в результаті посилення переваги користувачами бренду Windows Mobile перед брендом Android) від'ємна, тому ці траєкторії не можуть бути оптимальними.

Підставляючи (2.3.14) в (2.3.6) і переходячи до границі при $t \to +\infty$, визначаємо

$$\lim_{t \to +\infty} c^*(t) = \frac{\beta(\hat{y})}{1+s} < \frac{\bar{a}_W}{2}; \qquad (21)$$

оскільки $\beta(\hat{y}) < \bar{a}_W, s > 1$.

Перехід до границі у виразі $q^*(t)$ (2.3.3) з підстановкою $\lim_{t\to+\infty} c^*(t)$ з (2.3.15) дає

$$\lim_{t\to+\infty} q^*(t) = \frac{s}{1+s} > \frac{1}{2};$$

оскільки $\beta(\hat{y}) < \bar{a}_W, s > 1$.

Миттєвий прибуток при цьому рівний

$$\pi^* = \lim_{t\to+\infty} (aq^*(t)c^*(t)) = \frac{as\beta(\hat{y})}{(1+s)^2} < \frac{a\bar{a}_W}{4}.$$

Твердження повністю доведено.

Література

1. Соловьев В. И. (Soloviev V. I.) Current state of Windows / Linux competition in the East-Asian server operating systems market // Модернизация экономики и развитие менеджмента: Материалы IX конференции Международной федерации ассоциаций менеджмента Восточной Азии (IFEAMA): Москва, 1—2 октября 2008 г. — М.: ГУУ, 2008. — С. 122—126.
2. Соловьев В. И. (Soloviev V. I.) Duopoly of Linux and Microsoft as competing server operating systems // Evolution and Revolution in the Global Knowledge Economy: Enhancing Innovation and Competitiveness Worldwide: Global Business and Technology Association Tenth International Conference: Readings Book: July 8—12, 2008, Madrid, Spain. — NY., USA: GBATA, 2008. — P. 1041—1044.
3. Соловьев В. И. (Soloviev V. I.) Mathematical modelling of strategic commitments and piracy in Windows / Linux competition // 2008 International Conference on Management Science and Engineering: 15th Annual Conference Proceedings: September 10—12, 2008, Long Beach, USA. — Piscataway, USA: IEEE, 2008. — P. 10—12.
4. Соловьев В. И. Модель смешанной дуополии производителей коммерческого и открытого программного обеспечения // Актуальные проблемы управления—2008: Материалы Всероссийской научной конференции: Москва, октябрь 2008 г. — Вып. 5. — М.: ГУУ, 2008. — С. 70—74.
5. Спенс А. М. (Spence A. M.) The learning curve and competition // The Bell Journal of Economics. — 1981. — V. 12. — № 1 (Spring). — P. 49—70.
6. Росс Д. (Ross D. R.) Learning to dominate // The Journal of Industrial Economics. — 1986. — V. 34. — № 4 (June). — P. 337—353.
7. Касадесус-Масанелл Р., Гемават П. (CasadesusMasanell R., Ghemawat P.) Dynamic mixed duopoly: A model motivated by Linux vs Windows // Management Science. — 2006. — V. 52. — № 7 (July). — P. 1072—1084.
8. Фостер Р. (Foster R.) Innovation: The Attacker’s Advantage. — New York, USA: Summit Books, 1986.
9. Мангасарян О. (Mangasarian O. L.) Sufficient Conditions for the Optimal Control of Non-linear Systems // SIAM Journal of Control. — 1966. — V. 4. — P. 139—152.
10. Р. Піндайк, Д.Рубінфелд Мікроекономіка. К.: Основи, 1996.
11. Петюх В.Н. Рыночная экономика. К.: Урожай, 1995.
12. Киреев А. Международная экономика ч.1. М.: Международные отношения, 1999.
13. Р.Пиндайк, Д. Рубинфельд Экономикс. М.: Дело, 1992.

Стаття надійшла до редакції 27.06.2011 р.