Електронне наукове фахове видання "Ефективна економіка" включено до переліку наукових фахових видань України з питань економіки (Наказ Міністерства освіти і науки України від 29.12.2014 № 1528)

Ефективна ЕКОНОМІКА

Дніпропетровський державний аграрно-економічний університет

№ 7, 2013 Назад Головна

УДК 368.01

О. С. Березовчук,
студент, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», м. Київ

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ УМОВ ІСНУВАННЯ ВЗАЄМОВИГІДНИХ ДОГОВОРІВ СТРАХУВАННЯ ДЛЯ СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ ТА ЇЇ КЛІЄНТА

O. S. Berezovchuk,
Student, National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute", Kyiv

MATHEMATICAL ANALYSIS OF CONDICIONS FOR EXISTENCE OF MUTUALLY BENEFICIAL INSURANCE CONTRACTS FOR INSURANCE COMPANY AND ITS CLIENT

В даній статті розглядається проблема узгодження інтересів страхової компанії та її клієнта щодо розміру страхової премії, яка виступає в ролі ціни за страхування. Проводиться математичний аналіз умов існування договорів страхування, що узгоджують загадані інтереси. Дослідження проводиться виключно для ризикових видів страхування. Основою математичного апарату, що використовується для проведення аналізу є теорія випадкових процесів.

This article devoted to the problem of reconciling the interests of the insurance company and its client on the size of insurance premium, which acts as a price for insurance. A mathematical analysis of conditions for existence of insurance contracts that agree this interests. Research carried out exclusively for non-life insurance. The basis of mathematical apparatus used for analysis is the theory of random processes.

Ключові слова: *страхування, страхова премія, узгодження інтересів на ринку, математичний аналіз, теорія випадкових процесів.*

Keywords: *insurance, insurance premiums, reconciling of the interests on the market, mathematical analysis, the theory of random processes.*

Постановка проблеми. Проблема визначення взаємовигідних умов страхування являється класичною теоретичною і практичною проблемою страхування. Враховуючи той факт, що приймаючи на страхування ризики клієнта, страхова компанія зобов'язується виплачувати відшкодування, сумарний розмір яких по конкретному договору заздалегідь невідомий, для неї критичним є захист власних інтересів щодо ціни. З іншого боку, завищена ціна за страхування може не влаштовувати клієнтів і страхова компанія ризикує втратити частину ринку. Саме тому узгодження інтересів страхової компанії та її клієнтів у питанні ціни за страхування має бути одним із першочергових питань страхування.

Аналіз наукової літератури показав, що проблема узгодження інтересів страхової компанії та умов існування взаємовигідних договорів страхування з математичної точки зору розкрита переважно в класичних працях з актуарної математики зарубіжних науковців, серед них першочергової уваги заслуговують роботи Н. Бауерса, Х. Гербера, Д. Джогса, С. Несбіта, Дж. Хікмана, Е. Штрауба, Т. Мака, а серед російських науковців – В. Баскакова та Г. Фаліна.

Метою аналізу, що проводиться в даній статті, є виявлення та опис суперечності між інтересами страхової компанії в математичних термінах з використанням допомогою апарату теорії випадкових процесів, а також наведення конкретного математичного механізму для визначення параметрів страхового договору, які дозволяють вирішити дану суперечність.

Викладення основного матеріалу. Свого часу Н. Бауерс, Х. Гербер та інші в своїй фундаментальній праці «Актуарна математика» з математичної точки зору описали множину допустимих договорів страхування та визначили теорему, згідно положень якої з цієї множини обирався оптимальний договір страхування, що максимізував корисність споживача при повному задоволенні інтересів страхової компанії [1]. Безперечно, результати згаданої теореми мають неабияке значення для актуарної математики і по сей день. Однак, теорема мала цілий ряд обмежень: враховувала лише нетто-премію (страхова премія без урахування додаткових витрат компанії), вважалося, що сума, яку клієнт готовий заплатити вже відома, при цьому не приводилося конкретних рекомендацій, яким чином цю суму необхідно визначати. Ці недоліки відмічені також самим авторами безпосередньо в поясненнях до положень теореми.

Для уникнення повторення недоліків теореми описаної Бауерсом, Гербером та іншими, я пропоную використати дещо інший підхід до опису суперечності інтересів страхової компанії та її клієнтів в питаннях ціни страхування. В основі цього підходу лежить ідея, яка бере своє коріння з праць Баскакова В. Н., а саме описаної ним для страхування від професійних захворювань та нещасних випадків на виробництві моделі багатьох станів. Модель уособлює собою ідею використання теорії випадкових процесів для опису процесу виникнення страхових випадків різного ступеня тяжкості (з фінансової точки зору) на протязі часу дії конкретного договору страхування [2]. Знову ж таки, модель описана Баскаковим В.Н. мала кілька суттєвих обмежень, включаючи той факт, що вона описувала механізм визначення тільки нетто-премій і лише для зазначеного вище виду страхування, що має ряд притаманних лише йому особливостей. Однак, ідея використання теорії випадкових процесів для опису процесу формування та накопичення суми збитку, що має бути відшкодована страховою компанією згідно її зобов'язань перед клієнтом, на мою думку, являється дуже вдалою та може бути застосована для опису процесу страхування фактично від будь-якого ризику.

Таким чином, нехай маємо договір страхування, що характеризується наступними параметрами:

- страховою сумою *I;*
- розміром безумовної франшизи k_f (сума, що не відшкодовується страховою компанією по кожному страховому випадку, визначена у % від страхової суми);
- об'єктом страхування (майно, фінансові інтереси, відповідальність, здоров'я або будь-що інше, що страхується за договором страхування);
- розміром та структурою додаткових витрат страхової компанії, що пов'язані з обслуговуванням даного договору страхування.

До додаткових витрат страхової компанії можна віднести:

- Комісійні виплати страховим посередникам (C_{com},%);

- Витрати на ведення справ (на обробку та підготовку документів, їх зберігання, заробітна плата персоналу, реклама, тощо) – (C_{deal} ,%);

- Податок на валовий обсяг премій (C_{tax},%) [3];

- Ризикова надбавка (C_{risk} ,%) – використовується для створення запасу міцності, на випадок якщо величина збитку по договору страхування перевищить очікуваний рівень.

Разом з додатковими витратами, страхова компанія має одразу також врахувати свої сподівання щодо прибутку, визначивши бажаний розмір норми прибутку, позначатимемо його n_p.

Вважаємо, що об'єкт страхування може перебувати в одному з *n* станів, перехід між якими він здійснює з певною ймовірністю через рівні проміжки часу *m* разів протягом дії договору страхування, за яким він застрахований. Кожен із станів q_j описує деякий ступінь пошкодження об'єкта страхування. Множину $Q=\{q_1,q_2,\ldots,q_n\}$ називатимемо множиною можливих станів об'єкта.

Множина можливих станів об'єкта обов'язково включає нормальний стан (об'єкт без пошкоджень), стан його повного знищення, та *n-2* проміжних станів.

Вважаємо також, що для кожного із станів q_j встановлено величину відповідної виплати у відношенні до страхової суми по договору страхування вигляді коефіцієнта виплати k_{q_j} , у разі переходу об'єкта до цього стану.

Якщо проранжувати множину станів від найсприятливішого (нормального стану) до найгіршого (повне знищення об'єкта), то відповідна їй множина коефіцієнтів виплат матиме вигляд:

$$K=\{0,q_2,\ldots,q_{n-1},1\}$$

В такому разі, однозначна залежність між станом об'єкта та відповідним розміром страхової виплати може бути описана за допомогою функції виплат виду:

$$\varphi(q,I,k_f)=\begin{cases} I(k_{q_1}-k_f), q=q_1 \\ \ldots \\ I(k_{qn}-k_f), q=q_n \end{cases}$$

При цьому, процес переходу об'єкта між станами може бути описаний за допомогою марковського випадкового процесу $\xi(t,\varphi(q_t,I,k_f))$, що характеризується матрицею ймовірностей початкового стану виду:

$$P^1_{q_j}=[10\ldots0]^T$$

та матрицею ймовірностей переходів між станами виду:

$$P(q_i,q_j)=\begin{bmatrix} p(q_i,q_j) & \ldots & p(q_i,q_j) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

По описаному вище договору клієнтом має бути сплачена страхова премія *G*. Припустимо, що ризики, пов'язані з об'єктом страхування та відповідні збитки в разі їх реалізації являються однаково небажаними як для клієнта, у разі відмови від придбання страховки, так і для страхової компанії, у разі прийняття даного об'єкта на страхування.

В такому випадку, клієнт має приймати рішення щодо ціни страхового продукту, виходячи із співвідношення

$$G\le V_c \qquad (1)$$

де

G – розмір страхової премії;

V_c – очікувані втрати клієнта, у випадку відмови від страхування.

За тих же умов, страхова компанія обирає ціну виходячи із співвідношення:

$$G\ge V_c+\Delta V=V_{ic} \qquad (2)$$

де

ΔV – додаткові витрати страхової компанії (комісійні виплати агентам, податки, витрати на ведення справ, рекламу і т.д.);

V_{ic} – загальні очікувані втрати страхової компанії.

Зі співвідношень (1) та (2) видно, що максимальна премія, яка влаштовує клієнта нижча за мінімальну премію, яка влаштовує страхову компанію.

Так як страхова компанія не може працювати собі у збиток, то одним із компромісних рішень може бути лише випадок, коли знайдеться клієнт з песимістичним настроєм, який буде готовий заплатити ціну, яка задовольнить страхову компанію, так як існує ймовірність, що його втрати будуть значно вищими як за очікувані ним втрати, так і за ціну страхової послуги.

З іншого боку, далеко не всі клієнти налаштовані вкрай песимістично. В такому разі необхідно шукати інший компромісний варіант. Доведемо, що такий варіант існує.

Так як збільшення безумовної франшизи впливає на розмір сумарних виплат в бік зменшення, очевидно, що збільшення розміру франшизи можна використовувати як інструмент для зменшення ціни страхового продукту. Варто зазначити, що якщо розмір безумовної франшизи 0% (тобто $k_f=0$), то маємо ситуацію описану вище.

Також очевидно, що завжди можна підібрати такий розмір безумовної франшизи, за якого ціна, що влаштовує клієнта співпаде з ціною, яку готова поставити страхова компанія, тобто:

$$\exists k_f = k_f^* : V_{ic} = V_c \qquad (3)$$

Розмір очікуваних втрат клієнта V_c у випадку відмови від страхування можна визначити як математичне очікування випадкового процесу $\xi(t, \varphi(q_t, I, k_f))$:

$$V_c = \sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(p_{q_i}^{t-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} p(q_{t-1}, q_j) \cdot \varphi(q_t, I, k_f))(1+\eta_t) \qquad (4)$$

де $p_{q_i}^{t-1}$ – ймовірність знаходження об’єкту в стані *i* після переходу між станами в момент *t-1*.

Вектор ймовірностей знаходження об’єкту в стані *i* після переходу між станами в момент *t-1* можна знайти з рівняння Колмогорова-Чепмена. Для стаціонарного марковського процессу воно має вигляд [4]:

$$P_{q_i}^{t-1} = (P(q_i, q_j)^T)^{t-1} \cdot P_{q_i}^1$$

У випадку, якщо умови стаціонарності не виконуються:

$$P_{q_i}^{t-1} = (\prod_{l=1}^{t-1} P_l(q_i, q_j)^T) \cdot P_{q_i}^1$$

Аналогічно до (4) розраховуються і втрати страхової компанії, тільки з урахуванням додаткових витрат, тобто втрати страхової компанії можна обрахувати за формулою:

$$V_{ic} = \frac{\sum_{t=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(p_{q_i}^{t-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} p(q_{t-1}, q_j)\, \varphi(q_t, I, k_f))(1+\eta_t)}{1-(C_{com}+C_{tax}+C_{deal}+C_{risk}+n_p)} \qquad (5)$$

В такому випадку, прирівнявши (4) та (5) отримаємо рівняння відносно k_f, розв’язок якого і є шукане оптимальне значення франшизи $k_f = k_f^*$, що дозволяє встановити взаємовигідну ціну для клієнта та страхової компанії і вирішити суперечність їх інтересів.

Висновки. В результаті аналізу було отримано два варіанти умов, за яких інтереси страхової компанії та її клієнта в питанні ціни узгоджуються:

1) Якщо клієнт готовий заплатити ціну, вищу за його очікувані втрати у разі відмови від страхування (варіант крайнього песимізму клієнта), в такому випадку ціна визначається з рівняння (5).

2) Інший варіант полягає у встановленні такого розміру безумовної франшизи, за якого ціну страхової послуги (страхову премію) можна буде знизити до рівня, що влаштовує клієнта. В такому випадку розмір страхової премії необхідно визначати за рівнянням (4), а розмір безумовної франшизи – з рівності $V_{ic} = V_c$.

Перший варіант, як вже було сказано, можливий за умови крайнього песимізму клієнта страхової компанії; другий варіант відповідає ситуаціям, коли клієнт налаштований більш оптимістично і вважає, що з ним не станеться великої кількості страхових випадків і він зможе зекономити на ціні страхового покриття за рахунок ненульової франшизи, або ж клієнт не має достатньої кількості грошей, щоб діяти згідно першого варіанту і змушений обирати варіант з ненульовою безумовною франшизою.

Другий варіант умов також підкреслює необхідність використання процедур індивідуального узгодження умов страхування по конкретному договору страхування з конкретним клієнтом в практичній діяльності страхових компаній.

Література.

1. Бауэрс Н., Гербер Х., Джонс Д., Несбитт С., Хикман Дж. Актуарная математика: перев. С англ. / Под ред. В. К. Малиновского. — М.: Янус-К, 2001. — 656 с. – ISBN 5-8037-0065-7

2. Баскаков В. Н. Страхование от несчастных случаев на производстве: актуарные основы. / [Баскаков В. Н., Андреева О. Н., Баскакова М. Е., Карташов Г. Д., Крылова Е. К.]. – М.: Academia, 2001. – 192 с. – ISBN 5-874444-008-9.

3. Закон України «Про страхування» № 85/96-ВР від 07.03.1996 / Верховна Рада України. – Відомості Верховної Ради України (ВВР): 1996, № 18. – ст. 78.

4. Волков И.К. Случайные процессы: учеб. для вузов / Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М: [под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко]. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. - 448 с. – **ISBN** 5-7038-1267-4

References.

1. Bowers, N. Gerber, H. Jones, D. Nesbitt, S. Hickman, J. (2001), *Actuarial Mathematics*: trans. from English / ed. V. K. Malinovsky. - Moscow: Janus-K, p. 656. - ISBN 5-8037-0065-7

2. Baskakov, V. Andreev, O. Baskakova, M. Kartashow,H. Krylova, E. (2001), *Insurance against occupational accidents: actuarial basis*, Moscow: Academia, p. 192 - ISBN 5-874444-008-9.

3. The Law of Ukraine On Insurance № 85/96-VR at 07.03.1996 / Verkhovna Rada of Ukraine. - 1996, № 18. - p. 78.

4. I. K. Volkov Random processes: studies. for high schools / I.K. Volkov, S.M. Zuev, H.M. Tsvetkova [ed. B.C. Zarubin, A.P. Kryschenko]. - Moscow: Publishing House of the MSTU behalf of N.E. Bauman, 1999. - 448 p. - ISBN 5-7038-1267-4

Стаття надійшла до редакції 13.07.2013 р.