



УДК 681.3.057:518.12

**А.А. Сытник, К.Н. Ключка**, кандидаты техн. наук  
Черкасский государственный технологический университет  
(Украина, 18006, Черкассы, бул. Шевченка, 460,  
тел. (0472) 730256, e-mail: sytnyk\_ets@ukr.net),

**Н.Л. Костьян**, канд. техн. наук  
Восточноевропейский университет экономики и менеджмента  
(Украина, 18036, Черкассы, ул. Нечуя-Левицкого, 16,  
тел. (0472) 647055, e-mail: k\_n\_l@mail.ru)

### **Метод идентификации динамического объекта посредством интегральной модели**

Рассмотрена возможность идентификации параметров динамических объектов с применением интегральных уравнений Вольтерры второго рода, эквивалентных моделям, построенным на основе дифференциальных уравнений. Приведены примеры решения тестовых задач.

Розглянуто можливість ідентифікації параметрів динамічних об'єктів із застосуванням інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду, що є еквівалентними моделям, побудованим на основі диференціальних рівнянь. Наведено приклади розв'язання тестових задач.

*К л ю ч е в ы е с л о в а:* динамические объекты, идентификация параметров, интегральные уравнения Вольтерры.

Задача идентификации динамических объектов является актуальной в связи с необходимостью контролировать их функционирование в процессе эксплуатации, которая, как правило, сопровождается естественным изменением параметров этих объектов. Фактические значения параметров определяются посредством обработки экспериментальных данных, полученных при непосредственном измерении определенных параметров сигналов в точках контроля, число которых ограничено. Методы идентификации применяются также для получения макромоделей современных сложных динамических систем, что позволяет упростить задачи математического моделирования при проектировании устройств и создании систем управления.

Традиционный подход при решении задачи параметрической идентификации предусматривает, в подавляющем большинстве случаев, нахождение коэффициентов дифференциального уравнения динамического объекта оптимизационными методами [1]. Однако возможности такого

© А.А. Сытник, К.Н. Ключка, Н.Л. Костьян, 2016

подхода к решению задачи идентификации ограничены, прежде всего, в случаях измерения входных и выходных сигналов на фоне высокочастотных помех в том числе и шумового характера.

Применение интегральных моделей позволяет исследовать большое число различных процессов, протекающих в технических системах [2, 3]. Во многих случаях это приводит к определенным преимуществам при идентификации параметров, так как использование интегральных операторов позволяет получать устойчивые алгоритмы идентификации относительно погрешностей начальных данных [2]. Поскольку данные модели относятся к классу непараметрических, алгоритмы, применяемые для определения параметров дифференциальных моделей [1], не могут быть использованы при моделировании динамических объектов на основе интегральных уравнений.

Рассмотрим задачу идентификации линейного стационарного объекта, модель которого представлена уравнением

$$u^{(m)}(t) + \sum_{j=1}^m p_j u^{(m-j)}(t) = f(t), \quad u^{(k)}(0) = c_k, \quad k = \overline{0, m-1}, \quad (1)$$

где  $f$  — заданный входной сигнал;  $u$  — заданный выходной сигнал;  $p$  — вектор неизвестных параметров модели;  $c$  — вектор начальных условий;  $t \in [0, T]$ . Применяв для (1) метод последовательного интегрирования, рассмотренный в [2], получим эквивалентное интегральное уравнение Вольтерры II рода:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m p_j \left[ \int_0^t \frac{(t-\tau)^{j-1}}{(j-1)!} u(\tau) d\tau - \sum_{k=0}^{m-j-1} c_k \frac{t^{k+j}}{(k+j)!} \right] = \\ = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!} f(\tau) d\tau + \sum_{j=0}^{m-1} c_j \frac{t^j}{j!} - u(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Из (2) для моментов измерения  $t_i, \tau_j$  ( $i = \overline{1, N}$ ) вида  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_N \leq T$ ,  $0 \leq \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_N \leq T$ , получим следующую систему линейных уравнений относительно  $p_j, j = \overline{1, m}$ :

$$A \cdot p = b,$$

где  $p = (p_1, \dots, p_m)^T$ ;  $b = (b_1, \dots, b_m)^T$ ;  $A = [A_{ij}]_{i,j=1}^m$ ;

$$A_{ij} = \int_0^{t_i} \frac{(t_i - \tau)^{j-1}}{(j-1)!} u(\tau) d\tau - \sum_{k=0}^{m-j-1} c_k \frac{t_i^{k+j}}{(k+j)!}; \quad (3)$$

$$b_j = \int_0^{t_i} \frac{(t_i - \tau)^{m-1}}{(m-1)!} f(\tau) d\tau - y(t_i) + \sum_{v=0}^{m-1} c_v \frac{t_i^v}{v!}. \quad (4)$$

Для вычисления интегралов (3) и (4) используем квадратурные формулы, которые в случае стационарного объекта имеют следующий вид:

$$\int_0^{t_i} (t_i - \tau)^{j-1} u(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^{N_i} W_{ij} (t_i - \tau_k)^{j-1} u(\tau_k) + r_{ij}[u], \quad (5)$$

$$\int_0^{t_i} (t_i - \tau)^{m-1} f(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^{M_i} W_{ik} (t_i - \tau_k)^{m-1} f(\tau_k) + r_{im}[f], \quad (6)$$

где  $t_i, \tau_k$  — узлы разбиения ( $t_0 \leq \tau_k \leq t_i$ );  $W_{ij}$  — вес квадратурной формулы;  $1 \leq N_i, M_i \leq N, r_{ij}, r_{im}$  — остаточные члены соответствующих формул. Учитывая тот факт, что экспериментальные значения сигналов могут иметь некоторые погрешности, и отбрасывая  $r_{ij}[y]$  и  $r_{im}[f]$ , из (3)—(6) получаем следующие приближенные выражения:

$$\tilde{A}_{ij} = \frac{1}{(j-1)!} \sum_{k=0}^{N_i} W_{ik} (t_i - \tau_k)^{j-1} \tilde{u}(\tau_k) - \sum_{l=0}^{m-j-1} c_l \frac{t_i^{l+j}}{(l+j)!}, \quad 1 \leq N_i \leq N, \quad (7)$$

$$\tilde{b}_i = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{k=0}^{M_i} W_{ik} (t_i - \tau_k)^{m-1} \tilde{f}(\tau_k) + \sum_{v=0}^{m-1} c_v \frac{t_i^v}{v!} - \tilde{u}(t_i), \quad 1 \leq M_i \leq N. \quad (8)$$

Таким образом, приходим к окончательной системе уравнений для определения приближенных значений вектора  $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_m)^T$ :

$$\tilde{A} \cdot \tilde{p} = \tilde{b}, \quad (9)$$

где  $\tilde{A} = [A_{ij}]_{i,j=1}^m$ ;  $\tilde{b} = [\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_m]^T$ .

Рассмотренная задача является частным случаем более общей задачи идентификации нестационарного динамического объекта с сосредоточенными параметрами [2], описываемого интегральным уравнением

$$\begin{aligned} \alpha_1(t)u(t) + \int_{G_1(t)} K_1(t, \tau) u(\tau) d\tau + \lambda_1(\tau) = \\ = \alpha_2(t)f(t) + \int_{G_2(t)} K_2(t, \tau) f(\tau) d\tau + \lambda_2(\tau), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\alpha_i, K_i, \lambda_i$  ( $i=1,2$ ) — неизвестные величины;  $u$  и  $f$  — определены в (1);  $G_i(t)$  — области интегрирования ( $G_1(t) = G_2(t) = [0, t], t \in [0, T]$ ). Очевидно, что для стационарного объекта получим

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &\equiv 1, \alpha_2(t) \equiv 0, \lambda_1(t) \equiv 0, \\ K_1(t, \tau) &= K(t-\tau) = \sum_{j=1}^m p_j \frac{(t-\tau)^{j-1}}{(j-1)!}, \quad m \in N, \\ K_2(t, \tau) &= \frac{(t-\tau)^{m-1}}{(m-1)!}, \lambda_2(t) = \sum_{j=1}^{m-1} \left( c_j \frac{t^j}{j!} + p_j \sum_{k=0}^{m-j-1} c_k \frac{t^{k+j}}{(k+j)!} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Для решения уравнения (10) проведем дискретизацию модели в узлах  $t_i, i=0, N$ , и применим квадратурные формулы, в результате чего получим алгебраическую систему относительно неизвестных параметров, содержащую  $N+1$  уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha_1(0)u(0) + \lambda_1(0) &= \alpha_2(0)f(0) + \lambda_2(0), \\ \alpha_1(t_i)u(t_i) + \sum_{j=0}^{N_i} W_{ij}K_1(t_i, \tau_j)u(\tau_j) + \lambda_1(t_i) &= \\ = \alpha_2(t_i)f(t_i) + \sum_{j=0}^{M_i} W_{ij}K_2(t_i, \tau_j)f(\tau_j) + \lambda_2(t_i), \\ M_i N_i &= \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Данная система является несовместной, поэтому при ее решении требуется применение соответствующих численных алгоритмов.

Рассмотрим примеры решения тестовых задач, чтобы убедиться в эффективности предлагаемого метода. Исходные данные тестовых задач обеспечивают возможность получения точного решения и проверки точности применяемых численных алгоритмов, при этом имеется возможность воспроизведения результатов вычислительных экспериментов.

**Пример 1.** Выходной сигнал:  $u(t) = 1 - e^{-2t}, t \in [0; 2], h = 0,01$ ; входной сигнал:  $f(t) = -14e^{-2t} - 0,2$ ;  $C_1 = 0, C_2 = 2, C_3 = -4, C_4 = 8, C_5 = -16$  — начальные условия для эквивалентного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} u^{(5)}(t) + p_1 u^{(4)}(t) + p_2 u^{(3)}(t) + p_3 u^{(2)}(t) + p_4 u^{(1)}(t) + p_5 u(t) &= f(t), \\ u^{(i-1)}(0) &= C_i, \quad i = \overline{1, 5}. \end{aligned}$$

Необходимо определить коэффициенты  $\tilde{p}_i$  (точные значения:  $p_1 = 1,2, p_2 = -2, p_3 = 3,1, p_4 = 0,7, p_5 = -0,2$ ).

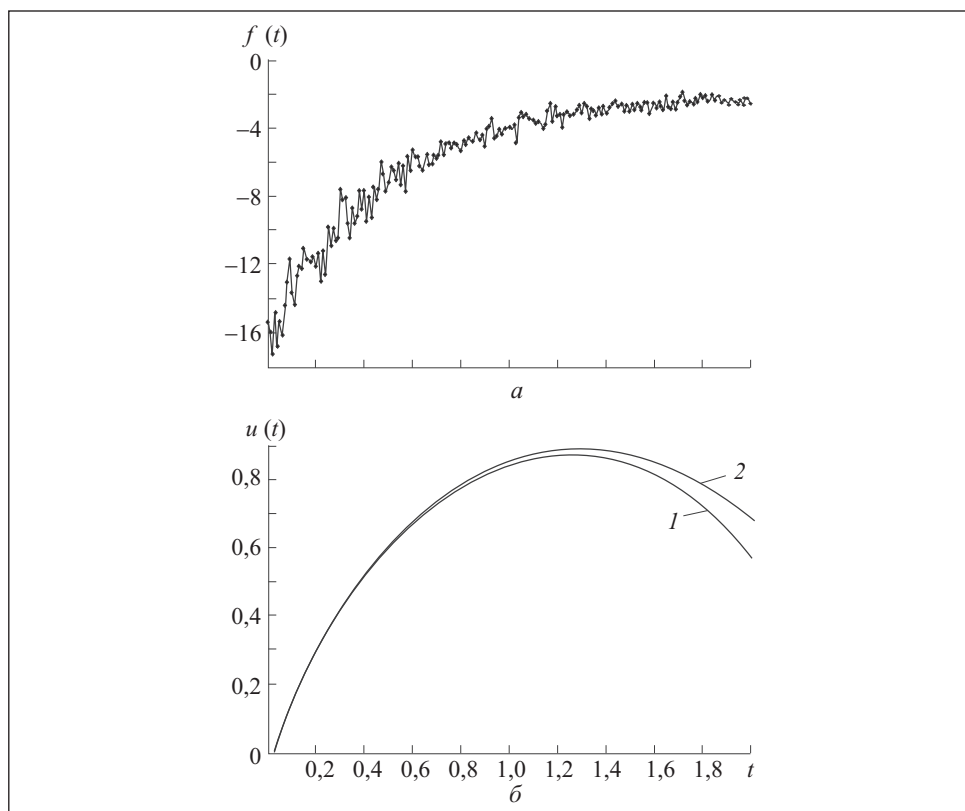


Рис. 1. Графики входного (*a*) и выходного (*б*) сигналов при уровне помехи 10 %: *a* —  $f(t) = -14e^{-2t} - 0,2$ ; *б* — 1 — экспериментальные данные; 2 — расчетные значения, полученные на выходе модели

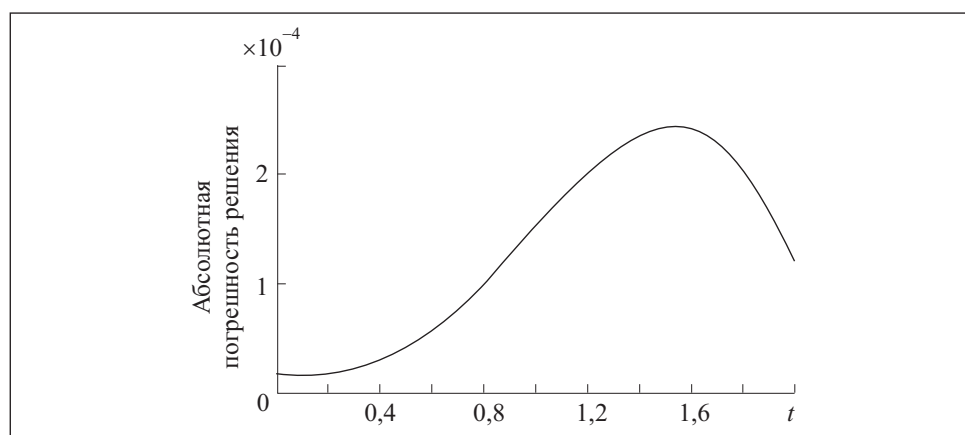


Рис. 2. График абсолютной погрешности выходного сигнала (точное значение  $u(t) = e^{1-t} + 1$ )

Используя выражения (7)—(9) и квадратурную формулу трапеций для аппроксимации интегралов, входящих в выражения (3), (4), получаем систему относительно неизвестных коэффициентов  $p_i$ . Применяя для ее решения метод наименьших квадратов, получаем значения искомых коэффициентов:  $\tilde{p}_1 = 0,0113$ ,  $\tilde{p}_2 = -3,3704$ ,  $\tilde{p}_3 = 5,7472$ ,  $\tilde{p}_4 = 1,9459$ ,  $\tilde{p}_5 = 0,1995$ . При этом максимальная абсолютная погрешность выходного сигнала  $\max \Delta u$  равна 0,000125.

Добавим к входному сигналу  $f$  случайную помеху, распределенную по нормальному закону, с учетом амплитуды  $f$ . На рис. 1 представлены графики входного и выходного сигналов при уровне случайной помехи 10 %, а в таблице приведены значения коэффициентов  $\tilde{p}_i$ ,  $i = \overline{1,5}$ , полученные при различных значениях помехи.

**Пример 2.** Выходной сигнал:  $u(t) = e^{1-t} + 1$ ; входной сигнал:  $f(t) = -0,5e^{1-t} - 1$ ;  $C_1 = 3,7183$ ,  $C_2 = -2,7183$ ,  $C_3 = 2,7183$  — начальные условия исходного дифференциального уравнения

$$u'''(t) + p_1 u''(t) + p_2 u'(t) + p_3 u(t) = f(t),$$

$$u^{(i-1)}(0) = C_i, \quad i = \overline{1,3}.$$

Точное решение:  $p_1 = 2$ ,  $p_2 = 0,5$ ,  $p_3 = -1$ . Необходимо определить коэффициенты  $\tilde{p}_i$ .

**Значения коэффициентов  $\tilde{p}_i$  при помехах выходного сигнала, описываемого экспоненциальным законом и полиномом третьей степени**

Пример	Величина помехи входного сигнала, %	$\max \Delta u$	$\tilde{p}_1$	$\tilde{p}_2$	$\tilde{p}_3$	$\tilde{p}_4$	$\tilde{p}_5$
1	1	0,003053	0,0059	-1,682	5,7503	-4,8095	-1,3727
	5	0,014173	0,0059	-1,1268	5,5406	-11,4488	-0,7102
	10	0,059389	0,0183	-5,6392	5,0458	9,8715	-3,2394
2	0	0,002438	0,0034	3,0077	-0,9974		
	1	0,037324	2,0267	0,5265	-0,9779		
	5	0,048346	1,9757	0,5471	-0,9859		
3	0	0,021668	2,0856	4,7155	-0,6312		
	1	0,024827	2,0828	0,2345	-0,7736		
	5	0,026551	2,2235	-0,5445	0,4487		
	10	0,028324	2,1337	-0,0666	-0,1927		

Для тестового примера получено решение с максимальной абсолютной погрешностью выходного сигнала  $\max \Delta u = 0,0024378$  (рис. 2). В таблице приведены значения коэффициентов  $\tilde{p}_i, i = \overline{1,3}$ , полученные при различных значениях помехи.

**Пример 3.** Выходной сигнал:  $u(t) = t^3$ ; входной сигнал:  $f(t) = -t^3 + 1,5t^2 + 12t + 6$ ; начальные условия:  $C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 = 0$ . Нужно определить коэффициенты  $\tilde{p}_i$  дифференциального уравнения

$$u'''(t) + p_1 u''(t) + p_2 u'(t) + p_3 u(t) = f(t), \\ u^{(i-1)}(0) = C_i, \quad i = \overline{1,3}.$$

Точное решение:  $p_1 = 2, p_2 = 0,5, p_3 = -1$ . Результаты моделирования  $\tilde{p}_i, i = \overline{1,3}$ , при помехах выходного сигнала, описываемого полиномом третьей степени, приведены в таблице.

## Выводы

Результаты проведенных вычислительных экспериментов свидетельствуют о таких свойствах интегрального метода идентификации, как высокая устойчивость вычислительного процесса, низкие затраты машинного времени, простота реализации. Предложенный метод может быть эффективен при решении задач параметрической идентификации динамических объектов, представленных как дифференциальными уравнениями, так и интегральными моделями в случае их параметризации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грон Д. Методы идентификации систем.— М. : Мир, 1979. — 302 с.
2. Верлань А.Ф., Москалюк С.С. Математическое моделирование непрерывных динамических систем. — Киев: Наук. думка, 1988. — 287 с.
3. Сытник А.А., Ключка К.Н., Протасов С.Ю. Применение интегральных динамических моделей при решении задачи идентификации параметров электрических цепей // Изв. Томского политехнического университета. Энергетика. — 2013. — **322**, № 4. — С. 103—106.

*A.A. Sytnik, K.N. Klyuchka, N.L. Kost'yan*

## METHOD OF IDENTIFICATION OF A DYNAMIC OBJECT BY MEANS OF THE INTEGRAL MODEL

The paper deals with a possibility of identification of dynamic objects parameters with the use of the second kind Volterra integral equations, equivalent to models based on differential equations. Examples of test problem solution are presented.

*Key words: dynamic objects, identification of parameters, Volterra integral equations.*

REFERENCES

1. Grop, D. (1979), *Metody identifikatsii sistem* [Methods of identification of systems], Mir, Moscow, Russia.
2. Verlan, A.F. and Moskalyuk, S.S. (1988), *Matematicheskoe modelirovanie nepreryvnykh dinamicheskikh sistem* [Mathematical modeling of continuous dynamic systems], Kiev, Naukova dumka, Ukraine.
3. Sytnik, A.A., Klyuchka, K.N. and Protasov, S.Yu. (2013), “The application of integrated dynamic models in solving the problem of parameter identification of electrical circuits”, *Izvestiya Tomskogo politekhnicheskogo universiteta, Energetika*, Vol. 322, no. 4, pp. 103-106.

Поступила 25.02.16

*СЫТНИК Александр Алексеевич, канд. техн. наук, зав. каф. электротехнических систем Черкасского государственного технологического университета. В 1985 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — применение интегральных уравнений в математическом моделировании динамических систем.*

*КЛЮЧКА Константин Николаевич, канд. техн. наук, доцент каф. электротехнических систем Черкасского государственного технологического университета. В 1996 г. окончил Черкасский инженерно-технологический ин-т. Область научных исследований — применение интегральных уравнений в математическом моделировании электрических цепей.*

*КОСТЯН Наталья Леонидовна, канд. техн. наук, ст. преподаватель каф. экономической кибернетики Восточноевропейского университета экономики и менеджмента (г. Черкассы). В 1999 г. окончила Черкасский инженерно-технологический ин-т. Область научных исследований — математическое моделирование, параметрическая идентификация динамических объектов.*