doi

УДК 004.942; 512.554

С.И. Клипков, канд. техн. наук
Государственное предприятие НЭК «Укрэнерго»
(Украина, 01032, Киев, ул. С. Петлюры, 25,
тел. (044) 2491216, e-mail: klipkov.s@gmail.com)

Некоторые особенности матричных представлений октонионов

Рассмотрены проблемы матричных представлений нормированных октонионов с делением, а также расщепленных октонионов, обусловленные неассоциативностью умножения. Предложен алгоритм умножения матриц, позволяющий сформулировать новый подход к матричному представлению октонионов, который может быть использован для представления как обычных, так и расщепленных октонионов. Приведены числовые примеры матричных представлений октонионов.

Ключевые слова: октонионы, расщепленные октонионы, неассоциативность, матричные представления числовых систем

В настоящее время в связи с развитием физических теорий (теория суперсимметрии, теория струн, М-теория и др.) все чаще используются числовые системы большой размерности, в частности октонионы (октавы). Использование октонионов позволяет представить волновые уравнения, уравнения электродинамики Максвелла, уравнения калибровочной теории поля и другие в компактных и простых обозначениях [1—4].

Октонионы впервые рассмотрены ирландским математиком Джоном Грейвсом в 1843 г. и представляют собой надмножество кватернионов, которые являются надмножеством комплексных чисел, а комплексные числа — надмножеством действительных чисел. Известно, что при переходе от действительных чисел к комплексным, и далее к кватернионам и к октонионам, каждая последующая числовая система подчиняется меньшему количеству алгебраических законов. При переходе от действительных чисел к комплексным теряется свойство равенства каждого элемента числовой системы своему сопряженному. При переходе от комплексных чисел к кватернионам теряется коммутативность, а при переходе от кватернионов к октонионам — ассоциативность. При дальнейшем увеличении размерности числовой системы (седенионы) теряется собственно алгебра с делением [5].

Указанное обстоятельство, с одной стороны, усложняет математическое моделирование, основанное на использовании гиперкомплексных числовых систем, но, с другой стороны, по всей вероятности, повышает уровень адекватности математического моделирования (уровень совпадения математических свойств модели и физических свойств моделируемого объекта).

В прикладных задачах физики в основном используются две алгебры октонионов: собственно октонионы (октавы) и расщепленные октонионы (антиоктавы).

Октонионы (Octonions) представляют собой некоммутативную, неассоциативную, нормированную, восьмимерную алгебру с делением:

$$\breve{a} = a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k + a_5 l + a_6 il + a_7 jl + a_8 kl, \qquad (1)$$

где $a_m \in \mathbb{R}$, $m = 1, 2, ..., 8$, — действительные коэффициенты октониона; i, j, k, l — мнимые единицы. Умножение октонионов осуществляется в соответствии с правилами умножения базисных элементов (табл. 1). Неассоциативность октонионов проявляется при выполнении цепочки умножений:

$$(\breve{a}\breve{x})\,\breve{b} \neq \breve{a}\,(\breve{x}\breve{b}). \qquad (2)$$

Из (2) следует, что результат умножения октонионов зависит от расстановки скобок. В частных случаях $\breve{x} = \breve{b}$ и $\breve{a} = \breve{x}$ неравенство (2) становится равенством. Это свойство называют альтернативностью. При этом условие $\breve{x} = \breve{b}$ является правой альтернативностью, а условие $\breve{a} = \breve{x}$ — левой.

Как известно, ассоциативные числовые системы изоморфны алгебрам действительных, комплексных или кватернионных матриц определенного порядка [6—8]. Поскольку октонионы неассоциативны, они не могут быть представлены матрицами с обычными правилами умножения, так как операция умножения матриц ассоциативна. В рамках общепринятого под-

Таблица 1. **Умножение базисных элементов октонионов**

1	i	j	k	l	il	jl	kl
i	-1	k	$-j$	il	$-l$	$-kl$	jl
j	$-k$	-1	i	jl	kl	$-l$	$-il$
k	j	$-i$	-1	kl	$-jl$	il	$-l$
l	$-il$	$-jl$	$-kl$	-1	i	j	k
il	l	$-kl$	jl	$-i$	-1	$-k$	j
jl	kl	l	$-il$	$-j$	k	-1	$-i$
kl	$-jl$	il	l	$-k$	$-j$	i	-1

хода к умножению матриц существует лишь возможность представить умножение октонионов $\breve{a}\breve{x}=\breve{b}$ умножением квадратной действительной матрицы 8×8 особой структуры **A** на действительный вектор-столбец **x**. В результате получим вектор-столбец **b** [9]. В качестве примера рассмотрим произведение двух октонионов $\breve{a}\breve{x}=\breve{b}$ в общем виде. В соответствии с табл. 1 действительные коэффициенты b_m октониона $\breve{b}$ вычисляются на основании системы равенств

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 - a_4x_4 - a_5x_5 - a_6x_6 - a_7x_7 - a_8x_8,\\
b_2 &= a_2x_1 + a_1x_2 - a_4x_3 + a_3x_4 - a_6x_5 + a_5x_6 + a_8x_7 - a_7x_8,\\
b_3 &= a_3x_1 + a_4x_2 + a_1x_3 - a_2x_4 - a_7x_5 - a_8x_6 + a_5x_7 + a_6x_8,\\
b_4 &= a_4x_1 - a_3x_2 + a_2x_3 + a_1x_4 - a_8x_5 + a_7x_6 - a_6x_7 + a_5x_8,\\
b_5 &= a_5x_1 + a_6x_2 + a_7x_3 + a_8x_4 + a_1x_5 - a_2x_6 - a_3x_7 - a_4x_8,\\
b_6 &= a_6x_1 - a_5x_2 + a_8x_3 - a_7x_4 + a_2x_5 + a_1x_6 + a_4x_7 - a_3x_8,\\
b_7 &= a_7x_1 - a_8x_2 - a_5x_3 + a_6x_4 + a_3x_5 - a_4x_6 + a_1x_7 + a_2x_8,\\
b_8 &= a_8x_1 + a_7x_2 - a_6x_3 - a_5x_4 + a_4x_5 + a_3x_6 - a_2x_7 + a_1x_8,
\end{aligned} \tag{3}$$

которая может быть записана в сокращенном матричном виде,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \tag{4}$$

или в явном виде:

a_1	$-a_2$	$-a_3$	$-a_4$	$-a_5$	$-a_6$	$-a_7$	$-a_8$		x_1		b_1
a_2	a_1	$-a_4$	a_3	$-a_6$	a_5	a_8	$-a_7$		x_2		b_2
a_3	a_4	a_1	$-a_2$	$-a_1$	$-a_8$	a_5	a_6		x_3		b_3
a_4	$-a_3$	a_2	a_1	$-a_7$	a_7	$-a_6$	a_5	$\times$	x_4	$=$	b_4
a_5	a_6	a_7	a_8	a_1	$-a_2$	$-a_3$	$-a_4$		x_5		b_5
a_6	$-a_5$	a_8	$-a_7$	a_2	a_1	a_4	$-a_3$		x_6		b_6
a_7	$-a_8$	$-a_5$	a_6	a_3	$-a_4$	a_1	a_2		x_7		b_7
a_8	a_7	$-a_6$	$-a_5$	a_4	a_3	$-a_2$	a_1		x_8		b_8

Тем не менее, имеются матричные представления октонионов, но с особыми правилами умножения используемых для этого матриц [10, 11]. В частности, матричное представление октонионов (1) может быть дано в терминах матриц Цорна 2×2:

$$\breve{a} \mapsto \begin{bmatrix} \dot{\alpha} & \dot{\mathbf{a}} \\ \dot{\mathbf{b}} & \dot{\beta} \end{bmatrix}, \tag{5}$$

где диагональные элементы являются комплексными скалярами, $\dot{\alpha} = a_1 + ia_5$, $\dot{\beta} = a_1 - ia_5$, а недиагональные элементы — трехмерными комплексными векторами:

$$\dot{\mathbf{a}} = \dot{\mathbf{a}}(\dot{a}_1, \dot{a}_2, \dot{a}_3),\ \dot{a}_1 = -a_2 + ia_6,\ \dot{a}_2 = -a_3 + ia_7,\ \dot{a}_3 = -a_4 + ia_8,$$

$$\dot{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{b}}(\dot{b}_1, \dot{b}_2, \dot{b}_3),\ \dot{b}_1 = a_2 + ia_6,\ \dot{b}_2 = a_3 + ia_7,\ \dot{b}_3 = a_4 + ia_8.$$

Умножение матриц (5) выполняется по специальному правилу:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}_a & \dot{\mathbf{a}}_a \\ \dot{\mathbf{b}}_a & \dot{\beta}_a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_x & \dot{\mathbf{a}}_x \\ \dot{\mathbf{b}}_x & \dot{\beta}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_a \dot{\alpha}_x + \dot{\mathbf{a}}_a \cdot \dot{\mathbf{b}}_x & \dot{\alpha}_a \dot{\mathbf{a}}_x + \dot{\beta}_x \dot{\mathbf{a}}_a - \dot{\mathbf{b}}_a \times \dot{\mathbf{b}}_x \\ \dot{\alpha}_x \dot{\mathbf{b}}_a + \dot{\beta}_a \dot{\mathbf{b}}_x + \dot{\mathbf{a}}_a \times \dot{\mathbf{a}}_x & \dot{\beta}_a \dot{\beta}_x + \dot{\mathbf{b}}_a \cdot \dot{\mathbf{a}}_x \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Как следует из соотношения (6), при вычислении элементов побочной диагонали матрицы обычное правило умножения матриц дополняется векторными произведениями векторов $+\dot{\mathbf{a}}_a \times \dot{\mathbf{a}}_x$ и $-\dot{\mathbf{b}}_a \times \dot{\mathbf{b}}_x$, а $\dot{\mathbf{a}}_a \cdot \dot{\mathbf{b}}_x$ и $\dot{\mathbf{b}}_a \cdot \dot{\mathbf{a}}_x$ являются скалярными произведениями векторов.

Другим возможным матричным представлением октонионов (1) может быть использование матриц

$$\breve{a} \mapsto \begin{bmatrix} \dot{\alpha} & \dot{\mathbf{A}} \\ \dot{\mathbf{B}} & \dot{\beta} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где $\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{a}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ и $\dot{\mathbf{B}} = \dot{\mathbf{b}} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ являются комплексными матрицами 2×2, так как $\boldsymbol{\sigma}$ представляют собой матрицы Паули:

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

В этом случае умножение матриц (7) выполняется так:

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha}_a & \dot{\mathbf{A}}_a \\ \dot{\mathbf{B}}_a & \dot{\beta}_a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_x & \dot{\mathbf{A}}_x \\ \dot{\mathbf{B}}_x & \dot{\beta}_x \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dot{\alpha}_a \dot{\alpha}_x + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\dot{\mathbf{A}}_a \dot{\mathbf{B}}_x) & \dot{\alpha}_a \dot{\mathbf{A}}_x + \dot{\beta}_x \dot{\mathbf{A}}_a + \frac{i}{2}[\dot{\mathbf{B}}_a, \dot{\mathbf{B}}_x] \\ \dot{\alpha}_x \dot{\mathbf{B}}_a + \dot{\beta}_a \dot{\mathbf{B}}_x - \frac{i}{2}[\dot{\mathbf{A}}_a, \dot{\mathbf{A}}_x] & \dot{\beta}_a \dot{\beta}_x + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\dot{\mathbf{B}}_a \dot{\mathbf{A}}_x) \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где $[\dot{\mathbf{A}}, \dot{\mathbf{B}}] = \dot{\mathbf{A}}\,\dot{\mathbf{B}} - \dot{\mathbf{B}}\,\dot{\mathbf{A}}$ — коммутатор матриц $\dot{\mathbf{A}}$ и $\dot{\mathbf{B}}$; $\mathrm{Tr}\,(\dot{\mathbf{A}})$ — след матрицы. Заметим, что следы матриц, расположенных на побочной диагонали представлений октонионов (7), (8), равны нулю.

Рассмотрим использование приведенных матричных представлений октонионов (5), (7) на конкретном числовом примере. Пусть

$$\breve{a} = 1+2i+3j+4k+5l+6il+7jl+8kl,$$

$$\breve{x} = 2+3i+4j+5k+6l+7il+8jl+9kl.$$

Тогда на основании (3) произведение рассматриваемых октонионов соответствует октониону $\breve{b} = -236+6i+8j+10k+28l+18il+16jl+26kl$.

Согласно матричному представлению октонионов (5) умножение октонионов $\breve{a}$ и $\breve{x}$ соответствует умножению матриц в левой части матричного выражения

$$\begin{bmatrix} 1+i5 & \begin{matrix}(-2+i6,\\ -3+i7,\\ -4+i8)\end{matrix} \\ \begin{matrix}(2+i6,\\ 3+i7,\\ 4+i8)\end{matrix} & 1-i5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2+i6 & \begin{matrix}(-3+i7,\\ -4+i8,\\ -5+i9)\end{matrix} \\ \begin{matrix}(3+i7,\\ 4+i8,\\ 5+i9)\end{matrix} & 2-i6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -236+i28 & \begin{matrix}(-6+i18,\\ -8+i16,\\ -10+i26)\end{matrix} \\ \begin{matrix}(6+i18,\\ 8+i16,\\ 10+i26)\end{matrix} & -236-i28 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

В результате умножения матриц по правилу (6) получим матрицу в правой части матричного равенства (9), которая соответствует матричному представлению (5) октониона $\breve{b}$.

Для матричного представления октонионов (7) умножение октонионов $\breve{a}$ и $\breve{x}$ осуществляется в соответствии с правилом (8) и определяется соотношением

$$\begin{bmatrix} 1+i5 & \begin{matrix}-4+i8 & 5+i9\\ -9+i3 & 4-i8\end{matrix} \\ \begin{matrix}4+i8 & 9+i3\\ -5+i9 & -4-i8\end{matrix} & 1-i5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2+i6 & \begin{matrix}-5+i9 & 5+i11\\ -11+i3 & 5-i9\end{matrix} \\ \begin{matrix}5+i9 & 11+i3\\ -5+i11 & -5-i9\end{matrix} & 2-i6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -236+i28 & \begin{matrix}-10+i26 & 10+i26\\ -22+i10 & 10-i26\end{matrix} \\ \begin{matrix}10+i26 & 22+i10\\ -10+i26 & -10-i26\end{matrix} & -236-i28 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

При этом матрица в правой части выражения (10) соответствует матричному представлению (7) октониона $\breve{b}$.

Рассмотрим еще один вариант матричного представления октонионов, основанный на использовании квадратной матрицы $\mathbf{A}$ в выражении (4), элементами которой являются действительные коэффициенты октониона $\breve{a}$:

$$\breve{a} \mapsto \mathbf{A}. \tag{11}$$

Матрицу **A** можно рассматривать как левое матричное представление октониона $\breve{a}$ над $\Re$. Аналогично может быть построена матрица, имеющая смысл правого матричного представления октониона, структура которой отличается от структуры матрицы **A** противоположным знаком всех элементов кроме $\mathbf{A}(i,1)$, $\mathbf{A}(1,j)$ и $\mathbf{A}(i,i)$ [9]. Однако для того чтобы матрицы 8×8 со структурой, соответствующей структуре указанных матриц, в полной мере являлись представлениями октонионов, должны быть изменены правила их умножения.

Рассмотрим произведение двух квадратных матриц, **A** и **X**, таких, что согласно (11) $\breve{a} \mapsto \mathbf{A}$, а $\breve{x} \mapsto \mathbf{X}$. Используя правила обычного умножения матриц, получаем выражения для элементов $b(i,j)$ результирующей матрицы **B** такой, что **AX** = **B**:

$$
\begin{gathered}
b_1 = b(1,1) = a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 - a_4x_4 - a_5x_5 - a_6x_6 - a_7x_7 - a_8x_8,\\
b_2 = b(2,1) = a_2x_1 + a_1x_2 - a_4x_3 + a_3x_4 - a_6x_5 + a_5x_6 + a_8x_7 - a_7x_8,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
-b_7 \neq b(6,4) = -a_6x_4 - \underline{a_5x_3 - a_8x_2} - a_7x_1 + \underline{a_2x_8} - a_1x_7 + a_4x_6 + \underline{a_3x_5}, \qquad (12)\\
b_6 \neq b(7,4) = -a_7x_4 - \underline{a_8x_3 - a_5x_2} + a_6x_1 + \underline{a_3x_8} + a_4x_7 + a_1x_6 - \underline{a_2x_5},\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
b_2 \neq b(7,8) = -a_7x_8 + a_8x_7 - \underline{a_5x_6 + a_6x_5 - a_3x_4 + a_4x_3} + a_1x_2 + a_2x_1,\\
b_1 = b(8,8) = -a_8x_8 - a_7x_7 - a_6x_6 - a_5x_5 - a_4x_4 - a_3x_3 - a_2x_2 + a_1x_1.
\end{gathered}
$$

В каждом из выражений (12) слева приведены действительные коэффициенты b_m октониона $\breve{b}$ (со своими знаками), которым должны соответствовать элементы $b(i,j)$ матрицы **B** для того, чтобы структура указанной матрицы удовлетворяла требованию $\breve{b} \mapsto \mathbf{B}$. Как следует из выражений (12), при обычном умножении матриц не все элементы $b(i,j)$ матрицы **B** соответствуют требуемым действительным коэффициентам b_m октониона $\breve{b}$, что в (12) обозначено знаком $\neq$. Сопоставляя правые части (12), определяющие элементы $b(i,j)$ матрицы **B**, и правые части выражений (3), определяющие составляющие b_m октониона $\breve{b}$, можно заметить следующее. Для того чтобы матрица **B** имела требуемую для матричного представления октониона $\breve{b}$ структуру, необходимо при определении элементов $b(i,j)$ подчеркнутые слагаемые в правой части (12) в процессе сложения учитывать с противоположным знаком. Это обстоятельство требует разработки специального подхода к умножению матриц вида **A**, представляющих октонионы.

Как следует из рассматриваемых выражений, элемент $b(i,j)$ матрицы **B** вычисляется согласно общеизвестному правилу умножения матриц как сумма восьми элементов:

$$b(i,j)=\sum_{k=1}^{8} b_k(i,j), \qquad (13)$$

где $b_k(i,j)=a(i,k)\,x(k,j)$, $a(i,k)$ — k-й элемент i-й строки матрицы **A**; $x(k,j)$ — k-й элемент j-го столбца матрицы **X**.

Согласно равенству (13) в процессе умножения матриц индекс k последовательно пробегает по восьми элементам i-й строки матрицы **A** и j-го столбца матрицы **X**, формируя таким образом связанные с этим индексом восемь слагаемых $b_k(i,j)$ элемента $b(i,j)$. Проанализировав выражения (12), с учетом этого можно предложить сравнительно простой алгоритм умножения, позволяющий использовать рассматриваемые матрицы для представления октонионов.

Алгоритм неассоциативного умножения матриц. В процессе умножения матриц, представляющих октонионы, вычисление элемента $b(i,j)$ (13) необходимо скорректировать с учетом двух условий:

1) четыре слагаемых $b_k(i,j)$ с индексами $k=1$, $k=i$, $k=j$ и $k=m$, где m — индекс действительного коэффициента b_m октониона $\breve{b}$ (12), суммируются со своими знаками, а четыре остальных — с противоположными;

2) при совпадении хотя бы двух из четырех указанных параметров (1, i, j, m) все восемь слагаемых $b_k(i,j)$ суммируются со своими знаками.

Например, при вычислении элемента $b(7,4)$ слагаемые b_1, b_7, b_4 и b_6 должны суммироваться со своими знаками, а слагаемые b_2, b_3, b_5 и b_8 — с противоположными. В то же время, для элементов $b(2,1)$ и $b(8,8)$ все восемь слагаемых b_k должны суммироваться со своими знаками, так как в первом случае $j=1$ и $i=m$, а во втором — $i=j$ и $m=1$.

Используя предложенный алгоритм для умножения матриц **A** и **X**, в рассматриваемом числовом примере получим матрицу **B** такую, что $\breve{b}\mapsto\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} -236 & -6 & -8 & -10 & -28 & -18 & -16 & -26 \\ 6 & -236 & -10 & 8 & -18 & 28 & 26 & -16 \\ 8 & 10 & -236 & -6 & -16 & -26 & 28 & 18 \\ 10 & -8 & 6 & -236 & -26 & 16 & -18 & 28 \\ 28 & 18 & 16 & 26 & -236 & -6 & -8 & -10 \\ 18 & -28 & 26 & -16 & 6 & -236 & 10 & -8 \\ 16 & -26 & -28 & 18 & 8 & -10 & -236 & 6 \\ 26 & 16 & -18 & -28 & 10 & 8 & -6 & -236 \end{bmatrix}.$$

Следует обратить внимание на свойство инвариантности предложенного алгоритма умножения матриц относительно различных перестановок слагаемых b_k в правой части выражений (12). Так, при расположении указанных слагаемых в порядке возрастания индекса x_k положение каждого из слагаемых b_k в цепочке сложений изменяется, однако приведенный алгоритм умножения матриц остается таким же, что легко проверить на примере вычисления элемента $b(7,4)$. Это относится так же к случаю, когда слагаемые располагаются в порядке возрастания индекса a_k, а также к другим закономерностям, связанным с различными симметрическими перестановками, в том числе и при использовании правых матричных представлений октонионов.

Расщепленные октонионы (Split Octonions) отличаются от обычных октонионов тем, что при их конструировании способом удвоения кватернионов квадрат мнимой единицы l вместо значения –1 принимает значение +1 ($l^2=+1$). Такое построение числовой системы приводит к тому, что сигнатура ее квадратичной формы вместо (8, 0,8) для обычных октонионов становится равной (4, 4,0), что, как известно, приводит к появлению делителей нуля. Термин «расщепленный октонион» и обусловлен, по-видимому, сигнатурой (4, 4, 0), при которой в равной степени распределяются знаки «+» и «–» в квадратичной форме числовой системы, что расщепляет ее на две части. Таким образом, расщепленные октонионы представляют собой некоммутативную, неассоциативную, восьмимерную алгебру с делителями нуля:

$$\widehat{a}=a_1+a_2i+a_3j+a_4k+a_5l+a_6il+a_7jl+a_8kl. \tag{14}$$

Умножение базисных элементов (14) осуществляется в соответствии с табл. 2, из которой следует, что по сравнению с умножением обычных октонионов (см. табл. 1) изменения относятся к правой нижней четверти таблицы, в которой все знаки произведений базисных элементов изменяются

Таблица 2. **Умножение базисных элементов расщепленных октонионов**

1	i	j	k	l	il	jl	kl
i	-1	k	$-j$	il	$-l$	$-kl$	jl
j	$-k$	-1	i	jl	kl	$-l$	$-il$
k	j	$-i$	-1	kl	$-jl$	il	$-l$
l	$-il$	$-jl$	$-kl$	1	$-i$	$-j$	$-k$
il	l	$-kl$	jl	i	1	k	$-j$
jl	kl	l	$-il$	j	$-k$	1	i
kl	$-jl$	il	l	k	j	$-i$	1

на противоположные. В соответствии с табл. 2 действительные коэффициенты b_m расщепленного октониона $\widehat{b} = \widehat{a}\widehat{x}$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 - a_4x_4 + a_5x_5 + a_6x_6 + a_7x_7 + a_8x_8,\\
b_2 &= a_2x_1 + a_1x_2 - a_4x_3 + a_3x_4 + a_6x_5 - a_5x_6 - a_8x_7 + a_7x_8,\\
b_3 &= a_3x_1 + a_4x_2 + a_1x_3 - a_2x_4 + a_7x_5 + a_8x_6 - a_5x_7 - a_6x_8,\\
b_4 &= a_4x_1 - a_3x_2 + a_2x_3 + a_1x_4 + a_8x_5 - a_7x_6 + a_6x_7 - a_5x_8,\\
b_5 &= a_5x_1 + a_6x_2 + a_7x_3 + a_8x_4 + a_1x_5 - a_2x_6 - a_3x_7 - a_4x_8,\\
b_6 &= a_6x_1 - a_5x_2 + a_8x_3 - a_7x_4 + a_2x_5 + a_1x_6 + a_4x_7 - a_3x_8,\\
b_7 &= a_7x_1 - a_8x_2 - a_5x_3 + a_6x_4 + a_3x_5 - a_4x_6 + a_1x_7 + a_2x_8,\\
b_8 &= a_8x_1 + a_7x_2 - a_6x_3 - a_5x_4 + a_4x_5 + a_3x_6 - a_2x_7 + a_1x_8,
\end{aligned} \tag{15}$$

которые в сокращенном матричном виде записываются аналогично (4) в виде

$$\mathbf{A}'\mathbf{x}' = \mathbf{b}', \tag{16}$$

или в явном виде:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline
a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\\hline
a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 & a_6 & -a_5 & -a_8 & a_7 \\\hline
a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 & a_7 & a_8 & -a_5 & -a_6 \\\hline
a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 & a_8 & -a_7 & a_6 & -a_5 \\\hline
a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\\hline
a_6 & -a_5 & a_8 & -a_7 & a_2 & a_1 & a_4 & -a_3 \\\hline
a_7 & -a_8 & -a_5 & a_6 & a_3 & -a_4 & a_1 & a_2 \\\hline
a_8 & a_7 & -a_6 & -a_5 & a_4 & a_3 & -a_2 & a_1 \\\hline
\end{array}
\times
\begin{array}{|c|}\hline x_1\\\hline x_2\\\hline x_3\\\hline x_4\\\hline x_5\\\hline x_6\\\hline x_7\\\hline x_8\\\hline\end{array}
=
\begin{array}{|c|}\hline b_1\\\hline b_2\\\hline b_3\\\hline b_4\\\hline b_5\\\hline b_6\\\hline b_7\\\hline b_8\\\hline\end{array}.$$

Следует заметить, что матрица $\mathbf{A}'$ в матричном соотношении (16) отличается от аналогичной матрицы $\mathbf{A}$ в матричном соотношении (4) противоположными значениями элементов в правой верхней четверти.

Изменение правил умножения расщепленных октонионов (14) по сравнению с обычными октонионами требует, в свою очередь, некоторой корректировки матричных представлений [10, 11]. Так, при использовании матриц Цорна 2×2 возможно следующее матричное представление расщепленных октонионов:

$$\widehat{a} \mapsto \begin{bmatrix} \alpha & \mathbf{a} \\ \mathbf{b} & \beta \end{bmatrix}, \tag{17}$$

где $\alpha = a_1 + a_5$; $\beta = a_1 - a_5$; $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$; $\mathbf{b} = -\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$; $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_1(a_2, a_3, a_4)$; $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2(a_6, a_7, a_8)$. Таким образом, α и β в данном случае являются уже действительными числами, а $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — действительными векторами. При этом умножение матриц (17) осуществляется с небольшой модификацией правила (6), а именно:

$$\begin{bmatrix} \alpha_a & \mathbf{a}_a \\ \mathbf{b}_a & \beta_a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_x & \mathbf{a}_x \\ \mathbf{b}_x & \beta_x \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_a \alpha_x + \mathbf{a}_a \cdot \mathbf{b}_x & \alpha_a \mathbf{a}_x + \beta_x \mathbf{a}_a + \mathbf{b}_a \times \mathbf{b}_x \\ \alpha_x \mathbf{b}_a + \beta_a \mathbf{b}_x - \mathbf{a}_a \times \mathbf{a}_x & \beta_a \beta_x + \mathbf{b}_a \cdot \mathbf{a}_x \end{bmatrix}. \tag{18}$$

По аналогии с приведенным выше числовым примером рассмотрим два расщепленных октониона:

$$\widehat{a} = 1 + 2i + 3j + 4k + 5l + 6il + 7jl + 8kl,$$

$$\widehat{x} = 2 + 3i + 4j + 5k + 6l + 7il + 8jl + 9kl.$$

На основании (15) произведение указанных расщепленных октонионов соответствует расщепленному октониону

$$\widehat{b} = 164 + 6i + 16j + 14k + 28l + 18il + 16jl + 26kl.$$

Согласно (17) произведение октонионов $\widehat{a}\widehat{x}$ по правилам умножения (18) в числовом матричном виде определяется произведением матриц в левой части матричного выражения

$$\begin{bmatrix} 6 & (-4, -4, -4) \\ (-8, -10, -12) & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & (-4, -4, -4) \\ (-10, -12, -14) & -4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 192 & (-12, 0, -12) \\ (-24, -32, -40) & 136 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

В результате указанного умножения получим матрицу в правой части матричного равенства (19), которая соответствует матричному представлению (17) расщепленного октониона $\widehat{b}$.

Матричное представление октонионов (7), в котором использованы матрицы Паули, для расщепленных октонионов имеет вид

$$\widehat{a} \mapsto \begin{bmatrix} \alpha & \dot{\mathbf{A}}' \\ \dot{\mathbf{B}}' & \beta \end{bmatrix}, \tag{20}$$

где, как и ранее, $\dot{\mathbf{A}}'=\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ и $\dot{\mathbf{B}}'=\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\sigma}$, а умножение матриц (20) выполняется так:

$$\begin{bmatrix} \alpha_a & \dot{\mathbf{A}}'_a \\ \dot{\mathbf{B}}'_a & \beta_a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha_x & \dot{\mathbf{A}}'_x \\ \dot{\mathbf{B}}'_x & \beta_x \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_a\alpha_x + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\dot{\mathbf{A}}'_a\dot{\mathbf{B}}'_x) & \alpha_a\dot{\mathbf{A}}'_x + \beta_x\dot{\mathbf{A}}'_a - \frac{i}{2}[\dot{\mathbf{B}}'_a, \dot{\mathbf{B}}'_x] \\ \alpha_x\dot{\mathbf{B}}'_a + \beta_a\dot{\mathbf{B}}'_x + \frac{i}{2}[\dot{\mathbf{A}}'_a, \dot{\mathbf{A}}'_x] & \beta_a\beta_x + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\dot{\mathbf{B}}'_a\dot{\mathbf{A}}'_x) \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Рассматриваемый численный пример с учетом соотношения (21) имеет следующий вид:

$$\begin{bmatrix} 6 & \begin{matrix} -4+i0 & -4+i4 \\ -4-i4 & 4+i0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -12+i0 & -8+i10 \\ -8-i10 & 12+i0 \end{matrix} & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 & \begin{matrix} -4+i0 & -4+i4 \\ -4-i4 & 4+i0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -14+i0 & -10+i12 \\ -10-i12 & 14+i0 \end{matrix} & -4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 192 & \begin{matrix} -12+i0 & -12+i0 \\ -12-i0 & 12+i0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -40+i0 & -24+i32 \\ -24-i32 & 40+i0 \end{matrix} & 136 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Легко проверить, что в правой части выражения (22) полученная в результате умножения матрица соответствует матричному представлению расщепленного октониона (20).

Приведенные примеры свидетельствуют о том, что переход от матричного представления обычных октонионов к матричному представлению расщепленных октонионов требует определенной корректировки используемых матриц и правил их умножения. Рассмотренный подход к матричному представлению октонионов позволяет использовать предлагаемый алгоритм умножения матриц и в случае матричного представления расщепленных октонионов. Это следует из анализа полученных обычным умножением матриц $\mathbf{A}'\mathbf{X}'$ элементов $b'(i,j)$ при их сопоставлении с коэффициентами b_m расщепленного октониона $\widehat{b}$ (15). Указанное сопоставление подтверждает необходимость изменения знаков слагаемых $b'_k(i,j)$ на противоположные, которые располагаются в цепочках суммирования на тех же позициях, что и при умножении матриц $\mathbf{AX}$. Для приведенного числового примера произведение матрицы $\mathbf{A}'$ такой, что $\widehat{a} \mapsto \mathbf{A}'$, на матрицу $\mathbf{X}'$ такую, что $\hat{x} \mapsto \mathbf{X}'$, по предложенному алгоритму умножения матриц приводит в результате к матрице $\mathbf{B}'$, такой, что $b \mapsto \mathbf{B}'$:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 164 & -6 & -16 & -14 & 28 & 18 & 16 & 26 \\ 6 & 164 & -14 & 16 & 18 & -28 & -26 & 16 \\ 16 & 14 & 164 & -6 & 16 & 26 & -28 & -18 \\ 14 & -16 & 6 & 164 & 26 & -16 & 18 & -28 \\ 28 & 18 & 16 & 26 & 164 & -6 & -16 & -14 \\ 18 & -28 & 26 & -16 & 6 & 164 & 14 & -16 \\ 16 & -26 & -28 & 18 & 16 & -14 & 164 & 6 \\ 26 & 16 & -18 & -28 & 14 & 16 & -6 & 164 \end{bmatrix}.$$

Комплексные октонионы (Complex Octonions) с комплексными коэффициентами (биоктонионы)

$$\dot{\breve{a}} = \dot{a}_1 + \dot{a}_2 i + \dot{a}_3 j + \dot{a}_4 k + \dot{a}_5 l + \dot{a}_6 il + \dot{a}_7 jl + \dot{a}_8 kl, \qquad (23)$$

где $\dot{a}_m = a'_m + \mathrm{i}a''_m \in \mathbb{C}$, $m = 1, 2, ..., 8$, визуализируются как расщепленные октонионы при переходе к базисным элементам; $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

$$u_1 = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i}l),\ u_2 = \frac{1}{2}(i - \mathrm{i}il),\ u_3 = \frac{1}{2}(j - \mathrm{i}jl),\ u_4 = \frac{1}{2}(k - \mathrm{i}kl),$$
$$u_5 = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{i}l),\ u_6 = \frac{1}{2}(i + \mathrm{i}il),\ u_7 = \frac{1}{2}(j + \mathrm{i}jl),\ u_8 = \frac{1}{2}(k + \mathrm{i}kl), \qquad (24)$$

где i — мнимая единица, коммутирующая со всеми мнимыми единицами октониона [4]. Они также применяются в задачах моделирования физических процессов. С учетом (24) выражение (23) принимает вид

$$\dot{\breve{a}} = \dot{b}_1 u_1 + \dot{b}_2 u_2 + \dot{b}_3 u_3 + \dot{b}_4 u_4 + \dot{b}_5 u_5 + \dot{b}_6 u_6 + \dot{b}_7 u_7 + \dot{b}_8 u_8. \qquad (25)$$

При этом коэффициенты $\dot{a}_m$ в выражении (23) и $\dot{b}_m$ в выражении (25) связаны между собой соотношениями

$$\dot{b}_1 = \dot{a}_1 - \mathrm{i}\dot{a}_5,\ \dot{b}_2 = \dot{a}_2 + \mathrm{i}\dot{a}_6,\ \dot{b}_3 = \dot{a}_3 + \mathrm{i}\dot{a}_7,\ \dot{b}_4 = \dot{a}_4 + \mathrm{i}\dot{a}_8,$$
$$\dot{b}_5 = \dot{a}_1 + \mathrm{i}\dot{a}_5,\ \dot{b}_6 = \dot{a}_2 - \mathrm{i}\dot{a}_6,\ \dot{b}_7 = \dot{a}_3 - \mathrm{i}\dot{a}_7,\ \dot{b}_8 = \dot{a}_4 - \mathrm{i}\dot{a}_8,$$
$$\dot{a}_1 = \frac{1}{2}(\dot{b}_1 + \dot{b}_5),\ \dot{a}_2 = \frac{1}{2}(\dot{b}_2 + \dot{b}_6),\ \dot{a}_3 = \frac{1}{2}(\dot{b}_3 + \dot{b}_7), \dot{a}_4 = \frac{1}{2}(\dot{b}_4 + \dot{b}_8),$$
$$\dot{a}_5 = \frac{1}{2}\,\mathrm{i}(\dot{b}_1 - \dot{b}_5),\ \dot{a}_6 = \frac{1}{2}\,\mathrm{i}(-\dot{b}_2 + \dot{b}_6),\ \dot{a}_7 = \frac{1}{2}\,\mathrm{i}(-\dot{b}_3 + \dot{b}_7),\ \dot{a}_8 = \frac{1}{2}\,\mathrm{i}(-\dot{b}_4 + \dot{b}_8).$$

Таблица 3. **Умножение базисных элементов *u***

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
u_1	u_1	u_2	u_3	u_4	0	0	0	0
u_2	0	0	u_8	$-u_7$	u_2	$-u_1$	0	0
u_3	0	$-u_8$	0	u_6	u_3	0	$-u_1$	0
u_4	0	u_7	$-u_6$	0	u_4	0	0	$-u_1$
u_5	0	0	0	0	u_5	u_6	u_7	u_8
u_6	u_6	$-u_5$	0	0	0	0	u_4	$-u_3$
u_7	u_7	0	$-u_5$	0	0	$-u_4$	0	u_2
u_8	u_8	0	0	$-u_5$	0	u_3	$-u_2$	0

Умножение базисных элементов (24) осуществляется в соответствии с табл. 3, характерной особенностью которой является то, что в ней делители нуля представлены в явном виде (визуализированы), например $u_1 u_5 = 0$.

Поскольку операции сложения и умножения для комплексных и действительных чисел подчиняются одним и тем же алгебраическим законам, матричным представлением комплексных октонионов могут быть матрицы, структура которых соответствует структуре матрице **A**, но с комплексными элементами, соответствующими комплексным коэффициентам октониона (23): $\dot{\breve{a}} \mapsto \dot{\mathbf{A}}$. Для умножения таких матриц также может быть использован предложенный выше алгоритм неассоциативного умножения. При этом понятие «противоположный знак» комплексного слагаемого $\dot{b}_k(i,j)$ следует понимать, как слагаемое $-\dot{b}_k(i,j)$, а слагаемого $-\dot{b}_k(i,j)$ — как слагаемое $\dot{b}_k(i,j)$.

Рассматривая в качестве числового примера комплексные октонионы

$$\dot{\breve{a}} = (1-\mathrm{i}2) + (2-\mathrm{i}3)\, i + (3-\mathrm{i}4)\, j + (4-\mathrm{i}5)\, k + (5+\mathrm{i}6)\, il +$$

$$+ 7-\mathrm{i}8)\, jl + (8-\mathrm{i}9)\, kl,$$

$$\dot{\breve{x}} = (2+\mathrm{i}3) + (3+\mathrm{i}4)\, i + (4+\mathrm{i}5)\, j + (5+\mathrm{i}6)\, k + (6+\mathrm{i}7)\, l + (7+\mathrm{i}8)\, il +$$

$$+ (8+\mathrm{i}9)\, jl + (9+\mathrm{i}10)\, kl$$

и используя для их умножения табл. 1, получаем комплексный октонион

$$\dot{\breve{b}} = (-552+\mathrm{i}6) + (22-\mathrm{i}4)\, i + (28-\mathrm{i}6)\, j + (34-\mathrm{i}8)\, k +$$

$$+ (72+\mathrm{i}22)\, l + (54-\mathrm{i}4)\, il + (52-\mathrm{i}14)\, jl + (74+\mathrm{i}0)\, kl.$$

Произведение матрицы $\dot{\mathbf{A}}$, являющейся представлением комплексного октониона $\breve{\dot{a}}$ ($\breve{\dot{a}} \mapsto \dot{\mathbf{A}}$), на матрицу $\dot{\mathbf{X}}$, являющуюся представлением комплексного октониона $\breve{\dot{x}}$ ($\breve{\dot{x}} \mapsto \dot{\mathbf{X}}$), по предложенному алгоритму умножения матриц приводит в результате к матрице $\dot{\mathbf{B}}$ такой, что $\breve{\dot{b}} \mapsto \dot{\mathbf{B}}$:

$$\dot{\mathbf{B}} =$$

$$= \begin{bmatrix} -552+i6 & -22+i4 & -28+i6 & -34+i8 & -72-i22 & -54+i4 & -52+i14 & -74+i0 \\ 22-i4 & -552+i6 & -34+i8 & 28-i6 & -54+i4 & 72+i22 & 74+i0 & -52+i14 \\ 28-i6 & 34-i8 & -552+i6 & -22+i4 & -52+i14 & -74+i0 & 72+i22 & 54-i4 \\ 34-i4 & -28+i6 & 22-i4 & -552+i6 & -74+i0 & 52-i14 & -54+i4 & 72+i22 \\ 72+i22 & 54-i4 & 52-i14 & 74+i0 & -552+i6 & -22+i4 & -28+i6 & -34+i8 \\ 54-i4 & -72-i22 & 74+i0 & -52+i14 & 22-i4 & -552+i6 & 34-i8 & -28+i6 \\ 52-i14 & -74+i0 & -72-i22 & 54-i4 & 28-i6 & -34+i8 & -552+i6 & 22-i4 \\ 74+i0 & 52-i14 & -54+i4 & -72-i22 & 34-i8 & 28\text{-}i6 & -22+i4 & -552+i6 \end{bmatrix}.$$

Выводы

При решении различных физических задач все чаще используются гиперкомплексные числовые системы большой размерности, в частности октонионы. При этом теоретический и практический интерес вызывают их возможные изоморфные матричные представления. Предложенный алгоритм неассоциативного умножения матриц позволяет построить матричные представления октонионов с использованием матриц особой структуры размерности 8×8, элементами которых являются действительные или комплексные коэффициенты октонионов. Предлагаемый подход может быть использован как для представления обычных октонионов с делением, так и для расщепленных октонионов, а также октонионов с комплексными коэффициентами.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Gamba A.* Maxwell's equations in octonion form // Nuovo Cimento, A, 1998, Vol. 111, № 3, p. 293—299.
2. *Gogberashvili M.* Octonionic electrodynamics// Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2006, Vol. 39, № 22, p. 7099—7104.
3. *Nurowski P.* Split Octonions and Maxwell Equations// Acta Physica Polonica A, 2009, Vol. 116, No. 6, p. 992—993.
4. *Chanyal B.C.* Octonion generalization of Pauli and Dirac matrices// International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 2015,Vol. 12, No. 1, p.1550007–1–1550007–24.
5. *Baez J.C.* The octonions // Bulletin of the American Mathematical Society, 2001, 39, № 2, p. 145—205.
6. *Розенфельд Б.А.* Неевклидовы геометрии. М.: ГИТТЛ, 1955, 744 с.

7. *Синьков М.В., Калиновский Я.А., Бояринова Ю.Е.* Матричные представления изоморфных гиперкомплексных числовых систем // Реєстрація, зберігання і оброб. даних, 2010, 12, № 4, с. 43—53.
8. *Клипков С.И.* Обобщенный анализ матричных представлений ассоциативных гиперкомплексных числовых систем, используемых в задачах энергетики // Там же, 2014, **16**, № 2, с. 28—41.
9. *Tian Y.* Matrix Representations of Octonions and their Applications// Advances in Applied Clifford Algebras, 2000, Vol. 10, No. 1, p. 61—90.
10. *Zorn M.* Abhandlungen aus dem Mathematischen. Seminar der Universitat Hamburg, 1933 No. 9, p. 395—402.
11. *Daboul J., Delbourgo R.* Matrix representation of octonions and generalizations// Journal of Mathematical Physics, 1999, No. 40, p. 4134—4150.

Получена 07.05.19

REFERENCES

1. Gamba, A. (1998), “Maxwell’s equations in octonion form”, *IL Nuovo Cimento A*, Vol. 111, no. 3, pp. 293-299.
2. Gogberashvili, M. (2006), “Octonionic electrodynamics”, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, Vol. 39, mo. 22, pp. 7099-7104.
3. Nurowski, P. (2009), “Split Octonions and Maxwell Equations”, *Acta Physica Polonica A*, Vol. 116, no. 6, pp. 992-993.
4. Chanyal, B.C. (2015), “Octonion generalization of Pauli and Dirac matrices”, *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, Vol. 12, no. 1, pp. 1550007-1- 1550007-24.
5. Baez, J.C. (2001), “The octonions”, *Bulletin of the American Mathematical Society*, Vol. 39, no. 2, pp. 145-205.
6. Rozenfeld B.A. (1955), *Neyevklidovy geometrii [Non-Euclidean Geometries]*, GITTL, Moscow, SSSR.
7. Sinkov, M. V., Kalinovsky, Ya.A. and Boyarinova, Yu.E., (2010), “Matrix Representations of Isomorphic Hypercomplex Numerical Systems”, *Reyestratsiya, zberihannya i obrobka.* Danykh, Vol. 12, no. 4. pp. 43-53.
8. Klipkov, S.I. (2014), “The generalized analysis of matrix representations of associative hypercomplex numerical systems used in problems of power engineering”, *Reyestratsiya, zberihannya i obrobka. Danykh*, Vol. 16, no. 2. pp. 28-41.
9. Tian, Y. (2000), “Matrix Representations of Octonions and their Applications”, *Advances in Applied Clifford Algebras*, Vol. 10, no. 1, pp. 61-90.
10. Zorn, M. (1933), “Treatises from the Mathematical”, Seminar of the University of Hamburg, no. 9, pp. 395-402.
11. Daboul, J. and Delbourgo, R. (1999) “Matrix representation of octonions and generalizations”, *Journal of Mathematical Physics*, no. 40, pp. 4134-4150.

Received 07.05.19

С.І. Кліпков

ДЕЯКІ ОСОБЛИВОСТІ МАТРИЧНИХ ПРЕДСТАВЛЕНЬ ОКТОНІОНІВ

Розглянуто проблеми матричних представлень нормованих октоніонів з діленням, а також розщеплених октоніонів, обумовлені неасоціативним множенням. Запропоновано алгоритм множення матриць, що дозволяє сформулювати новий підхід до матричного представлення октоніонів, який може бути використаний для представлення як звичайних, так і розщеплених октоніонів. Наведено числові приклади матричних представлень октоніонів.

Ключові слова: октоніони, розщеплені октоніони,неасоціативність, матричні представлення числових систем.

S.I. Klipkov

SOME FEATURES OF THE MATRIX REPRESENTATIONS OF THE OCTONIONS

The problems of matrix representations of normalized octonions with division, as well as split octonions due to non-associative multiplication are considered. An algorithm for matrix multiplication is proposed, which makes it possible to formulate a new approach to the matrix representation of octonions, which can equally be used to represent both ordinary and split octonions. The examples illustrating the issues raised in the article are given.

Keywords: octonions, split octonions, nonassociative, matrix representations of number systems.

КЛИПКОВ Сергей Иванович, канд. техн. наук, вед. инженер Государственного предприятия Национальная энергетическая компания «Укрэнерго». В 1974 г. окончил Киевский политехнический ин-т. Область научных исследований — электроэнергетика, гиперкомплексные числовые системы.