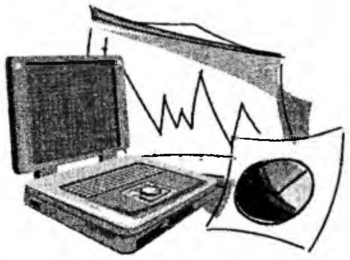
ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ



УДК 338:658:[519.7]

Кочура Є.В.

ОПТИМІЗАЦІЯ ОБСЯГІВ ВИРОБНИЦТВА ЗА ДОПОМОГОЮ МОДЕЛІ НЕЙМАНА

Встановлено й обгрунтовано, що оптимізацію обсягів виробництва на базі використання моделі Неймана можливо виконати шляхом рішення двоїстої задачі лінійного програмування.

It has been established and grounded that optimization of the volume of production with the aid of the Neiman model can be achieved by solving the task of linear programming.

Першою і найбільш відомою абстрактною моделлю економіки, що розширюється, є модель Дж. фон Неймана [2].

Модель Неймана задається парою матриць A и B. Матриця $A=(a_{ij})$ характеризує витрати продуктів $i=1,\ \ldots,\ m$ при використанні різних технологічних способів $j=1,\ \ldots,\ n$ з одиничною інтенсивністю. Матриця $B=(b_{ij})$ поєднує коефіцієнти випуску відповідних продуктів при використанні різних технологічних способів з одиничною інтенсивністю. Обидві матриці мають однакову розмірність $m\times n$. Передбачається, що числа a_{ij} і b_{ij} задовольняють наступним обмеженням:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} > 0 \quad (j=1,\ \ldots,\ n), \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} > 0 \quad (i=1,\ \ldots,\ m). \tag{2}$$

Умова (1) означає, що в кожному способі використовується хоча б один продукт. Умова (2) означає, що кожен продукт може бути зроблений хоча б одним технологічним способом.

За виразами (1), (2) важко знайти оптимальне співвідношення між обсягами виробництва. Поставимо задачу трансформації моделі Неймана з метою її оптимізації.

Позначимо через $Z=(z_J)$ вектор інтенсивностей використання технологічних способів. Тоді технологічну безліч моделі Неймана можна представити в такому вигляді: $\{(X,Y)\,|\,X=AZ,\quad Y=BZ,\quad Z\geq 0\}$.

Найбільш характерне допущення моделі Неймана полягає в тому, що вся зроблена в момент t продукція затрачається на виробництво продукції в момент $t+1$:

$$BZ(t)\geq AZ(t+1). \tag{3}$$

В остаточному вигляді модель можна представити як задачу максимізації числа η – темпу зростання замкнутої виробничої системи:

$$\begin{cases} \eta \to \max; \\ BZ \geq \eta AZ. \end{cases} \quad (4)$$

При $\eta > 1$ маємо розширене відтворення, при $\eta = 1$ – просте відтворення, при $0 < \eta < 1$ – звужене відтворення.

Максимальне число η, при якому виконується умова (4), будемо називати *технологічним темпом зростання* і позначимо $\hat{\eta}$. Вектор $\hat{Z}$, при якому досягається $\hat{\eta}$, будемо називати *оптимальним.*

Темпи зростання виробництва окремих продуктів η_i визначаються відносинами $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} z_j / \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j$. Очевидно, що технологічний темп росту всієї економіки дорівнює мінімальному з максимально досяжних темпів зростання виробництва окремих продуктів:

$$\hat{\eta} = \max_z \min \eta_i \ . \quad (5)$$

Існування позитивного $\hat{\eta}$ доводиться при умовах (1) і (2).

За аналогією з моделлю міжгалузевого балансу введемо поняття *продуктивності.* Технологічна безліч моделі Неймана продуктивна, якщо існує $Z \geq 0$, таке, що $(B - A)\, Z > 0$. Це означає можливість перевищення випуску над витратами одночасно стосовно усіх видів продукції. Якщо технологічна безліч продуктивна, то $\hat{\eta} > 1$, і ми маємо справу з розширеним відтворенням.

Виробничо-технологічним співвідношенням (3), (4) можна поставити у відповідність систему ціннісних співвідношень. Для цього введемо в розгляд вектор цін $P = (p_i)$.

Загальна оцінка продукції, створеної j-м способом при його використанні з одиничною інтенсивністю, дорівнює $\sum_{i=1}^{m} p_i b_{ij}$, а загальні витрати в ціннісному вираженні – $\sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$. Тоді величина $\beta_j = \sum_{i=1}^{m} p_i b_{ij} / \sum_{i=1}^{m} p_i a_{ij}$ є показником "*рентабельності*" j-го технологічного способу.

Задача визначення ціннісних співвідношень формулюється в такий спосіб. Визначити ненегативний вектор P и число β, для яких

$$\begin{cases} \beta \to \min; \\ PB \leq \beta PA. \end{cases} \quad (6)$$

Величину $\hat{\beta}$ будемо називати *економічним темпом зростання моделі,* а відповідний цій величині вектор цін $\hat{P}$ – *оптимальним.* Величина $\hat{\beta}$ означає мінімальний рівень рентабельності, при якому сумарна оцінка виготовленої продукції не перевищує сумарної оцінки витрат щодо усіх виробничих способів, тобто

$$\hat{\beta} = \min_P \max_j \beta_j \, . \quad (7)$$

Задачі (4) і (6), що визначають оптимальні структури виробництва і цін, технологічний і економічний темпи росту, відносяться до класу *двоїстих.* Багато в чому ця пара подібна з двоїстими задачами математичного програмування.

Відзначимо, що задачі (4) і (6) є однорідними, і, отже, оптимальні вектори $\hat{Z}$ і $\hat{P}$ визначаються лише з точністю до позитивного множника. Ця властивість пов'язана із замкнутістю моделі і відрізняє (4) і (6) від двоїстих задач математичного програмування.

Розглянемо тепер зв'язок між зазначеною парою двоїстих задач. Для розглянутих задач завжди має місце нерівність

$$\hat{\beta} \le \hat{\eta}. \tag{8}$$

Якщо ж матриці A и B нерозкладні, то

$$\hat{\beta} = \hat{\eta}. \tag{9}$$

Розглянемо питання про спільну можливість розв'язання системи нерівностей:

$$(B - \eta A)Z \ge 0, \quad Z \ge 0; \tag{10}$$

$$P(B - \beta A) \le 0, \quad P \ge 0; \tag{11}$$

$$P(B - \eta A)Z = 0; \tag{12}$$

$$P(B - \beta A)Z = 0. \tag{13}$$

Нехай виконано умови (1) — (2). Тоді рішення $(Z, \quad P, \quad \eta, \quad \beta)$ системи (10) – (13), що задовольняє умові $PBZ > 0$, існує, причому $p_i = 0$ тоді і тільки тоді, коли

$$\eta \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j < \sum_{j=1}^{n} b_{ij} z_j \qquad (i = 1, \quad ..., \quad m);$$

$z_j = 0$ тоді і тільки тоді, коли

$$\beta \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i > \sum_{i=1}^{n} b_{ij} p_i \quad (j = 1, \quad ..., \quad n).$$

Для будь-якого набору $(Z, \quad P, \quad \eta, \quad \beta)$, що задовольняє умовам (4), (6), (13), має місце співвідношення $\hat{\eta} = \hat{\beta} > 0$.

Приведені співвідношення схожі з умовами двоїстої задачі лінійного програмування, їм може бути дана аналогічна економічна інтерпретація: 1) в оптимальних технологічних способах сумарна оцінка випуску дорівнює сумарній оцінці витрат; 2) якщо в технологічному способі сумарна оцінка витрат перевищує сумарну оцінку випуску, то такий спосіб неоптимальний; 3) якщо оптимальна ціна продукту позитивна, то по такому продуктові балансове співвідношення виробництва та розподілу продукції реалізується як рівність; 4) якщо баланс виробництва і розподілу продукції виконується як строга нерівність, то ціна даного виду продукції – нульова.

Розглянемо *окремий випадок моделі Неймана,* коли в кожному технологічному способі випускається тільки один продукт і кожен продукт виробляється тільки одним способом. Це означає, що число продуктів дорівнює числу способів $(i, j = 1, \quad ..., \quad n)$, матриця B – одинична, матриця A є матрицею міжгалузевого балансу. Замість вектора Z використовується X – вектор обсягів виробництва.

Задача максимізації темпу зростання виробництва в цьому випадку приймає вигляд

$$\begin{cases} \eta \to \max; \\ X \ge \eta A X. \end{cases} \tag{14}$$

Важливою властивістю даної задачі є те, що її рішення задовольняє умові

$$\hat{X} = \hat{\eta} A \hat{X}. \tag{15}$$

Випуск усіх продуктів зростає однаковим темпом і відсутнє надвиробництво яких-

Співвідношення (18.13) можна записати у вигляді

$$A\hat{x}=\left(\frac{1}{\hat{\eta}}\right)\hat{X}. \qquad (16)$$

Легко бачити, що $\frac{1}{\hat{\eta}}$ – позитивне власне значення матриці A (корінь Фробеніуса – Перрона), $\hat{X}$ – відповідний цьому власному значенню власний вектор. Тим самим установлюється відповідність між математичним поняттям власного значення матриці й економічним поняттям максимального темпу зростання виробництва. З (15) також випливає, що необхідною та достатньою умовою розширеного відтворення (існування $\hat{\eta}>1$) є продуктивність матриці A.

Задача визначення темпу економічного росту і збалансованих цін у розглянутому випадку має вигляд

$$\begin{cases}\beta\to\min;\\ P\le\beta PA.\end{cases} \qquad (17)$$

При нерозкладній матриці A маємо $\hat{\beta}=\hat{\eta}$, а оптимальні вектори $\hat{X}$ і $\hat{P}$ строго позитивні і єдині (з точністю до позитивного множника).

Застосуємо окремий випадок моделі Неймана для аналізу двогалузевої системи. Візьмемо матрицю A: $A=\begin{bmatrix}0,2 & 0,3\\ 0,3 & 0,4\end{bmatrix}$.

Максимальне власне число даної матриці дорівнює 0,62. Звідси $\hat{\eta}=\frac{1}{0,62}=1,61$.

Пронормуємо власний вектор $\hat{X}$ так, що $x_i = 1$. Тоді одержимо $\hat{X}=\begin{bmatrix}1\\ 1,39\end{bmatrix}$.

Візьмемо матрицю капіталомісткості виробництва: $B=\begin{bmatrix}0,5 & 0,5\\ 1,0 & 0,8\end{bmatrix}$. Припустимо, що основні виробничі фонди служать 8 років; тоді при рівномірному зростанні виробництва і фондів щорічно повинна відшкодовуватися 1/8 капітальних витрат. Додавши 1/8 коефіцієнтів капіталоємності до матриці A, одержимо $\tilde{A}=\begin{bmatrix}0,2625 & 0,3625\\ 0,425 & 0,5\end{bmatrix}$.

Максимальне власне число матриці $\tilde{A}$ дорівнює 0,79, відкіля $\tilde{\eta}=1,266$. Вважаючи $\hat{x}_1=1$, одержуємо $\hat{x}_2=1,459$.

Висновком з даного дослідження є встановлення факту, що оптимізацію обсягів виробництва з використанням моделі Неймана можливо виконувати шляхом розв'язання двоїстої задачі математичним програмуванням.

Перспективами подальших досліджень у даному напрямку є включення в модель Неймана в явному вигляді обмежень щодо зовнішніх ресурсів як додаткових нерівностей та встановлення відповідних умов оптимізації моделі.

Література

1. Уотшем Т.Дж., Паррамоу Л. Количественные методы в финансах; Пер. с англ. – М.: ЮНИТИ, 1998.
2. Малыхин В.И. Финансовая математика. – М.: ЮНИТИ, 2000.

Рекомендовано до публікації д.е.н., проф. Ковальчуком К.Ф. 08.04.03

Надійшла до редакції 24.03.03