

## ТЕРМОДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ ТА МОДЕЛЮВАННЯ

УДК 51-7:66.047.7

### Математична модель процесу нагрівання і сушіння вологих матеріалів

А. М. Павленко<sup>1</sup>✉, Л. П. Шумська<sup>2</sup>✉

<sup>1</sup>Кельцьський технологічний університет; вул. Тисячоліття панства Польського, 7, Кельце, 25-314, Польща

<sup>2</sup>Полтавський коледж нафти і газу Національного університету «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка», вул. Грушевського, 2а, Полтава, 36021, Україна

✉e-mail: <sup>1</sup>apavlenko@tu.kielce.pl; <sup>2</sup>schumska@gmail.com

ORCID: <sup>1</sup><https://orcid.org/0000-0002-8103-2578>; <sup>2</sup><https://orcid.org/0000-0002-8103-2578>

*Вирішення проблеми створення ефективних пористих теплоізоляційних матеріалів і технологій їх виробництва нерозривно пов'язане з науковими дослідженнями в області енергопереносу в пористій структурі на етапах спучування, затвердіння і сушіння за умови забезпечення найбільш низької теплопровідності і густини. Зазначені властивості матеріалів визначаються величиною їх пористості, співвідношенням мікро- та макропористі, властивостями міжпорових матеріалів, що утворюють своєрідний несучий каркас, який у свою чергу визначається технологією виробництва, видом сировинних матеріалів і умовами їх підготовки. Проблема теплової обробки вологих матеріалів містить питання перенесення теплоти і маси всередині тіла (внутрішня задача) і в граничному шарі на межі розділення фаз (зовнішня задача). Кількість видаленої вологи залежить від ступеня розвитку кожного з цих процесів. При нагріванні зменшується вміст вологи на поверхні, і це створює перепад концентрації по перерізу тіла. Тому в тілі виникає потік вологи з глибинних шарів до поверхні, назустріч якому спрямований потік теплоти. Таким чином, при нагріванні вологих матеріалів відбуваються складні процеси волого- і теплообміну, котрі взаємно впливають на ентальпію і вологовміст як матеріалу, що нагрівається, так і навколишнього середовища. У статті розглядаються особливості побудови математичної моделі процесу нагрівання і сушіння вологих матеріалів. Процес сушіння розглядається як тепловий процес з ефективними коефіцієнтами теплоперенесення, що враховують масоперенесення. Це дозволяє отримати зручні для інженерних розрахунків аналітичні залежності, за допомогою яких можна визначити температурне поле і оцінити кінетику сушіння вологих матеріалів.*

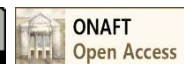
**Ключові слова:** Теплоізоляційні вироби; Математичне моделювання; Термообробка; Теплопровідність; Тепловологісні процеси.

doi: <https://doi.org/10.15673/ret.v56i1-2.1825>

© The Author(s) 2020. This article is an open access publication

This work is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC BY)

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



### 1. Вступ

Термообробка вологих матеріалів являє собою технологічний процес, що супроводжується структурно-механічними змінами висушеної речовини. Результати досліджень у галузі теорії сушіння дозволяють на науковій основі підходити до проблеми інтенсифікації цього процесу і вибору

раціонального способу й оптимального режиму термообробки. Основним завданням технології термічної обробки матеріалів є створення комбінованих методів термічного впливу на матеріал, який би врахував основні етапи його фізико-хімічного перетворення. Особливо складно створити технологію і відповідну методіку аналітичного опису процесів термообробки, які передбачають послі-

довні фізико-хімічні перетворення. Прикладом такого процесу є терміне спучування пластичної сировинної суміші в технологіях виробництва теплоізоляційних матеріалів. У даному випадку реалізуються процеси дегідратації, газоутворення, кристалізації каркасу і сушіння. Отже методика такої термічної обробки повинна забезпечувати не тільки достатню її інтенсивність, але й найкращі технологічні властивості х матеріалів.

Вибір раціональної технології термообробки матеріалу вимагає знань його температурного поля, оскільки якість висушеного продукту значною мірою залежить від величини температурних перепадів і тривалості впливу температури.

## 2. Основна частина

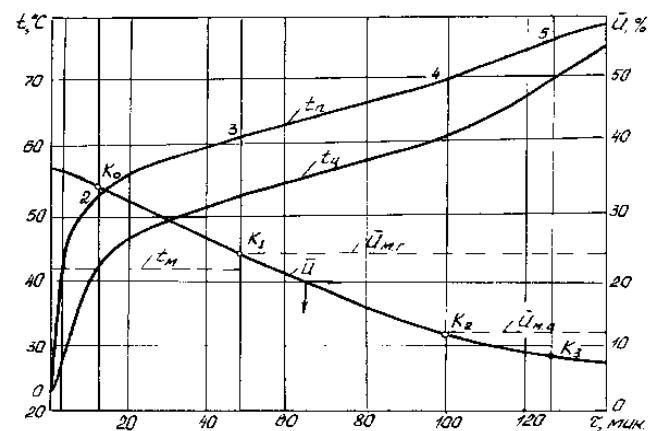
Знаходження полів температури і вологовмісту при нагріванні пов'язане з рішенням складної системи нелінійних диференціальних рівнянь тепло- і масоперенесення з рухомими межами [1,2]. Однак обмеженість відомостей про істинні значення коефіцієнтів перенесення вологи і теплоти дозволяє отримати лише якісну оцінку процесів, що утруднює використання таких рішень в інженерній практиці.

Відомо [3-5], що визначувані дослідним шляхом коефіцієнти теплоперенесення вологих тіл при їх нагріванні (коефіцієнт теплопровідності  $\lambda$  і температуропровідності) являють деякі ефективні значення, що сумарно враховують процеси перенесення теплоти і вологи. Тоді, розглядаючи сушіння тільки як тепловий процес, але з ефективними коефіцієнтами теплоперенесення, що враховують масоперенесення, можна отримати зручні для інженерних розрахунків аналітичні залежності, які визначають температурне поле і кінетику сушіння вологих матеріалів.

Розглянемо процес симетричного нагрівання вологої сировинної суміші товщиною  $2R$  з початковим вологовмістом  $\bar{U}_0$ . Теплопередача від гарячого теплоносія до поверхні матеріалу відбувається за законом конвективного теплообміну при постійних значеннях коефіцієнта теплообміну  $\alpha$  і температури нагрівального середовища  $t_c$ .

На рис. 1 наведена експериментальна крива сушіння і температурна діаграма вологого матеріалу ( $2R = 0,016$  м) в процесі нагрівання в сушильній шафі при постійній температурі нагрівального повітря  $t_c = 100$  °С (температура мокрого термометра  $t_m = 42$  °С). Згідно зі схемою послідовного вида-

лення вологи з матеріалу, розробленою авторами [6,7], на наведеній термограмі (рис. 1) відмічені сингулярні точки (1-6), що відповідають певному видові зв'язку вологи з тілом.



**Рисунок 1** – Температура поверхні  $t_n(\tau)$ , центра  $t_c(\tau)$ , і середньооб'ємний вологовміст  $\bar{U}(\tau)$  пластини в процесі нагрівання при постійній температурі нагрівального середовища  $t_c = 100$  °С

Відповідно до цього процес нагрівання можна умовно розділити на 6 етапів:

- перший етап (0-1) проходить при незмінному вологовмістові і закінчується при досягненні на поверхні матеріалу температури мокрого термометра ( $t_n = t_m$ );

- на другому етапі (1-2) видаляється капілярна волога, що міститься в макропорах, енергія зв'язку якої незначна; в кінці етапу температура в центрі дорівнює температурі мокрого термометра ( $t_c = t_m$ ), а швидкість сушіння зростає до максимальної;

- на третьому етапі (2-3) з матеріалу видаляється стикова волога макропор; середньооб'ємний вологовміст до кінця етапу зменшується до значення максимального гігроскопічного  $\bar{U}_{м.г}$ , що відповідає першій критичній точці  $K_1$  на кривій сушіння; швидкість сушіння практично не змінюється;

- на четвертому етапі (3-4) відбувається видалення капілярної вологи мікропор; середньооб'ємний вологовміст матеріалу зменшується до максимального адсорбційного  $\bar{U}_{м.а}$ , що відповідає другій критичній точці  $K_2$  на кривій сушіння; швидкість сушіння падає;

- на п'ятому (4-5) і шостому (5-6) етапах видаляється найбільш міцно зв'язана волога полімолекулярної та мономолекулярної адсорбції відповідно; середньооб'ємний вологовміст матеріалу змінюється від  $\bar{U}_{м.а}$  до рівноважного  $\bar{U}_p$ .

Для визначення температурного поля матеріалу на першому етапі, коли випаровування вологи не відбувається, використовуються відомі рішення [8], з яких визначаються початкові умови для наступного етапу. Процес нагрівання на другому, третьому й наступних етапах відбувається з поглибленням поверхні випаровування відповідного виду вологи від зовнішньої поверхні всередину матеріалу. У результаті випаровування вологи всередині матеріалу створюється підвищений тиск пароповітряної суміші [1,2], котра переміщується від фронту випаровування до зовнішньої поверхні тіла й виноситься в навколишнє середовище. Кожен з етапів закінчується, коли межа поверхні фазового перетворення досягає центру пластини.

При математичній постановці задачі термообробки на другому етапі розглядаються дві зони (рис. 2): центральна зона 1, в якій вологовміст приймається постійним і дорівнює початковому ( $U_1 = \bar{U}_0$ ), і зона випаровування 2, в якій вологовміст також не змінюється і дорівнює середньоб'ємному вологовмісту матеріалу в кінці етапу ( $U_2 = \bar{U}_{к.о}$ ).

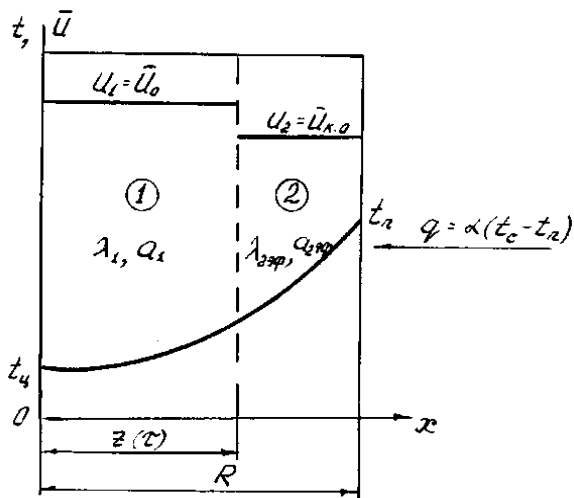


Рисунок 2 – До математичного формулювання задачі

Вважаємо, що в зоні 1 переміщується тільки волога, тобто критерій фазового перетворення  $\varepsilon_1=0$ , а в зоні випаровування 2 волога переміщується у вигляді пари ( $\varepsilon_2=1$ ). Поверхня випаровування має постійну температуру, що дорівнює температурі мокрого термометра  $t_m$ . Коефіцієнти теплоперенесення в кожній із зон, які ми розглядаємо, постійні.

Як свідчать експериментальні дані, розподіл температури за товщиною сировинного блоку в

кінці кожного із етапів нагрівання відповідає регулярному режиму. Тому для визначення значень ефективного коефіцієнта теплопровідності  $\lambda_{\text{еф}}$  та коефіцієнта «чистої» теплопровідності  $\lambda$  можна використовувати наступні вирази:

$$\lambda_{\text{еф}} = \frac{q_{\text{п.к}} \cdot R}{k_2 \Delta t_k}; \quad \lambda = \frac{(q_{\text{п.к}} - q_{\text{вип.к}}) \cdot R}{k_2 \Delta t_k}, \quad (1)$$

де  $q_{\text{п.к}}$ ,  $q_{\text{вип.к}}$ ,  $\Delta t_k$  – поверхневий тепловий потік, тепловий потік з вологою, що випаровується, і перепад температур по товщині пластини в кінці даного етапу нагрівання;  $k_2$  – коефіцієнт усереднення теплових потоків по товщині пластини, що залежить від критерію  $Bi$ .

Прийняті припущення дозволяють звести задачу тепло- і масообміну [9] до задачі теплопровідності рухливою межею фазового перетворення (задачі Стефана), математична постановка якої включає диференціальні рівняння теплопровідності для двох зон:

$$\frac{\partial V_1}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq Z(Fo); \quad (2)$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial Fo} = f_a \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}, \quad Z(Fo) \leq x \leq 1; \quad (3)$$

з граничними умовами

$$f_\lambda \left( \frac{\partial V_2}{\partial x} \right)_{x=1} = Bi [1 - V_2(1, Fo)]; \quad (4)$$

$$V_1(Z, Fo) = V_2(Z, Fo) = V_m; \quad (5)$$

$$f_\lambda \left( \frac{\partial V_2}{\partial x} \right)_{x=Z(Fo)} - \left( \frac{\partial V_1}{\partial x} \right)_{x=Z(Fo)} = \frac{d}{dFo} Ko(Fo) = \Delta Ko \frac{d}{dFo} Z(Fo); \quad (6)$$

$$\left( \frac{\partial V_1}{\partial x} \right)_{x=0} = 0; \quad (7)$$

і початковими умовами

$$\begin{aligned} V_1(x, 0) &= V_0 + \Delta V_0 x^2; & V_2(x, 0) &= V_m; \\ Z(0) &= 1; & Ko(0) &= Ko_n, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $V = t(x, \tau) / t_c$  – відносна температура;

$x = \chi / R$  – відносна координата;

$Fo = a_1 \cdot \tau / R^2$  – число Фур'є;

$Bi = \alpha \cdot R / \lambda_1$  – критерій Біо;  
 $Ko(Fo) = \bar{U}(Fo) \cdot r / C_1 \cdot t_c$  – критерій Косовича;  
 $Ki(Fo) = q_n(Fo)R / \lambda_1 \cdot t_c$  – критерій Кирпичова;  
 $Z(Fo) = z/R$  – відносна координата розділення зон;

$$\Delta Ko = \frac{r(\bar{U}_o - \bar{U}_{к.о})}{C_1 \cdot t_c}; V_M = \frac{t_M}{t_c}; V_o = \frac{t_o}{t_c};$$

$$\Delta V_o = \frac{\Delta t_o}{t_c}; f_\lambda = \frac{\lambda_{2\text{эф}}}{\lambda_1}; f_a = \frac{a_{2\text{эф}}}{a_1}; a = \frac{\lambda}{c \cdot \rho_o};$$

$t(\chi, \tau)$  – температурна функція;  $\chi$  – координата;  
 $\tau$  – час;  $\lambda_{\text{эф}}, a_{\text{эф}}$  – ефективні коефіцієнти теплопровідності і температуропровідності;  
 $r$  – теплота пароутворення;  
 $C_1$  – питома теплоємність вологого матеріалу, віднесена до маси абсолютно сухого тіла;  
 $\rho_o$  – густина абсолютно сухого тіла;  
 $\bar{U}(\tau)$  – функція середньооб'ємного вологовмісту;  
 $\bar{U}_{к.о}$  – середньооб'ємний вологовміст у кінці другого етапу нагрівання;  
 $t_c$  – температура нагрівального середовища;  
 $t_o$  і  $\Delta t_o$  – температура центру та перепад температур по товщині пластини на початку другого етапу; індекс «1» відноситься до центральної зони, а індекс «2» – до зони випаровування.

Сформульована задача (2)-(8) відрізняється від класичної задачі Стефана тим, що гранична умова на зовнішній поверхні пластини є функцією часу, а початковий розподіл температури описується рівнянням квадратної параболі.

Для вирішення системи нелінійних диференціальних рівнянь (2)-(8) використаний метод редукції і параметричного збурення (РПЗ) [10], згідно з процедурою якого, загальні рішення рівнянь (2) і (3) наведені в наступному вигляді:

$$V_1(x, Fo) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{d^n}{dFo^n} \psi(Fo); \quad (9)$$

$$V_2(x, Fo) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x)^{2n}}{(2n)! f_a^n} \cdot \frac{d^n}{dFo^n} \varphi(Fo) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-x)^{2n+1}}{(2n+1)! f_a^n} \cdot \frac{d^n}{dFo^n} \delta(Fo), \quad (10)$$

де  $\psi(Fo)$  і  $\varphi(Fo)$  – температурні функції осі і зовнішньої поверхні пластини;  $\delta(Fo)$  – функція температурного градієнта на зовнішній поверхні пластини.

Рішення (9) і (10) задовольняють початкові умови задачі, коли:  $\psi(0) = V_o$ ,

$$\frac{d}{dFo} \psi(0) = 2\Delta V_o; \frac{d^n}{dFo^n} \psi(0)_{n \geq 2} = 0; \varphi(0) = V_M; \frac{d^n}{dFo^n} \varphi(0)_{n \geq 1} = 0; \frac{d^n}{dFo^n} \delta(0) = 0. \quad (11)$$

Задовольняючи рішення (9) і (10) граничні умови задачі, отримаємо систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, до якої вводимо умовний (малий) параметр  $\xi$ :

$$-f_\lambda \delta(Fo) = Bi[1 - \varphi(Fo)] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \cdot \frac{d^n}{dFo^n} \psi(Fo); \quad (12)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\xi Z)}{(2n)! f_a^n} \cdot \frac{d^n}{dFo^n} \varphi(Fo) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\xi Z)^{2n+1}}{(2n)! f_a^n} \cdot \frac{d^n}{dFo^n} \delta(Fo) = V_M; \quad (13)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\xi h)^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{d^n}{dFo^n} \psi(Fo) = V_M; \quad (14)$$

$$-f_\lambda \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\xi h)^{2n-1}}{(2n)! f_a^n} \cdot \frac{d^n}{dFo^n} \psi(Fo) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi h)^{2n}}{(2n)! f_a^n} \cdot \frac{d^n}{dFo^n} \delta(Fo) \right\} = \frac{d}{dFo} Ko(Fo) = N(Fo) = \Delta Ko \frac{d}{dFo} Z(Fo), \quad (15)$$

де  $h(Fo) = 1 - Z(Fo)$  – функція товщини зони випаровування.

Шукані функції  $\psi(Fo)$ ,  $\varphi(Fo)$ ,  $\delta(Fo)$ ,  $Ko(Fo)$ ,  $N(Fo)$  і  $Z(Fo)$  наводимо у вигляді наступних розкладань у ряд за ступенями малого параметра  $\xi$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi(Fo) &= \varphi_o(Fo) + \xi \varphi_1(Fo) + \xi^2 \varphi_2(Fo) + \dots; \\ \psi(Fo) &= \psi_o(Fo) + \xi \psi_1(Fo) + \xi^2 \psi_2(Fo) + \dots; \\ \delta(Fo) &= \delta_o(Fo) + \xi \delta_1(Fo) + \xi^2 \delta_2(Fo) + \dots; \\ Ko(Fo) &= Ko_o(Fo) + \xi Ko_1(Fo) + \xi^2 Ko_2(Fo) + \dots; \\ N(Fo) &= N_o(Fo) + \xi N_1(Fo) + \xi^2 N_2(Fo) + \dots; \\ Z(Fo) &= Z_o(Fo) + \xi Z_1(Fo) + \xi^2 Z_2(Fo) + \dots; \\ h(Fo) &= h_o(Fo) + \xi h_1(Fo) + \xi^2 h_2(Fo) + \dots; \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Підставляючи ряди (16) в систему рівнянь (12)-(15) і порівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях параметра  $\xi$ , знаходимо послідовність лінійних диференціальних рівнянь, що визначають шукані функції.

Нульове наближення (породжуюча система рівнянь, що визначають температурні функції  $\psi_o(Fo)$ ,  $\phi_o(Fo)$ ,  $\delta_o(Fo)$ , а також функції середньо-об'ємного вологовмісту  $Ko_o(Fo)$ , швидкості видалення вологи  $N_o(Fo)$  і межі фазового перетворення  $Z_o(Fo)$  при відсутності збурень).

$$-f_\lambda \delta_o(Fo) = Bi[1 - \phi_o(Fo)] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \cdot \frac{d^n}{dFo^n} \psi_o(Fo); \quad (17)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)! f_a^n} \cdot \frac{d^n}{dFo^n} \phi_o(Fo) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)! f_a^n} \cdot \frac{d^n}{dFo^n} \delta_o(Fo) = V_m; \quad (18)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \cdot \frac{d^n}{dFo^n} \psi_o(Fo) = V_m; \quad (19)$$

$$f_\lambda \delta_o(Fo) = \frac{d}{dFo} Ko_o(Fo) = N_o(Fo) = \Delta Ko \frac{d}{dFo} Z_o(Fo). \quad (20)$$

Перше наближення (система рівнянь, що визначає перший доданок до функцій, знайдених у нульовому наближенні)

$$f_\lambda \delta_1(Fo) = Bi \phi_1(Fo) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \cdot \frac{d^n}{dFo^n} \phi_1(Fo); \quad (21)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)! f_a^n} \cdot \frac{d^n}{dFo^n} \phi_1(Fo) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)! f_a^n} \cdot \frac{d^n}{dFo^n} \delta_1(Fo) - Z_o(Fo) \cdot \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)! f_a^n} \cdot \frac{d^n}{dFo^n} \phi_o(Fo) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)! f_a^n} \cdot \frac{d^n}{dFo^n} \delta_o(Fo) \right\} = 0; \quad (22)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} \cdot \frac{d^n}{dFo^n} \phi_1(Fo) - h_o(Fo) \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} \cdot \frac{d^n}{dFo^n} \psi_o(Fo) = 0; \quad (23)$$

$$\frac{f_\lambda}{f_a} h_o(Fo) \frac{d}{dFo} \phi_o(Fo) + f_\lambda \delta_1(Fo) = \frac{d}{dFo} Ko(Fo) = N_1(Fo) = \Delta Ko \frac{d}{dFo} Z_1(Fo). \quad (24)$$

Аналогічно утворюються наступні доданки до породжуючого рішення.

Для практичних задач дослідження процесів нагрівання вологих матеріалів достатню точність забезпечує перше наближення.

Отже, застосування методу РПЗ дозволяє трансформувати вихідну нелінійну задачу теплопровідності в послідовність звичайних лінійних диференціальних рівнянь.

Для рішення отриманих рівнянь використаний метод інтегральних перетворень Лапласа. Знайдені аналітичні залежності, що визначають температурне поле і кінетику сушіння вологої пластини, являють собою явні функції, котрі достатньо просто реалізуються при розрахунках.

Вирази для температурних функцій поверхні й осі пластини мають наступний вигляд:

$$V_2(1, Fo) = V_m + \int_0^{Fo} \Phi_1(Fo - fo) \theta(fo) dfo + \phi_1(Fo); \quad (25)$$

$$V_1(0, Fo) = V_o + 2\Delta V_o \cdot G_1(Fo) + \psi_1(Fo), \quad (26)$$

де  $\psi_1(Fo)$  і  $\phi_1(Fo)$  – доданки до відповідних функцій нульового наближення.

$$\phi_1(Fo) = \int_0^{Fo} \Phi_3(Fo - fo) M_1(fo) dfo; \quad (27)$$

$$\psi_1(Fo) = \int_0^{Fo} G_2(Fo - fo) M_2(fo) dfo. \quad (28)$$

Функція координати поверхні випаровування

$$Z(Fo) = 1 - \frac{Bi}{\Delta Ko} \int_0^{Fo} \Phi_2(Fo - fo) \theta(fo) dfo + Z_1(Fo), \quad (29)$$

$$\text{де} \quad Z_1(Fo) = \frac{1}{\Delta Ko} Ko_1(Fo). \quad (30)$$

Функція середньооб'ємного вологовмісту матеріалу

$$Ko(Fo) = Ko_n - Bi \int_0^{Fo} \Phi_2(Fo - fo) \theta(fo) dfo + Ko_1(Fo), \quad (31)$$

$$\text{де } K_{o1}(Fo) = \int_0^{Fo} N_1(fo) dfo. \quad (32)$$

Функція швидкості видалення вологи з матеріалу:

$$N(Fo) = Bi \int_0^{Fo} \Phi_3(Fo - fo) \theta(fo) dfo + N_1(Fo), \quad (33)$$

$$\text{де } N_1(Fo) = \frac{f_\lambda}{f_a} \frac{d}{dfo} \varphi_o(Fo) [1 - Z_o(Fo)] + Bi \Phi_1(Fo). \quad (34)$$

У знайдених виразах використовуються наступні функції:

$$\Phi_1(Fo) = f_a \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mu_n^2 \exp(-f_a \mu_n^2 Fo); \quad (35)$$

$$\Phi_2(Fo) = \frac{1}{1 + Bi_1} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-f_a \mu_n^2 Fo); \quad (36)$$

$$\Phi_3(Fo) = -f_a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n \mu_n^2}{\cos \mu_n} \exp(-f_a \mu_n^2 Fo); \quad (37)$$

$$\text{де } A_n = \frac{2Bi_1}{\mu_n^2 + Bi_1 + Bi_1^2}; \quad Bi_1 = \frac{Bi}{f_\lambda};$$

$\mu_n$  – корені рівняння:  $\text{tg} \mu = -\mu / Bi_1$  [2];

$$G_1(Fo) = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{\mu_k^2} \exp(-\mu_k^2 Fo); \quad (38)$$

де  $\mu_k = (2k - 1)\pi/2$ ;

$$G_2(Fo) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_k^2} \exp(-\mu_k^2 Fo); \quad (39)$$

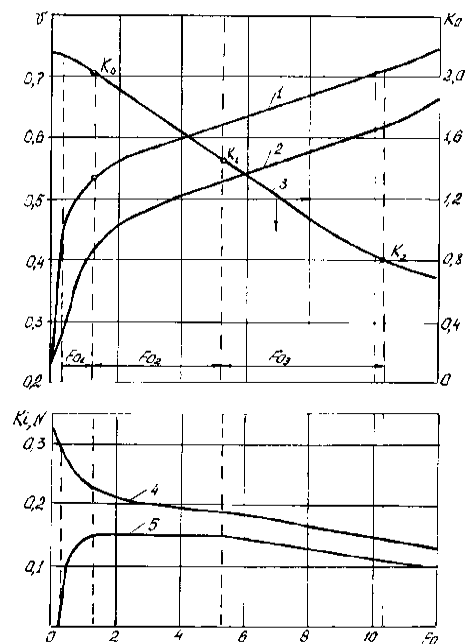
$$\theta(Fo) = 1 - V_M - \frac{2\Delta V_o}{Bi} [1 - G_2(Fo)]; \quad (40)$$

$$M_1(Fo) = -Z_o(Fo) \cdot Bi_1 \int_0^{Fo} \Phi_3(Fo - fo) \theta(fo) dfo; \quad (41)$$

$$M_2(Fo) = 2\Delta V_o [1 - Z_o(Fo)] [1 - G_2(Fo)]. \quad (42)$$

Для визначення температурного поля і кінетики сушіння в третьому і наступних етапах нагрівання використовуються ті ж аналітичні залежності, але з новими початковими умовами, отриманими з попередніх етапів.

Результати розрахунку процесу нагрівання вологого сировинного блоку товщиною  $2R=0,016$  м при постійній температурі нагрівального середовища (повітря) наведені на рис. 3.



**Рисунок 3** – Температурна і теплова діаграми нагрівання: 1, 2 – відносна температура поверхні й центру блоку; 3 – безрозмірна функція середньоб'ємного вологовмісту  $K_o(Fo)$ ; 4 – поверхневий тепловий потік  $K_i(Fo)$ ; 5 – безрозмірна швидкість видалення вологи з матеріалу  $N(Fo)$

Розрахунки проведені для наступних умов:

$$\begin{aligned} \bar{U}_o &= 0,37 \text{ кг/кг}; & t_c &= 100 \text{ }^\circ\text{C}; & t_M &= 42 \text{ }^\circ\text{C}; \\ \alpha &= 15,7 \text{ Вт/м}^2\cdot\text{К}; & \rho_0 &= 530 \text{ кг/м}^3; \\ \lambda_1 &= 0,25 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}; & \lambda_{2\text{эф}} &= 0,25 \text{ Вт/м}\cdot\text{К}; \\ a_1 &= 0,12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}; & a_{2\text{эф}} &= 0,12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}. \end{aligned}$$

Розрахункові дані достатньо добре узгоджуються з експериментальними (рис. 1), отриманими при нагріванні заготовок у сушильній шафі за тих же самих умов.

### 3. Висновки

На підставі проведених досліджень температурного поля і кінетики випаровування вологи весь процес нагрівання можна умовно розділити на шість етапів згідно із схемою послідовного видалення вологи з матеріалу. Процес нагрівання в кожному з етапів відбувається з поглибленням поверхні випаровування відповідного виду вологи від зовнішньої поверхні всередину матеріалу. Кожний із етапів симетричного нагрівання закінчується, коли межа поверхні фазового перетворення

досягає центру пластини. Експериментальні дані свідчать, що розподіл температури по товщині матеріалу в кінці кожного етапу параболічний. Тому, використовуючи формули для регулярного режиму нагрівання, можна визначити ефективні коефіцієнти теплоперенесення, які сумарно враховують перенесення теплоти і вологи.

## Література

1. **Pavlenko A. M.** Dispersed phase breakup in boiling of emulsion // *Heat Transfer Research*. – 2018. – Vol. 49. – Is. 7. – P. 633-641.  
DOI: 10.1615/HeatTransRes.2018020630.
2. **Pavlenko A.** Energy conversion in heat and mass transfer processes in boiling emulsions // *Thermal Science and Engineering Progress*. – 2020. – Vol. 15, 1 March, 100439.  
<https://doi.org/10.1016/j.tsep.2019.100439>.
3. **B. Nait-Ali, S. Oummadi, E. Portuguez, A. Alzina, D. S. Smith.** Thermal conductivity of ceramic green bodies during drying // *Journal of the European Ceramic Society*. – 2017. – Vol. 37. – Is. 4. – P. 1839-1846.
4. **Yi Dong, John S. McCartney, Ning Lu.** Critical Review of Thermal Conductivity Models for Unsaturated Soils // *Geotechnical and Geological Engineering*. – 2015. – Vol. 33. – P. 207-221.
5. **Z. B. Maroulis, M. K. Krokida, M. S. Rahman.** A structural generic model to predict the effective thermal conductivity of fruits and vegetables during drying // *Journal of Food Engineering*. – 2002. – Vol. 52. – Is. 1. – P. 47-52.
6. **Anne D. W. Nuijten, Knut V. Hoyland.** Modeling the thermal conductivity of a melting snow layer on a heated pavement // *Cold Regions Science and Technology*. – 2017. – Vol. 140. – P. 20-29.
7. **V. R. Tarnawski, W. H. Leong, F. Gori, G. D. Buchan, J. Sundberg.** Inter-particle contact heat transfer in soil systems at moderate temperatures // *International Journal of Energy Research*. – 2002. – Vol. 26. – P. 1345-1358.
8. **A.-B. Cherki, B. Remy, A. Khabbazi, Y. Jannot and D. Baillis.** Experimental thermal properties characterization of insulating cork-gypsum composite // *Construction and Building Materials*. – 2014. – Vol. 54. – P. 202-209.
9. **Ликов А. В.** Теорія сушки. – М.: Енергія, 1968. – 472 с.
10. **Репринцева С. М., Федорович Н. В.** Промисловий теплообмін дисперсних вільнопадаючих матеріалів. – М.: Наука, 1966. – 198 с.

Отримана в редакції 15.02.2020, прийнята до друку 03.03.2020

## Mathematical model of the process of heating and drying of wet materials

**A. Pavlenko<sup>1</sup>✉, L. Shumska<sup>2</sup>✉**

<sup>1</sup>Kielce University of Technology; al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7, Kielce, 25-314, Poland

<sup>2</sup>Poltava Oil and Gas College of Poltava National University Yuri Kondratyuk Poltava Politechnic, Hrushevskogo str., 2a, Poltava, 36021, Ukraine

✉ e-mail: <sup>1</sup>[apavlenko@tu.kielce.pl](mailto:apavlenko@tu.kielce.pl); <sup>2</sup>[schumska@gmail.com](mailto:schumska@gmail.com)

ORCID: <sup>1</sup><https://orcid.org/0000-0002-8103-2578>; <sup>2</sup><https://orcid.org/0000-0002-8103-2578>

*The solution to the problem of creating efficient porous thermal insulation materials and technologies for their production is inextricably linked to scientific research in the field of energy transfer in the porous structure during the swelling, curing and drying stages, providing the lowest thermal conductivity and density. The above-mentioned properties of materials are determined by the size of their porosity, by the ratio of micro- and macro-abundant materials, and by the properties of inter-porous materials forming a distinctive bearing frame, which in turn is determined by the production technology, type of raw materials and the conditions for their preparation. The problem of heat treatment of wet materials contains the question of the heat and mass inside the body transfer (an internal problem) and in the boundary layer at the interface between phases (an external problem). The amount of removable moisture depends on the degree of each of these processes development. When heated, the moisture content on the surface decreases, and this creates a concentration difference across the body. Therefore, a flow of moisture occurs in the body from the deep layers to the surface towards which the flow of heat is directed. Thus, when wet materials are heated, complex processes of moisture and heat exchange occur, which mutually*

*affect the enthalpy and the moisture content of both the material is heated and the environment. The features of mathematical model construction of heating and drying of wet materials process are considered in the article. The drying process is dignified as a thermal process with effective heat transfer coefficients that take into account the mass transfer. This makes it possible to obtain analytical dependencies that are convenient for engineering calculations, with which you can determine the temperature field and evaluate the kinetics of drying wet materials.*

**Keywords:** *Thermal insulation materials; Mathematical modeling; Heat treatment; Thermal conductivity; Thermal processes*

## References

1. **Pavlenko, A. M.** (2018) Dispersed phase breakup in boiling of emulsion. *Heat Transfer Research*, 49, 7, 633-641. DOI: 10.1615/HeatTransRes. 2018020630.
2. **Pavlenko, A.** (2020) Energy conversion in heat and mass transfer processes in boiling emulsions. *Thermal Science and Engineering Progress*, 15, 1 March, 100439.
3. **Nait-Ali, B., Oummadi, S., Portuguez, E., Alzina, A., Smith, D. S.** (2017) Thermal conductivity of ceramic green bodies during drying. *Journal of the European Ceramic Society*, 37, 4, 1839-1846.
4. **Yi, Dong, John, S. McCartney, Ning, Lu.** (2015) Critical Review of Thermal Conductivity Models for Unsaturated Soils. *Geotechnical and Geological Engineering*, 33, 207-221.
5. **Maroulis, Z. B., Krokida, M. K., Rahman, M. S.** (2002) A structural generic model to predict the effective thermal conductivity of fruits and vegetables during drying. *Journal of Food Engineering*, 52, 1, 47-52.
6. **Nuijten, Anne D. W., Hoyland, Knut V.** (2017) Modelling the thermal conductivity of a melting snow layer on a heated pavement. *Cold Regions Science and Technology*, 140, 20-29.
7. **Tarnawski, V. R., Leong, W. H., Gori, F., Buchan, G. D., Sundberg, J.** (2002) Inter-particle contact heat transfer in soil systems at moderate temperatures. *International Journal of Energy Research*, 26, 1345-1358.
8. **Cherki, A.-B., Remy, B., Khabbazi, A., Jannot, Y., Baillis, D.** (2014) Experimental thermal properties characterization of insulating cork-gypsum composite. *Construction and Building Materials*, 54, 202-209.
9. **Lykov, A. V.** (1968) Theory of drying. *Moscow: Energiya*, 472.
10. **Reprintseva, S. M., Fedorovich, N. V.** (1966) Radiant heat exchange of dispersed free-fall materials. *Moscow: Nauka*, 198.

---

Received 15 February 2020  
Approved 03 March 2020  
Available in Internet 04 July 2020