УДК 666. 983

И.А. Емельянова, д-р. техн. наук,
А.А. Задорожный, канд. техн. наук
Харьковский национальный университет строительства и архитектуры,
Н.А. Меленцов, главный инженер
ООО “Стальконструкция” г. Харьков

К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОЦЕССА ДВИЖЕНИЯ БЕТОННОЙ СМЕСИ ПО ТРУБОПРОВОДУ

Введение

Исследования поведения пограничного слоя бетонной смеси в трубопроводе при ее транспортировании следует проводить, взяв за основу обобщенную модель З.П. Шульмана, которая имеет вид [1, 2]

$$\tau_{ij} = 2\cdot\left[\frac{\tau_0^{1/n}}{A^{1/m}} + \mu^{1/m}\right] A^{n/m-1}\cdot \&_{ij} = B\cdot \&_{ij}\,. \qquad (1)$$

где τ_{ij} — тензор напряжений, который учитывает реакции, возникающие в среде при ее течении $\tau_{ij} = f(\&_{ij})$;

$\&_{ij} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{dv_i}{dx_j} + \frac{dv_j}{dx_x}\right)$ — тензор скоростей деформаций; μ — сдвиговая вязкость (консистентная); A — интенсивность скоростей деформаций.

Здесь

$$A = \begin{bmatrix} 2\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{dv}{dy}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{dw}{dz}\right)^2 + \\ \left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)^2 \end{bmatrix}^{\frac{1}{2}}. \qquad (2)$$

где $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$ — компоненты перемещения среды; (x,y,z) — пространственные координаты; τ_0 — предел текучести; *n, m* — постоянные характеризующие движение бетонной смеси, *n=2, m=3.*

Результаты исследования

Предел движения бетонной смеси в трубопроводе может быть представлен следующими системами уравнений:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dx} = 0\,. \qquad (3)$$

где u, v, w — компоненты скоростей деформаций при переменных среды вдоль осей *0X, 0Y, 0Z* — соответственно;

$$u = u(x,y,z,t),\ v = v(x,y,z,t),$$
$$w = w(x,y,z,t)$$

Уравнения движения (переноса количества движения):

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + u\cdot\frac{du}{dx} + v\cdot\frac{du}{dy} + w\cdot\frac{du}{dz} = \\ = F_x + \frac{1}{\rho}\cdot\left(-\frac{dp}{dx} + \frac{d\tau_{xx}}{dx} + \frac{d\tau_{xy}}{dy} + \frac{d\tau_{xz}}{dz}\right) \\ \frac{dv}{dt} + u\cdot\frac{dv}{dx} + v\cdot\frac{dv}{dy} + w\cdot\frac{dv}{dz} = \\ = F_y + \frac{1}{\rho}\cdot\left(-\frac{dp}{dy} + \frac{d\tau_{yx}}{dx} + \frac{d\tau_{yy}}{dy} + \frac{d\tau_{yz}}{dz}\right). \\ \frac{dw}{dt} + u\cdot\frac{dw}{dx} + v\cdot\frac{dw}{dy} + w\cdot\frac{dw}{dz} = \\ = F_z + \frac{1}{\rho}\cdot\left(-\frac{dp}{dz} + \frac{d\tau_{zx}}{dx} + \frac{d\tau_{zy}}{dy} + \frac{d\tau_{zz}}{dz}\right) \end{cases} \qquad (4)$$

В пристенном слое бетонной смеси при ее движении следуют также учесть тепловой фактор. В таком случае, уравнение энергии имеет вид

$$\begin{aligned} &\rho_0\cdot C_p\cdot\left(\frac{dT}{dt} + u\cdot\frac{dT}{dx} + v\cdot\frac{dT}{dy} + w\cdot\frac{dT}{dw}\right) = \\ &= -\left(\frac{dq_x}{dx} + \frac{dq_y}{dy} + \frac{dq_z}{dz}\right) + \\ &+ \tau_{xx} + \&_{xx} + \tau_{yy} + \&_{yy} + \tau_{zz} + \&_{zz} + 2\tau_{xy}\cdot\&_{xy} + \\ &+ 2\tau_{yz}\cdot\&_{yz} + 2\tau_{xz}\cdot\&_{xz} \end{aligned} \qquad (5)$$

где t — время движения бетонной смеси по трубопроводу; F_x, F_y, F_z — силы, действующие на поток транспортируемой смеси по трубопроводу; C_p — теплоемкость среды при постоянном давлении; c_0 — средняя плотность бетонной смеси; p давление, которое испытывает смесь при транспортировании по трубопроводу со стороны насосной части; T — абсолютная температура; q_i — составляющие плотности теплового потока за счет теплопроводности, имеющие место в пристенном слое бетонной смеси.

Учитывая сложность протекания процесса движения смеси в пристенном слое с учетом температурных явлений предлагается уравнения пограничного слоя (1) при установившемся течении рассматривать в предположении отсутствия диссипации энергии и сил, действующих на поток смеси в трубопроводе, а также в допущении постоянства всех физических характеристик среды. При этом, временные производные отсутствуют.

Вводятся безразмерные независимые и зависимые переменные

$$x = x_1 \cdot L;\ y = y_1 \cdot \varepsilon \cdot L;\ v = v_1 \cdot \varepsilon \cdot U;$$
$$u = u_1 \cdot U \quad ,$$

ε — малый параметр, e<<*1; [L]=M; [U]=1/c;* x_1, y_1, v_1, u_1 — безразмерные величины; L — характерный линейный размер в задаче; U — характерная скорость деформации в потоке бетонной смеси.

В случае решения задачи плоском варианте система (2) зависимости от z и компонентов w, производные w по координатам x и y отсутствуют, т.е.

$$u = u(x,y,t),\ v = v(x,y,t),$$
$$w \equiv 0,\ \frac{dw}{dx} = 0,\ \frac{dw}{dy} = 0,\ \frac{dw}{dz} = 0$$
$$u(x,y,t) \to u(x,y);$$
$$v(x,y,t) \to v(x,y)$$

запишутся в виде:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0. \qquad (6)$$

$$\varepsilon^{\frac{n}{m}+1} \cdot \mathrm{Re} \cdot \left(u \cdot \frac{du}{dx} + v \cdot \frac{du}{dy} \right) = -\varepsilon^{\frac{n}{m}+1} \cdot \frac{L^{\frac{n}{m}} \cdot p_0}{\mu^{\frac{n}{m}} \cdot U^{\frac{n}{m}}} \times$$
$$\times \frac{dp}{dx} + 2\varepsilon^2 \cdot \frac{d}{dx} \left\{ \left[S^{\frac{1}{n}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{m}} + A^{\frac{1}{m}} \right]^n \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{du}{dx} \right\} + \qquad (7)$$
$$+ \frac{d}{dy} \left\{ \left[S^{\frac{1}{n}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{m}} + A^{\frac{1}{m}} \right] \cdot \frac{1}{A} \cdot \left(\frac{du}{dy} + \varepsilon^2 \cdot \frac{dv}{dx} \right) \right\}.$$

$$\varepsilon^{\frac{n}{m}+3} \cdot \mathrm{Re} \cdot \left(u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{dv}{dy} \right) = -\varepsilon^{\frac{n}{m}+1} \cdot \frac{L^{\frac{n}{m}} \cdot p_0}{\mu^{\frac{n}{m}} \cdot U^{\frac{n}{m}}} \times$$
$$\times \frac{dp}{dy} + \varepsilon^2 \cdot \frac{d}{dx} \left\{ \begin{matrix} \left[S^{\frac{1}{n}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{m}} + A^{\frac{1}{m}} \right]^n \cdot \frac{1}{A} \times \\ \times \left(\frac{du}{dy} + \varepsilon^2 \cdot \frac{dv}{dx} \right) \end{matrix} \right\} + \qquad (8)$$
$$+ 2\varepsilon^2 \frac{d}{dy} \left\{ \left[S^{\frac{1}{n}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{m}} + A^{\frac{1}{m}} \right] \cdot \frac{1}{A} \cdot \frac{dv}{dy} \right\}.$$

$$u \cdot \frac{d\theta}{dx} + v \cdot \frac{d\theta}{dy} = \frac{a}{UL} \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \left(\frac{d^2\theta}{dy^2} + \varepsilon^2 \cdot \frac{d^2\theta}{dx^2} \right),$$
$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot C_p}. \qquad (9)$$

Здесь индекс “1” безразмерных величин опущен (для упрощения записей) и:

$$A = \left[\begin{matrix} \varepsilon^2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \varepsilon^2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{dv}{dy} \right)^2 + \\ + \left(\frac{du}{dy} + \varepsilon^2 \cdot \frac{dv}{dx} \right)^2 \end{matrix} \right]^{\frac{1}{2}}. \qquad (10)$$

Кроме того, здесь введены обозначения:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho \cdot L^{\frac{n}{m}} \cdot U^{2-\frac{n}{m}}}{\mu^{\frac{n}{m}}}. \qquad (11)$$

- обобщенное число Рейнольдса;

$$S = \frac{\tau_0 \cdot L^{\frac{n}{m}}}{\mu^{\frac{n}{m}} \cdot U^{\frac{n}{m}}}. \qquad (12)$$

- безразмерный параметр нелинейной вязкопластичности.

Для анализа пограничного слоя различного типа следует воспользоваться следующими соотношениями.

$$\varepsilon^{\frac{n}{m}+1}\cdot \mathrm{Re}\cdot\left(u\cdot\frac{du}{dx}+v\cdot\frac{du}{dy}\right)=$$

$$=-\varepsilon^{\frac{n}{m}+1}\cdot\frac{L^{\frac{n}{m}}\cdot p_0}{\mu^{\frac{n}{m}}\cdot U^{\frac{n}{m}}}\cdot\frac{dp}{dx}+$$

$$+\varepsilon^2\cdot\left[S^{\frac{1}{n}}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{m}}+\left(1-\frac{n}{m}\right)\cdot\left(\frac{du}{dy}\right)^{\frac{1}{m}}\right]\times$$

$$\times\left[S^{\frac{1}{n}}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{m}}+\left(\frac{du}{dy}\right)^{\frac{1}{m}}\right]^{n-1}\times$$

$$\times\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{\frac{dv}{dx}}{\frac{du}{dy}}\right)\right]-\varepsilon^2\times$$

$$\times\left[S^{\frac{1}{n}}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{m}}+\left(1-\frac{n}{m}\right)\cdot\left(\frac{du}{dy}\right)^{\frac{1}{m}}\right]\times$$

$$\times\left[S^{\frac{1}{n}}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{m}}+\left(\frac{du}{dy}\right)^{\frac{1}{m}}\right]^{n-1}\cdot\frac{\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^2u}{dydx}}{\left(\frac{du}{dy}\right)^2}+ \qquad (13)$$

$$+\varepsilon^2\cdot\left[S^{\frac{1}{n}}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{m}}+\left(\frac{du}{dy}\right)^{\frac{1}{m}}\right]^{n}\cdot\frac{\frac{d^2u}{dx^2}}{\left(\frac{du}{dy}\right)^2}+$$

$$+\frac{n}{m}\cdot\left[S^{\frac{1}{n}}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{m}}+\left(\frac{du}{dy}\right)^{\frac{1}{m}}\right]^{n-1}\cdot\frac{d^2u}{dy^2}\cdot\left(\frac{du}{dy}\right)^{\frac{1}{n}-1},$$

или

$$\varepsilon^{\frac{n}{m}+1}\cdot\frac{L^{\frac{n}{m}}\cdot p_0}{\mu^{\frac{n}{m}}\cdot U^{\frac{n}{m}}}\cdot\frac{dp}{dy}=$$

$$=-\varepsilon^2\cdot\left[S^{\frac{1}{n}}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{m}}+\left(1-\frac{n}{m}\right)\cdot\left(\frac{du}{dy}\right)^{\frac{1}{m}}\right]\times$$

$$\times\left[S^{\frac{1}{n}}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{m}}+\left(\frac{du}{dy}\right)^{\frac{1}{m}}\right]^{n-1}\times$$

$$\times\left[\frac{d}{dy}\left(\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}\right)-\frac{\frac{d^2u}{dy^2}\cdot\frac{du}{dx}}{\left(\frac{du}{dy}\right)^2}\right]- \qquad (14)$$

$$-\varepsilon^2\cdot\left[S^{\frac{1}{n}}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{m}}+\left(\frac{du}{dy}\right)^{\frac{1}{m}}\right]\cdot\frac{\frac{d^2u}{dydx}}{\frac{du}{dy}}.$$

Таким образом, полученные уравнения (13) и (14) позволяют проанализировать различные условия создания пограничного слоя бетонной смеси при ее движении по транспортному трубопроводу.

В частности, при создании вязкопластичного слоя бетонной смеси при ее движении по транспортному трубопроводу, проанализировав системы уравнений (13), (14) для описания такого слоя может быть использовано уравнение неразрывности потока [3, 4]

$$u\frac{du}{dx}+v\frac{du}{dy}=-\frac{dp}{dx}+\frac{n}{m}\cdot\left(\frac{du}{dy}\right)^{\frac{n}{m}-1}, \qquad (15)$$

которое рассматривается в случае

$$\varepsilon^{\frac{n}{m}-1}\cdot\mathrm{Re}\approx 1,\ S^{\frac{1}{n}}\cdot\varepsilon^{\frac{1}{m}}L<1.$$

Тогда в безразмерной записи уравнение (15) можно представить как

$$\frac{du^2}{dx}+\frac{d(uv)}{dy}=-\frac{dp}{dx}+\frac{d(\tau_{xy})}{dy}. \qquad (16)$$

При этом,

$$x = \frac{x'}{v};\; p = \frac{p'}{\rho v^2};\; \frac{\tau'_{xy}}{\rho v^2};\; y = = \frac{y'}{L} \cdot \mathrm{Re}^{\frac{1}{1+\frac{n}{m}}};\; v = \frac{v'}{v} \cdot \mathrm{Re}^{\frac{1}{1+\frac{n}{m}}};$$

$$\mathrm{Re} = \rho_0 \cdot v^{2-\frac{n}{m}} \cdot L^{\frac{\frac{n}{m}}{\mu^{\frac{1}{m}}}}. \qquad (17)$$

где u — скорость продольного перемещения частиц смеси вдоль оси трубопровода; p — давление, которое испытывает пограничный слой смеси в процессе подачи растворобетононасосом; v — скорость поперечного перемещения частиц смеси вдоль оси трубопровода; Re — число Рейнольдса; ρ_0 — средняя плотность бетонной смеси в пограничном слое; μ — вязкость бетонной смеси в пограничном слое; L — длина транспортирующего трубопровода.

После вычитания уравнения (16) из уравнения неразрывности (15) получаем зависимость:

$$\frac{d}{dx}\left[u(1-u)\right] + \frac{d}{dy}\left[v(1-u)\right] = -\frac{dp}{dx} + \frac{d(\tau_{xy})}{dy}. \qquad (18)$$

При $u = 1$; $\frac{du}{dy} = 0$; $\tau = \tau_0$ при $y = \delta(x)$.

В таком случае с учетом интегрального условия уравнение (18) имеет вид:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\delta} u(1-u)dy = \frac{dp}{dx}\delta - \tau_0 + \tau_w. \qquad (19)$$

Принимаем $p(x,y)$ — величина известная, закон изменения давления вдоль пограничного слоя смеси

$$p = p_1 + \alpha\left(\frac{d\delta}{dx}\right)^{\beta},$$

где $p_1 = const$; $\alpha < \beta \le 1$; $\alpha = \alpha(\tau_0)$; δ — толщина пограничного слоя; τ_0 — предельное напряжение сдвига слоев смеси; τ_w — напряжение сдвига вязкопластичных сред.

Для решения полученного интегрального ураанения с учетом непрерывного процесса вязкопластичного течения смеси, можно воспользоваться параболическим законом в виде полинома, который позволит определить толщину вязкопластичного пограничного слоя этой смеси.

$$\bar{u} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) = = \alpha_0 + \alpha_1\left(\frac{y}{\delta}\right) + \alpha_2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + \alpha_3\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \ldots \qquad (20)$$

В конечном итоге уравнение (19) примет вид

$$\frac{d}{dx}\left(\delta\int_0^1 u(1-u)d\eta\right) = = \left[W^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{\delta^{\frac{1}{m}}}\left(\frac{du}{d\eta}\right)_{\eta=0}^{\frac{1}{m}}\right]^m - W. \qquad (21)$$

где $W = \left(\frac{\tau_0}{\rho_0 v^2}\right) \cdot \mathrm{Re}^{\frac{n}{m+n}} = S \cdot \mathrm{Re}^{\frac{-m}{m+n}}$ — критерий нелинейности вязкопластичности; $\eta = \frac{y}{\delta}$.

Используя ранее приведенные граничные условия, можно определить профиль скорости:

$$\bar{u} = \left(\frac{3\eta}{2} - \frac{\eta^3}{2}\right). \qquad (22)$$

С учетом выражения (22) уравнение 21 преобразуется к виду

$$\frac{39}{280} \cdot \frac{d\delta}{dx} = \left[W^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{\delta^{\frac{1}{m}}}\left(\frac{du}{d\eta}\right)^{\frac{1}{m}}\right]^n - W. \qquad (23)$$

где $\left(\frac{du}{d\eta}\right)_{\eta=0} = \frac{3}{2}$, следовательно

$$\frac{39}{280} \cdot \delta^{\frac{n}{m}} \cdot \frac{d\delta}{dx} = \left[W^{\frac{1}{n}} \cdot \delta^{\frac{1}{m}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{m}}\right]^n - W \cdot \delta^{\frac{n}{m}}.$$

В случае $m=n$

$$\frac{39}{280} \cdot \delta^{\frac{n}{m}} \cdot \frac{d\delta}{dx} = \left[(W\delta)^{\frac{1}{n}} + \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^n - W \cdot \delta. \qquad (24)$$

Для определения величины сопротивлений возникающих при контакте пристенного пограничного слоя бетонной смеси с внутренней поверхностью стенок трубопровода воспользуемся уравнением (19) с учетом модели Шульмана $n=m=3$; $n=m=2.5$ для бетонных смесей.

После выполненных преобразований модель имеет вид:

$$\frac{39}{280} \cdot \frac{d\delta(x)}{dx} = \frac{dp}{dx}\delta - \tau_0 + \tau_w.$$

$$\frac{39}{280}\cdot\frac{d\delta(x)}{dx}=\tau_w-\tau_0=$$

или
$$=\left[W^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{\delta^{\frac{1}{m}}}+\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{m}}\right]^n-W. \qquad (25)$$

В конечном итоге получим

$$\tau_w=\tau_0+\left[W^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{\delta^{\frac{1}{m}}}+\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{m}}\right]^n-W. \qquad (26)$$

Значение $\tau_w-\tau_0$ определяется, исходя из дифференциального уравнения (25) при заданных параметрах *W, n, m,ϕ_0*. Тогда

$$\tau_{w\,действ.}=\left\{\tau_0+\left[W^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{\delta^{\frac{1}{m}}}+\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{m}}\right]^n-W\right\}\times \qquad (27)$$

$$\times\rho_0\cdot v^2.$$

Следовательно, уравнения (13), (14) и (27) позволяют создать математическую модель поведения пограничного слоя бетонной смеси при ее движении по транспортному трубопроводу.

На рисунках 1, 2 показаны результаты расчета реализации формул (20) и (27) при значениях *n=m=2; n=m=2* и W=100 (21), которые найдены с помощью ЭВМ.

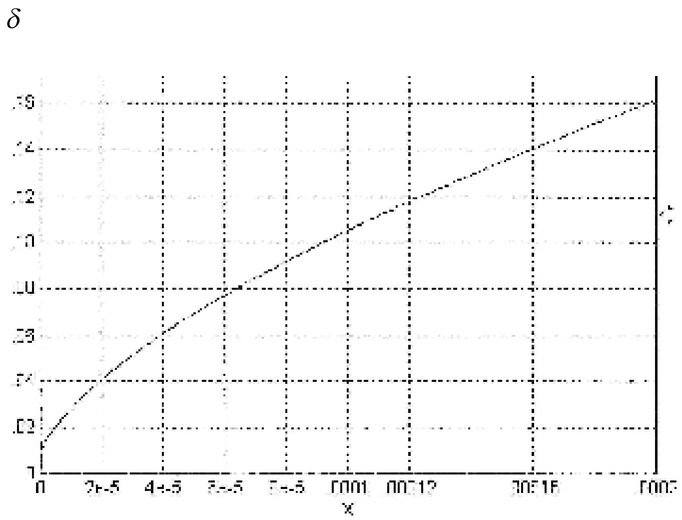

Рисунок 1 — Значения толщины пограничного слоя δ для условий n=m=2; n=m=2 и фиксированного параметра нелинейности вязкопластичности W=100.

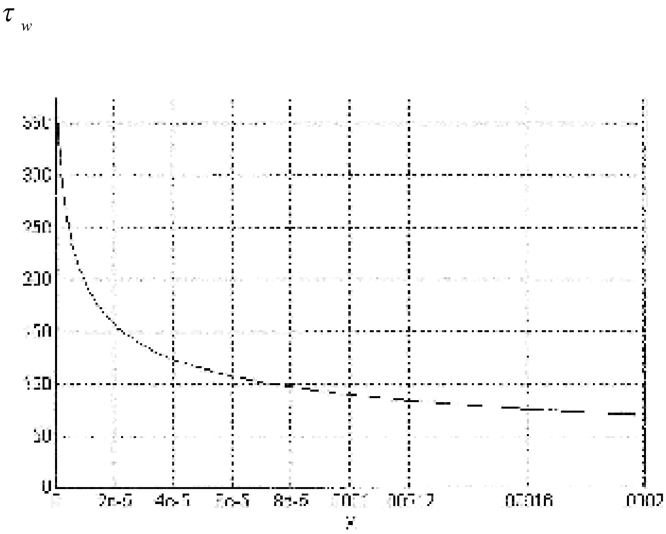

Рисунок 2 — Значения напряжения сдвига вязкопластичной среды τ_w для условий n=m=2; n=m=2 и фиксированного параметра нелинейности вязкопластичности W=100.

Выводы

1. Проведены исследования поведения пограничного слоя бетонной смеси в трубопроводе при ее транспортировании на примере модели Шульмана для условий непрерывного процесса ее вязкопластичного течения.

2. Определены условия для построения математической модели толщины пограничного слоя бетонной смеси *д* и напряжения сдвига вязкопластичной среды τ_w.

Литература

1. Смольский, Б.М. Реодинамика и теплообмен нелинейно-вязкопластичных материалов / Б.М. Смольский, З.П. Шульман, В.М. Гориславец. — Минск: Наука и техника, 1970. — 240 с.

2. Прагер, В. Введение в механику сплошных сред. — М.: Изд-во иностр. л-ры, 1963. — 406 с.

3. Лойцянский, Л.Г. Ламинарный пограничный слой / Л.Г. Лойцянский. — М.: Физматгиз, 1962.

4. Бубнов, В.А. О некоторых краевых задачах теории пограничного слоя в степенных жидкостях / В.А. Бубнов. В кн.: Тепло- и массоперенос. — Минск: Наука и техника, 1968. — Т.3.

Надійшла 20.04.2012 р.