

С.В. Дибкалюк, канд. мед. наук

Національна академія післядипломної освіти ім. П.Л.Шупика, Київ, Україна,

В.А. Черняк, д-р мед. наук

Національний медичний університет ім. О.О.Богомольця, Київ, Україна,

В.Ю. Зоргач,

С.В. Струтинський, канд. техн. наук

Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут”, Київ, Україна,

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРУЖНО-РЕГУЛЯТОРНИХ ТА ГІДРАВЛІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ХРЕБТОВИХ АРТЕРІЙ ШИЙНОГО ВІДДІЛУ ЛЮДИНИ

Обоснована необходимость решения важной научной проблемы, которая касается определения количественных характеристик патологии кровообращения в артериях шейного отдела человека. Выбранные методы исследований направлены на определение формы артерии деформированной спиралевидной мышцей, и патологических изменений гидравлических характеристик артерии на деформированном участке с учетом особенностей крови как жидкой субстанции, которая включает существенную объемную долю эритроцитов.

Приведены результаты математического моделирования методом конечных элементов формы участка позвоночной артерии, деформированной спиралевидной мышцей. Установлены количественные характеристики деформированного сечения артерии.

Justified by the need to address important scientific issues relating to the definition of quantitative characteristics of the pathology of blood circulation in the arteries of the cervical rights. Selected methods of research aimed at determining the shape of the deformed spiral artery muscle and definition of pathological changes in the hydraulic characteristics of the artery on the deformed section allowing for the blood as a liquid substance, which includes a substantial volume fraction of red blood cells.

The results of mathematical modeling by finite element shape of the deformed portion of vertebral artery spiral muscle. The quantitative characteristics of the deformed cross-section of the artery. For deformation artery is getting flattened crescent shape.

Вступ

Кровоносна система людини, що складається з артерій і вен, тісно контактує з іншими органами, зокрема з м'язами. У деяких випадках це призводить до перетискання артерії та зменшення кровотоку в ній. Тому дослідження, які дозволять кількісно та якісно оцінити деформацію хребтової артерії, що перекивається м'язом, з подальшим визначенням гідравлічного опору, який при цьому виникає, є актуальними.

Проблема у загальному вигляді полягає в установленні причин і наслідків негативного впливу сусідньо розташованих м'язів на артерії середнього розміру. Вона пов'язана із важливими науковими і практичними завданнями розробки радикальних методів лікування патологій хребтових артерій шийного відділу людини.

У літературних джерелах висвітлено значну кількість результатів досліджень механіки судин та гідравліки крові [1]. Розглядаються різноманітні характеристики артерій та особливості течії в них [2, 3]. Низку публікацій присвячено вивченню особливостей зміни форми артерій шийного відділу при їх стисканні спіралевидним

м'язом [4, 5]. Досліджень, направлених на розрахунок напружено-деформованого стану артерій при їх стисканні та відповідних змін гідравлічних характеристик артерій із врахуванням специфіки руху крові, у літературних джерелах не виявлено.

До невирішених раніше частин загальної проблеми відносяться знаходження напружено-деформованого стану хребтової артерії, яка стискається спіралевидним м'язом, та визначення на цій основі гідравлічного опору стиснутої артерії із врахуванням специфічних особливостей руху крові.

Артерія за наявності патології є складним об'єктом досліджень, який потребує неординарних методів. Доцільним є проведення міждисциплінарних досліджень фахівцями у галузі медицини та механіки. Ефективним є застосування фундаментальних положень механіки деформованого тіла та методів гідромеханіки [6].

Метою досліджень є встановлення напружено-деформованого стану хребтової артерії, що стискається м'язом, та визначення залежності гідравлічного опору від ступеня перекриття хребтової артерії.

Задачами досліджень є встановлення особливостей геометричних, механічних та гідравлічних характеристик хребтової артерії, де має місце її стискання спіралевидним м'язом, та визначення зміни параметрів течії крові у звуженій артерії.

Виклад основного матеріалу

Характеристика об'єкта та предмета досліджень

Хребтові артерії відносяться до артерій середнього розміру. Їх діаметр знаходиться у межах $d = 3,5-4,5$ мм. Хребтові артерії розташовані паралельно сонним артеріям (рисунок 1) і забезпечують подачу крові до усіх органів голови.



Рисунок 1 — Ангіограма артерій шийного відділу (стрілками показано місця звуження хребтових артерій)

У нормальному стані в артерії має місце рух крові близький до ламінарного. Швидкість руху крові в артеріях не перевищує $0,5$ м/с. Артерії мають незначну конфузориальність, що стабілізує течію крові і зменшує ймовірність вихороутворення. При стисненні артерій спіралевидними м'язами спостерігається їх компресія (зменшення прохідного перетину). Це має місце на початкових ділянках артерій і спостерігається на ангіограмах (показано стрілками на рисунку 1). Звуження артерій носить складний просторовий характер. Для дослідження зміни форми артерії проведено математичне моделювання її напружено-деформованого стану.

Моделювання напружено-деформованого стану артерії

Визначено напружено-деформований стан артерії перекритої м'язом. Розрахунки проведено з використанням метода скінченних елементів [7].

Метод скінченних елементів (МСЕ) – технологія, що дозволяє провести аналіз напружено-деформованого стану об'єкту за його тривимірною моделлю.

МСЕ дозволяє достатньо точно визначити напрям та величину деформацій у точках (вузлах) моделі, а також напруження, що виникають у цих точках.

Згідно методу, тривимірна модель розбивається за допомогою сітки на велику кількість скінченних елементів. Точність моделювання залежить від кількості елементів, чим їх більше, тим вища точність.

У процесі моделювання програмний комплекс розв'язує рівняння, які описують напружено-деформований стан для кожного скінченного елемента моделі. Результати розрахунків у більшості випадків візуалізуються.

Важливим було правильно встановити форму м'язу, що взаємодіє із артерією, схему, за якою він навантажується, а також, яким чином він контактує з артерією. Згідно із [3, 4] м'яз має спіралевидну форму і по усій довжині прилягає до артерії та навантажується аксіально.

Для даної схеми навантаження проведено розрахунок напружено-деформованого стану артерії, яка перетискається (рисунок 2, а).

Навантаження, що створюється м'язом є досить значним і змінюється у широких межах [3]. Воно є достатньо великим у порівнянні із силами жорсткості стінок артерії. Тому оцінювалися насамперед форма стінки навантаженої артерії та визначалися області максимальних деформацій при різних величинах навантаження. Прийнятні пружні властивості матеріалів артерії та м'яза отримано з робіт [6].

При проведенні моделювання методом МСЕ навантаження, що прикладалися до артерії, варіювалися. У результаті дії зовнішніх зусиль артерія приймала форму близьку до спіралевидної на навантаженій ділянці (рисунок 2, б).

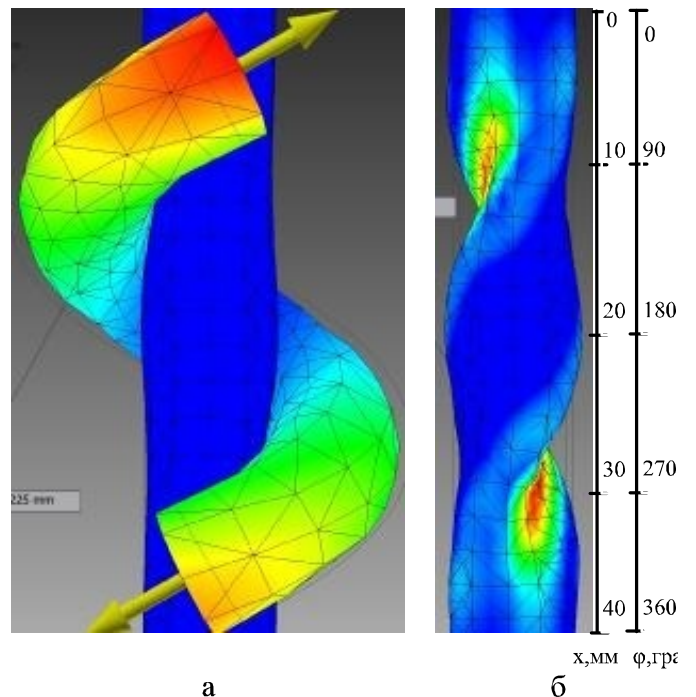


Рисунок 2 — Схема навантаження (а) та типова деформація хребтової артерії (б)

Стиск артерії має місце на довжині $x \leq 40$ мм. При цьому стиснений перетин повертається по гвинтовій лінії на кут $\varphi \leq 200^\circ$. Стиск артерії залежить від величини напруження спіралевидного м'язу (рисунок 3).

Математична обробка даних моделювання засвідчила, яким чином змінюється форма поперечного перетину артерії у залежності від навантаження. Визначено,

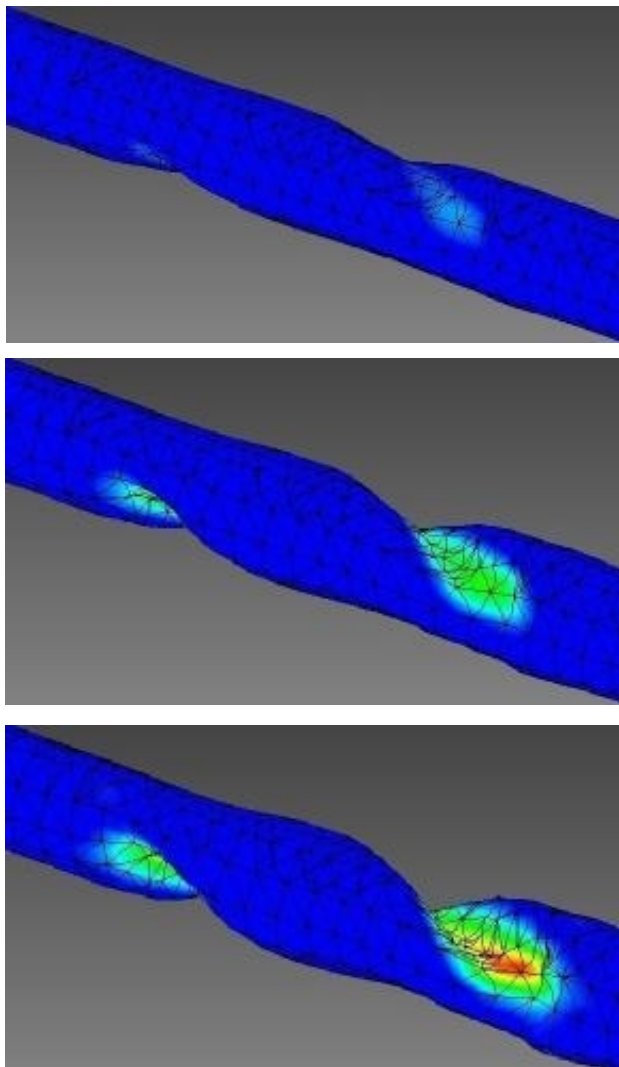


Рисунок 3 — Послідовні кадри компресії артерії при збільшенні напруження спіральної м'язи

яким чином змінюється форма поперечного перерізу по довжині та чисельно знайдено цю зміну.

Форма поперечного перетину артерії при навантаженні змінюється від кругової до серповидної (рисунок 4)

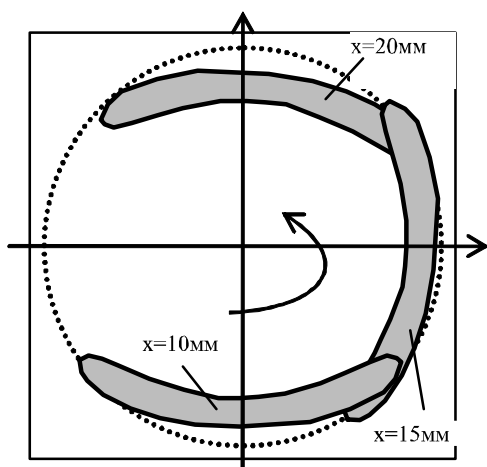


Рисунок 4 — Форма поперечного перерізу артерії при її компресії та зміни положення перетину по довжині артерії

Встановлено, що найбільше відношення площ поперечного перетину нормальної артерії до звуження чисельно дорівнює восьми. Довжина ділянки з максимальним звуженням складає 20 мм при загальній довжині артерії 200 мм.

Проведені дослідження дали змогу встановити, що форма поперечного перетину каналу перетиснутої артерії може бути апроксимована деформованим еліпсом серповидного вигляду (рисунок 5).

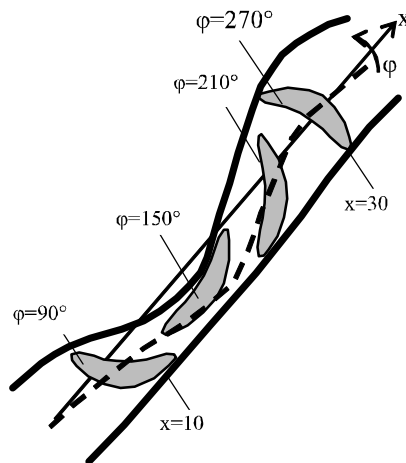


Рисунок 5 — Зміна положення перетину артерії на ділянці звуження

Довжина великої осі еліпса є сталою при різних зовнішніх навантаженнях. Розмір малої осі змінюється, причому ця зміна є пропорційною до зміни площі поперечного перетину артерії.

На основі одержаних даних проведено розрахунки гідравлічних характеристик перетиснутої артерії.

Геометричні характеристики еритроцитів як основної складової рухомої крові

Кров є рідкою субстанцією, близько половини якої складають клітини крові. Основними з них є еритроцити, об'ємна маса яких складає близько 45%. За мікрофотографіями еритроцитів [8] встановлено їх форму і розміри у малорухомому стані (рисунок 6)

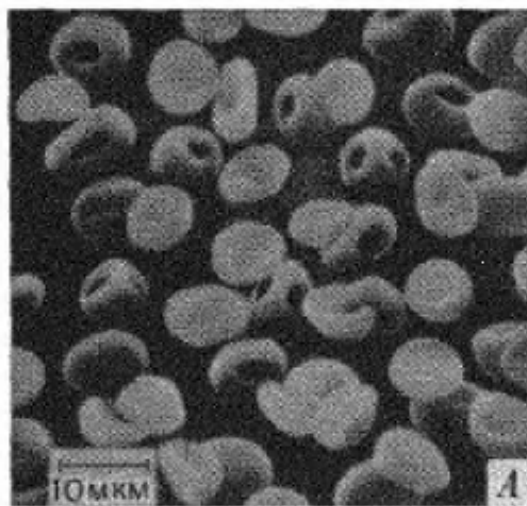


Рисунок 6 — Мікрофотографії еритроцитів у малорухомому стані [6]

Згідно наведених даних, еритроцит має форму дуже гнучкого й двояковігнутого диску (рисунок 7).

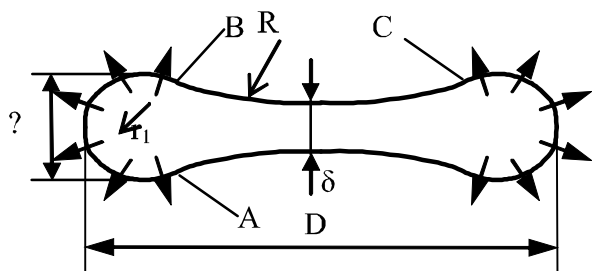


Рисунок 7 — Геометричні розміри перетину еритроцита, який знаходиться у недеформованому стані

Оболонка еритроцита має вигляд мембрани, маса якої складає 3% загальної маси еритроцита. Товщина мембрани складає близько 7,5 нм [6].

Спричинена така форма еритроцита через характер сил тиску на мембрану. Осмотичний тиск у плазмі крові складає близько 0,7 МПа. Це достатньо високий тиск, який у 7 разів перевищує атмосферний.

Припустимо, що проникність мембрани еритроцита визначається локальним радіусом кривизни мембрани. Відповідно на ділянці AB з малим радіусом кривизни, проникність мембрани є набагато більшою, ніж на ділянці BC із великим радіусом кривизни. Тому на рідкий вміст еритроцита на ділянці AB діятимуть значні сили тиску в напрямі, показаному стрілками. Відповідно рідкий вміст еритроцита видавлюватиметься до кільцевої периферійної частини, обмеженої контуром AB.

Прийнято, що вміст еритроцитів є рідким. Еритроцит як механічна система має особливі властивості. Вважається, що мембрана еритроцита завжди має постійну площу [6]. У процесі даних досліджень визначено об'єм та загальну площу мембрани еритроцита.

В якості характерних розмірів прийнято загальноживані параметри, а саме: максимальний діаметр еритроцита D , максимальна товщина Δ та товщина усередині диска δ (рисунок 8)

Форму еритроцита описано аналітичними залежностями. Периферійну частину еритроцита AB представлено у вигляді частини тора, а бокову частину диска BC — у вигляді сферичного сегмента. Визначено площу поверхні еритроцита та його об'єм. Для цього проведено інтегрування по площі та інтегрування по об'єму. Для значень параметрів $D=8$ мкм, $\Delta=2$ мкм, $\delta=1$ мкм визначено площу поверхні S_0 та об'єм еритроцита V_0 .

У процесі переміщення еритроцитів по артерії його форма змінюється. При цьому його форма і об'єм залишаться незмінними. Введемо припущення, що еритроцит набув форму еліпсоїда обертання з розміром по осі симетрії H та діаметром D . Об'єм V_e та площа поверхні S_e такого еритроцита складають

$$V_e = \frac{\pi \cdot H \cdot D^2}{6}, \quad S_e = \frac{\pi}{\sqrt{2}} D \sqrt{H^2 + D^2} \quad (1)$$

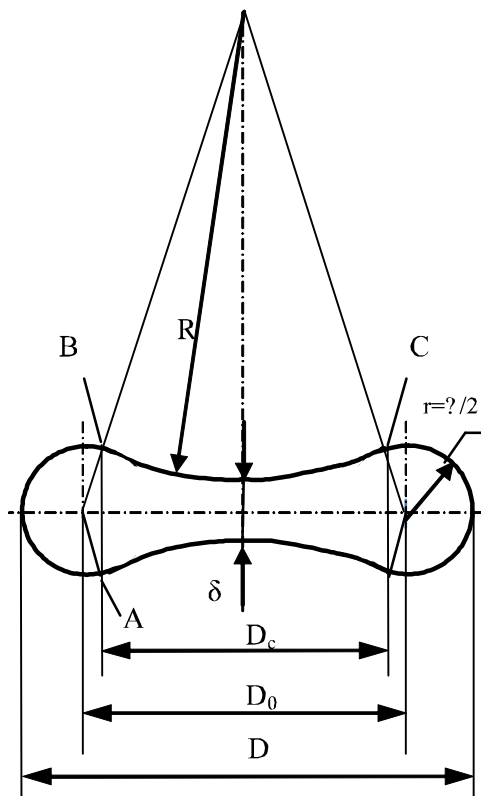


Рисунок 8 — Прийнята ідеалізована геометрична форма перетину недеформованого еритроцита

Прирівняємо об'єм і площу поверхні недеформованого еритроцита до об'єму і площі моделі еритроцита у вигляді еліпсоїда обертання (1). Одержимо систему двох рівнянь для визначення параметрів D і H :

$$\begin{cases} \frac{\pi}{6} HD^2 = V_0, \\ \frac{\pi}{\sqrt{2}} D \sqrt{H^2 + D^2} = S_0. \end{cases} \quad (2)$$

Система рівнянь (2) має два розв'язки. Для визначення раніше значень S_0 та V_0 маємо:

$$\begin{cases} H_1 \cong 3,4 \text{ мкм}, & D_1 \cong 7,2 \text{ мкм} \\ H_2 \cong 15,1 \text{ мкм}, & D_2 \cong 3,6 \text{ мкм}. \end{cases}$$

Одержані геометричні розміри визначають два характерних ідеалізованих за формою еритроцити. Один відповідає сплюсненому еліпсоїду обертання, другий — витягнутому еліпсоїду (рисунок 9)

Одержані геометричні моделі еритроцитів мають однакові площі і об'єми і є близькими до характерних форм еритроцитів, які спостерігаються в експериментах (рисунок 6).

У дійсності форма еритроцитів відрізнятиметься від даних моделей, але як показано нижче, вони відображають форму еритроцита у залежності від зовнішніх умов.

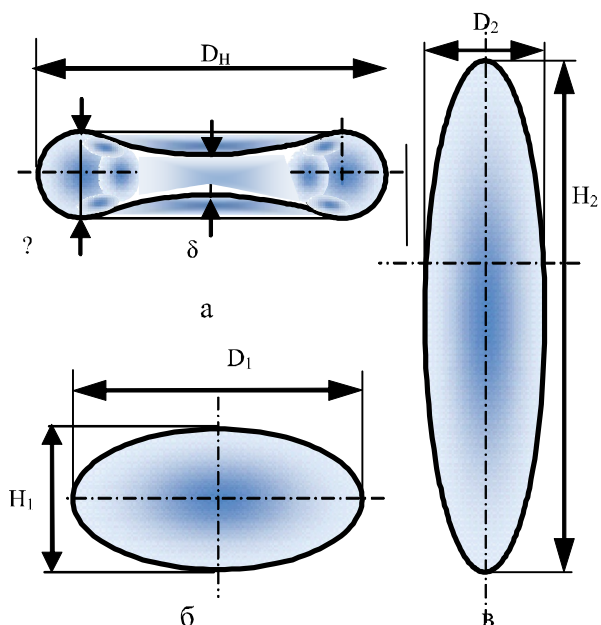


Рисунок 9 — Геометричні форми еритроцитів з однаковими об'ємами та однаковими площами поверхні мембрани: а — недеформований; б — сплюснутий еліпсоїд обертання; в — витягнутий еліпсоїд обертання

Зміна форми еритроцитів під дією гідродинамічних факторів

Модель у вигляді двояковвігнутого диска відповідає еритроциту, який знаходиться у малорухомій рідині, модель у вигляді сплющеного еліпсоїда відповідає еритроциту, який повільно рухається у рідині з невеликими значеннями напруження зсуву, а модель у вигляді витягнутого еліпсоїда відповідає еритроциту, який знаходиться у рідині з високим напруженням зсуву. Це підтверджено даними з [6, 8]. При дії напружень зсуву, які мають місце при переміщенні рідини, еритроцит набуває витягнутої форми (рисунок 10).

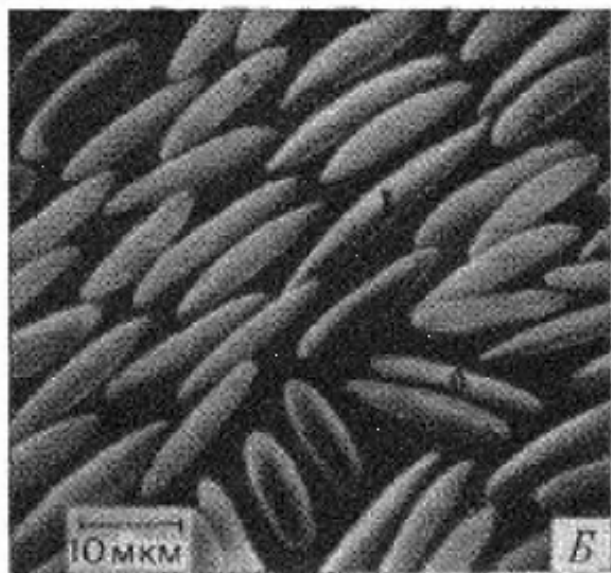


Рисунок 10 — Форма еритроцитів при дії значних напружень зсуву [6]

Еритроцити, які показано на фото, знаходяться в екстремальних умовах при дії високих напружень зсуву ($\tau=300 \text{ Па}$). При цьому вони набувають форму еліпсоїдів обертання, витягнутих у напрямі більшої осі. Співвідношення довжин еліпсоїда H до діаметра D складає 3—5. Це відповідає ідеалізованій моделі у вигляді витягнутого еліпсоїда обертання (рисунок 9, в), в якій відношення довжини до діаметра еліпсоїда складає 4,2.

Причиною зміни форми еритроцита є розподіл тиску на його мембрані внаслідок обтікання його рідким середовищем. Рівномірний потік крові має місце у центральній частині недеформованої артерії, тому форма еритроцита вірогідно відповідатиме сплюсненому еліпсоїду обертання (рисунок 9, б).

При обтіканні еліпсоїдальних еритроцитів, які розташовані під кутом α до потоку, формується течія з критичними точками K_1, K_2 [9] (рисунок 11)

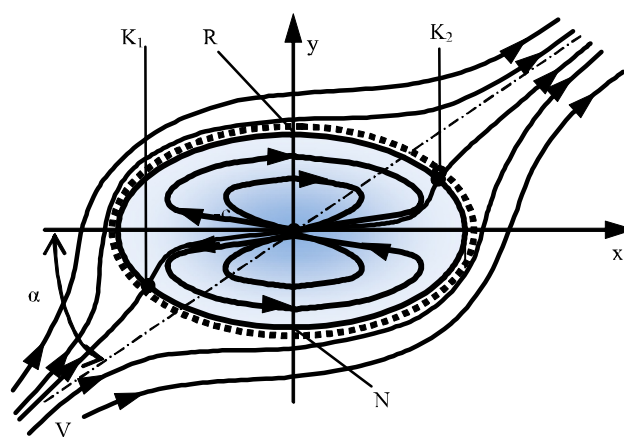


Рисунок 11 — Розрахункова картина ліній течії в перетині еритроцита, який обтікається рівномірним потоком рідини, направленим під кутом α до осі еліпсоїда

На сторонах еліпсоїда в точках N і R тиск є меншим, ніж в області критичних точок K_1, K_2 . Зміни тиску на зовнішній поверхні мембрани призведуть до виникнення течії всередині рідкого об'єму. Течія формуватиметься у вигляді осьового потоку від точки K_2 до точки K_1 . Осьовий потік забезпечуватиме видовження еліпсоїда.

Течія крові біля стінки артерії характеризується наявністю градієнта швидкості, а відповідно напруження зсуву. При цьому на сторонах еритроцита N та R виникає різниця швидкостей. За рахунок різниці швидкостей формується циркуляційне обтікання еліпсоїда (рисунок 12).

При незначних напруженнях зсуву формується схема обтікання, близька до обтікання рівномірним потоком. Критичні точки K_1, K_2 розташовуються асиметрично відносно напрямку потоку.

При значних напруженнях зсуву (рисунок 12, б) схема течії змінюється. В області течії виникає одна критична точка K_0 . Еритроцит знаходиться в області, де сформовано циркуляційний рух в одному напрямі. Відповідно на мембрану еритроцита діятимуть напруження зсуву,

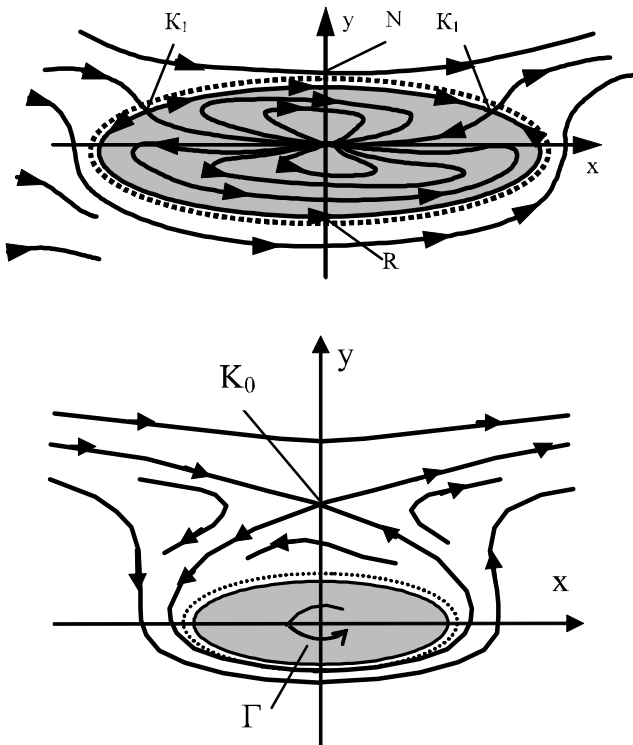


Рисунок 12 — Схема течії при циркуляційному обтіканні еритроцита при наявності напруження зсуву: а — течія при невеликих напруженнях зсуву; б — течія при значних напруженнях зсуву

які призведуть до виникнення обертального руху мембрани та рідкого вмісту еритроцита у напрямку, показано стрілкою Г. При дуже високих напруженнях зсуву рідкий вміст еритроцита вірогідно буде обертатися набагато повільніше від руху мембрани. Це відповідає даним літературних джерел [6, 8], де рух мембрани еритроцита порівнюється із рухом гусениці танка.

Особливості течії крові в артерії, обумовлені наявністю компактно розташованих еритроцитів

В артерії на вході у стиснену ділянку має місце течія рідини, відповідна течії в круглому трубопроводі [9]. Число Рейнольдса даної течії набагато менше критичного. Припускаючи, що кров є ньютонівською рідиною, визначимо, що профіль швидкостей в нестиснутому перетині артерії відповідає параболі 1 (рисунок 13, а)

При наявності великого числа компактно розміщених еритроцитів профіль швидкостей буде відрізнятися від параболічного. Еритроцити, які знаходяться біля стінки, сприймають значні градієнти швидкості, а відповідно, і напруження зсуву. Тому вони змінюватимуть свою форму і обертатись. Шар еритроцитів, що обертається, буде меншим від радіуса артерії. Тому по перетину артерії встановлюється профіль швидкостей 2, близький до трапецієвидного профіля 3. Даний профіль має ядро постійних швидкостей діаметром d_1 .

Для визначення закономірностей обертання еритроцитів виконано аналіз еквівалентного ламінарного руху крові з параболітичним розподілом швидкостей. Дана

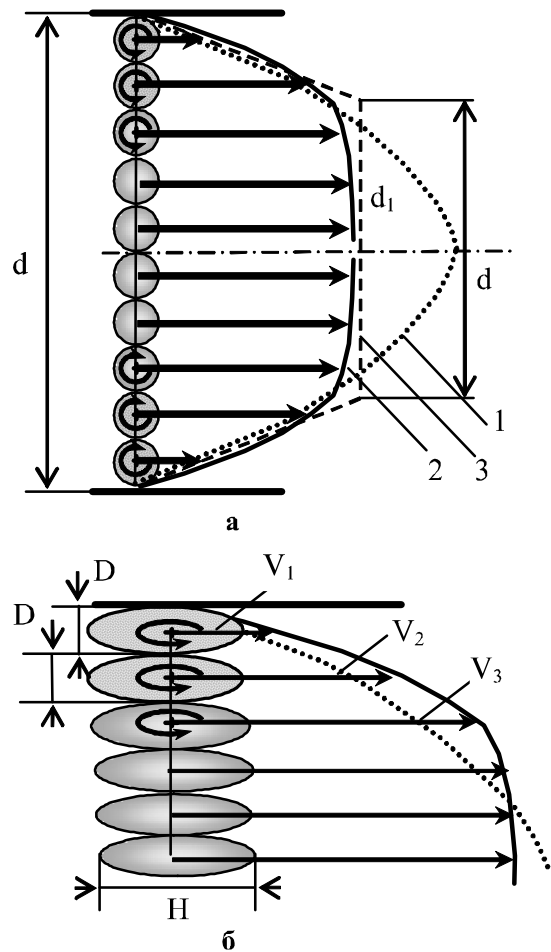


Рисунок 13 — Розподіл швидкості у перетині круглої артерії при наявності компактно розміщених еритроцитів (а) та у стиснутій артерії (б)

течія є вихровою, тобто в області течії ротор швидкості не дорівнює нулю.

На відстані r від центра артерії швидкість ламінарної течії крові дорівнює

$$V = V_{max} (1 - r^2 r_T^{-2}), \tag{3}$$

де V_{max} — максимальна швидкість в перетині ($V_{max} = 2V_{cp}$); r_T — радіус артерії; V_{cp} — середнє значення швидкості крові в артерії.

Для осесиметричної течії ротор швидкості визначається залежністю [10]

$$|rot V| = \frac{\partial V}{\partial r}. \tag{4}$$

Вектор ротора швидкості направлений перпендикулярно радіальному перетину артерії.

Продиференціювавши залежність (3) одержимо

$$|rot V| = 2V_{max} r \cdot r_T^{-2}. \tag{5}$$

Із формули (5) випливає, що модуль ротора швидкості лінійно зростає від нуля на осі артерії до максимального значення на стінці, яке складає

$$|\text{rot}V|_{\max} = \frac{2V_{\max}}{r_T} \quad (6)$$

Ротор швидкості визначає кутову швидкість обертання частинок рідкого середовища

$$\omega = \frac{1}{2} \text{rot}V$$

Відповідно кутова швидкість рідких частинок у перетині артерії при ламінарному русі зростатиме від нуля на осі до значення, яке має місце на стінці артерії

$$\omega_{\max} = \frac{V_{\max}}{r_T} \quad (7)$$

Ротор векторного поля швидкості у деякій точці А виражається через циркуляцію вектора швидкості по елементарному контуру С радіусом r:

Опишемо із точки А як із центра коло малого радіуса ρ , яке лежить у площині, перпендикулярній напрямку вектора $\text{rot}V$ (рисунок 14, а).

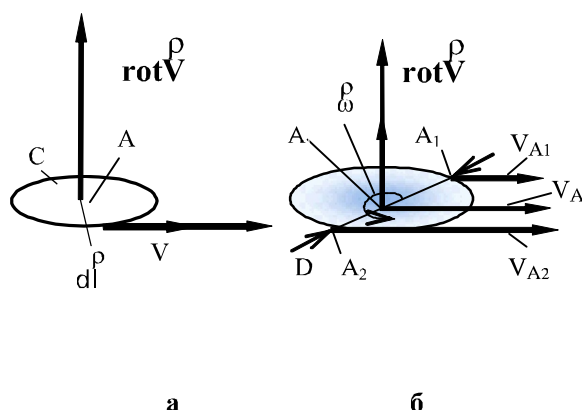


Рисунок 14 — Схема, яка ілюструє циркуляційний рух еритроцитів: а — зв'язок ротора швидкості із циркуляцією швидкості по елементарному контуру С; б — схема руху еритроцита з його одночасним обертанням

З формули Стокса [9] одержимо

$$\text{rot}V = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\oint_C V \cdot dl}{\pi \rho^2}$$

Прийmemo, що коловий контур С відповідає мембрані еритроцита. При цьому перетин еритроцита має вигляд диска розміром D, розміщеного у радіальній площині перетину артерії (рисунок 14 б).

Мембрану еритроцита прийmemo мало деформованою. Тоді циркуляція швидкості на коловому контурі складатиме

$$\Gamma_c = \pi D \cdot V_c,$$

де D — діаметр колового еритроцита; V_c — окружна швидкість мембрани. Ротор швидкості наближено вважатиметься як

$$|\text{rot}V_A| = \frac{\Gamma_c}{\pi D^2} = \frac{4}{D} V_c \quad (8)$$

Різниця швидкостей в точках А2 і А1 складе

$$V_{A2} - V_{A1} = 2V_c.$$

Розглянемо компактно розташовані еритроцити, що знаходяться біля стінки артерії (рисунок 13, б).

Прийmemo, що на стінці артерії еритроцит притиснений до стінки і контактує з нею без проковзування. Прирівнявши праві частини формул (7) та (8), одержимо швидкість руху центра еритроцита

$$V_1 = V_c = \frac{D}{2} \cdot \frac{V_{\max}}{r_T}.$$

Прийmemo, що сусідні еритроцити у шарі взаємодіють без проковзування, тоді швидкість руху другого еритроцита складе $V_2 = 3V_c$, а n-ного еритроцита у шарі

$$V_n = (2n - 1)V_c = \frac{2n - 1}{2} \cdot \frac{D \cdot V_{\max}}{r_T} = \frac{(2n - 1) \cdot D}{r_T} \cdot V_{cp} \quad (9)$$

Відстань від стінки до центра n-го еритроцита складатиме

$$y = \frac{D}{2} n.$$

Відповідно:

$$n = \frac{2}{D} y.$$

Підставивши значення n в формулу (9), одержимо

$$V = \frac{D}{r_T} V_{cp} \cdot \left(\frac{4y}{D} - 1 \right), \quad y \geq \frac{D}{2} \quad (10)$$

Одержана формула визначає лінійну залежність швидкості руху еритроцитів біля стінки артерії від відстані до стінки.

Розглянемо стиснену ділянку артерії одиначної довжини. Для неї рівняння зміни кількості руху в інтегральній формі (рівняння імпульсів [9]) має вигляд

$$\iint_S P_r \, d\sigma = \iint_S \rho V V_n \, d\sigma, \quad (11)$$

де S — контрольна поверхня, яка обмежує ділянку, P_n —

вектор поверхневих сил, \vec{V} — швидкість, V_n — нормальна складова швидкості в точці контрольної поверхні.

Ліва частина рівняння (11) відповідає головному вектору сил тиску на контрольну поверхню, права — вектору переносу імпульсу через контрольну поверхню.

Для стисненої ділянки права частина формули (11) дорівнює нулю, а відповідно із рівняння імпульсів випливає

$$S_0 \cdot \Delta p = \Pi_0 \tau, \quad (12)$$

де S_0 — площа перетину ділянки, Δp — перепад тиску; Π_0 — периметр ділянки; τ — дотичне напруження на стінці артерії.

Відповідно перепад тиску становитиме

$$\Delta p = \frac{\Pi_0 \tau}{S_0} \quad (13)$$

Середнє значення еквівалентного дотичного напруження на стінці артерії складе

$$\tau = \mu \left. \frac{dV}{dy} \right|_{y=0}$$

де μ — еквівалентна динамічна в'язкість крові.

Після диференціювання залежності (10) та підстановки $y=0$ одержимо

$$\tau = \mu \frac{4V_{cp}}{r_T}$$

Одержане значення відповідає напруженню на стінці при ламінарному русі рідини [9]. Тому для розрахунку гідравлічних характеристик артерії при стисненні також можна застосувати співвідношення, визначені для ламінарного руху рідини.

Визначення перепаду тиску в місці звуження артерії

При стисненні артерії еритроцити, які рухаються по артерії, деформуватимуться (рисунок 15).

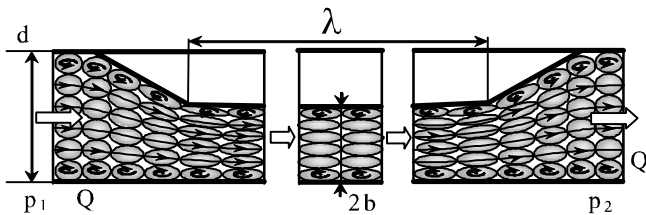


Рисунок 15 — Рух компактно розміщених еритроцитів на ділянці звуження артерії без врахування гвинтового руху крові

Поперечний перетин артерії апроксимовано еліпсом із напівосями a та b . Раніше показано, що при максимальному стисненні артерії площа перетину артерії зменшується у вісім разів. Тому визначити a та b можна із наступної залежності

$$\frac{\pi d^2}{4} = 8 \cdot \pi ab \quad (14)$$

Враховуючи, що $d=3,6$ мм, знаходимо

$$b=0,23 \text{ мм}; a=1,85 \text{ мм} \quad (15)$$

Для еліптичного каналу середня швидкість знаходиться за наступною залежністю [9]

$$V_{cp} = \frac{\Delta p}{4\mu l} \cdot \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}, \quad \Delta p = p_1 - p_2 \quad (16)$$

де l — довжина каналу.

Для стаціонарного руху рідини при відсутності джерел маси в об'ємі рівняння збереження мас в інтегральній формі має вигляд $\iint_S V_n d\sigma = 0$

Рівняння (16) відповідає рівнянню нерозривності. Для еліптичного каналу з (16) знаходимо витрату крові

$$Q = \pi ab V_{cp}$$

Втрати тиску на ділянці з максимальним звуженням

$$\Delta p = \frac{4 \cdot \mu \cdot l \cdot Q \cdot (a^2 + b^2)}{\pi \cdot a^3 \cdot b^2} \quad (17)$$

Розрахунок згідно залежності (17) для значень параметрів (15) дає наступне значення перепаду тиску на деформованій ділянці артерії

$$\Delta p = 5237 \text{ Па} = 39 \text{ мм.рт.ст.}$$

Втрати напору при звуженні та розширенні каналу є незначними. Порівнявши знайдене значення втрат напору для звуженої артерії із втратами напору по довжині у артерії без компресії, що не перевищують 2–3 мм.рт.ст., згідно літературних джерел [2], а також проведених попередніх розрахунків, можна зробити висновок, що гідравлічні втрати значно стиснутої артерії збільшуються у 10–20 разів.

Проведене порівняння отриманих результатів із наявними в літературних джерелах [8], підтвердило достовірність розрахунків.

Розрахунки проведено для артерій із різними площами поперечного перетину. Результати представлено у вигляді залежності втрат напору від площі поперечного перерізу каналу (рисунок 16, крива 1).

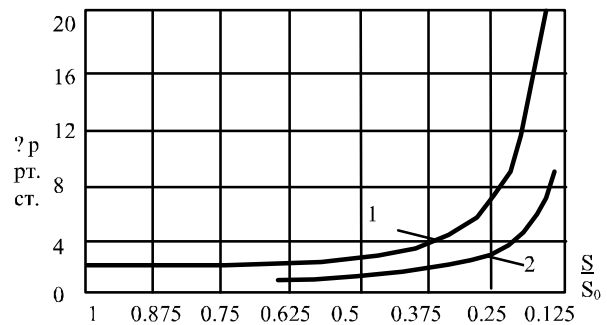


Рисунок 16 — Залежність втрат напору в мм.рт.ст. від площі поперечного перетину стисненої ділянки артерії

Результати гідравлічних розрахунків підтверджують значне зростання гідравлічного опору при зменшенні площі поперечного перетину артерії у 5–8 разів.

Гідравлічні втрати в основному спричинені звуженою ділянкою артерії, що апроксимована еліпсом, або щільною і значно меншою мірою звуженням чи розширенням потоку та іншими гідравлічними втратами.

Розрахунки гідравлічного опору проведено на основі геометричних параметрів, отриманих МСЕ. Це насамперед форма поперечного перетину у місцях із середнім

та максимальним стисненням артерії та закрутка криволінійного каналу по довжині артерії.

Як показано на рисунку 5, звужена ділянка артерії має вигляд гвинтового каналу. Тому в артерії має місце гвинтовий рух крові, що збільшує гідравлічний опір стисненої ділянки. Кручення каналу визначено у результаті розрахунку напружено-деформованого стану артерії. У гвинтовому каналі має місце переміщення еритроцитів із набуттям ними обертового руху (рисунок 17)

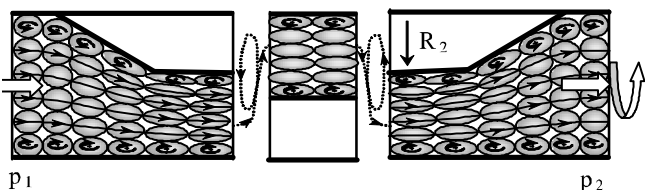


Рисунок 17 — Набуття потоком крові гвинтового руху на стисненій ділянці артерії

Для визначення додаткового перепаду тиску, обумовленому гвинтовим рухом крові, використаємо рівняння зміни моменту кількості руху, чим встановимо співвідношення між моментами кількості руху елементів рідкого середовища і має вигляд [9]

$$\iiint_W \mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} dW = \iint_S \mathbf{r} \times \mathbf{P}_n d\sigma, \quad (18)$$

де знак \times визначає векторний добуток векторів; \mathbf{r} — радіус-вектор довільної точки усередині контрольного об'єму W ; ρ — середня густина крові

Інтеграл в правій частині формули (18) обчислено наближено. Прийнято, що стиснутий перетин артерії має невелику товщину. Для контрольного об'єму одиничної довжини маємо

$$\iint_S \mathbf{r} \times \mathbf{P}_n d\sigma = R \cdot \frac{\Delta P \cdot S}{\cos \gamma} \mathbf{i}, \quad (19)$$

де R — середній радіус стисненого перетину відносно осі артерії, S — площа стисненого перетину; γ — кут нахилу гвинтової траєкторії руху крові в стисненому перетині; \mathbf{i} — орт дотичної в циліндричній системі координат.

Для обчислення інтеграла у лівій частині рівняння визначимо похідну швидкості у вигляді [10]

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V}, \text{ де } \nabla \text{ — оператор Набла.}$$

$$\text{Для стаціонарного руху } \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = 0.$$

Тому проекція інтеграла у лівій частині (18) на напрям дотичної виглядатиме

$$\iiint_W \mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho V_n^2 \operatorname{tg} \gamma \cdot S \mathbf{i}_\varphi. \quad (20)$$

Прирівнюючи праві частини (19) і (20), визначимо перепад тиску, обумовлений гвинтовим рухом крові у залежності від витрати

$$\Delta p = \rho \frac{Q^2}{S^2} \frac{\operatorname{tg} \gamma \cdot \cos \gamma \lambda}{R}. \quad (21)$$

Розрахунки по формулі (21) наведено у графічному вигляді (крива 2 на рисунку 16). Із порівняння графіків видно, що гвинтовий рух потоку крові дещо підвищує втрати напору. Особливо це проявляється при значних стисненнях артерії. При помірному стисненні гвинтовий рух підвищує перепад тиску на 10–15%.

Висновки

1. У результаті розрахунку напружено-деформованого стану ділянки хребтової артерії, деформованої спіралевидним м'язом, встановлено, що перетин артерії набуває серповидної форми довжиною близько 4 мм та шириною близько 0,5 мм, а сама артерія утворює гвинтовий криволінійний канал завдовжки 18–22 мм, який відповідає кроку гвинтової лінії і має вхідну ділянку звуження (конфузорності) та вихідну ділянку розширення (дифузорності) довжиною близько 10 мм кожна.

2. На основі розрахунку основних параметрів еритроцита встановлено, що він має три рівні по об'єму та площі мембрани конфігурації: двояковвігнутий диск, сплюснутий та витягнутий еліпсоїд обертання. При цьому при незначних напруженнях зсуву в рухомій крові, які характерні для течії в артерії без стиснення, еритроцит набуває форми, близької до сплюсненого еліпсоїду, а при великих напруженнях зсуву, які характерні для місця звуження артерії, його форма наблизатиметься до витягнутого еліпсоїду обертання.

3. Досліджено, що при невеликих напруженнях зсуву еритроцит обертається, а при значних напруженнях він перестає обертатися, разом з тим його мембрана здійснює інтенсивний циркуляційний рух відносно малорухомого рідкого вмісту еритроциту. Цим забезпечується рух крові з характеристиками близькими до ламінарного та стабілізується течія у пристінному шарі, унеможливаючи вихороутворення та відрив потоку крові від стінки артерії на дифузорній ділянці звуження.

4. Визначено, що при деформації артерії, яка відповідає зменшенню її площі у 5–8 разів, різко зростає перепад тиску на стиснутій ділянці. При цьому перепад тиску може сягати 20 мм рт. ст. і вище, що у десятки разів перевищує перепад тиску в артерії без стиснення. Наявність гвинтового каналу при стисненні підвищує перепад тиску на 10–15%.

5. Як напрями подальших досліджень рекомендовано визначити гідравлічні характеристики всього комплексу артерій шийного відділу людини, врахувавши при цьому можливість компресії обох хребтових артерій.

Література

1. Черняк, В.А. Современные аспекты хирургической профилактики ишемического инсульта // Практична ангіологія — 2012 — №2/1. — С. 21—29.

2. Скобцов, Ю.А., Родин Ю.В., Оверко, В.С. Моделирование и визуализация поведения потоков крови при патологических процессах. — Донецк, 2008. — 212 с.

3. Аналіз клінічних варіантів та форм синдрому хребтової артерії у хворих з екстравазальною компресією в сегментах V1–V2 залежно від віку / В.Г. Мішалов, Л.М. Яковенко, В.А. Черняк, В.В. Сулік, С.В. Дибкалюк, Р.В. Сулік, В.Ю. Зоргач, К.М. Зозуля // Серце і судини. — 2011. — №2 (34). — С. 57—64.

4. Клініко-доплерографічні кореляції та результати інструментальних методів діагностики синдрому хребтової артерії у хворих з екстравазальною компресією в сегменті V1-V2 / В.Г. Мішалов, В.А. Черняк, В.В. Сулік, С.В. Дибкалюк, Р.В. Сулік, В.Ю. Зоргач // Серце і судини. — № 4 (36). — 2011. — С. 9—16

5. Пат. на корисну модель №54580 (UA) МПК А 61 В 17/00. Спосіб відновлення кровотоку в басейні хребтової артерії людини / Мішалов В.Г., Черняк В.А., Сулік В.В., Дибкалюк С.В., Сулік Р.В., Сулік В.К., Сулік С.І.; заявник і патентоутримувач Національний медичний університет ім. О.О.Богомольця. — № u 201008493; заявл. 07.07.10; опубл. 10.11.10. Бюл. №21.

6. Каро, К., Педли, Т., Шротер, Р., Сид, У. Механика кровообращения. — М.: МИР, 1981. — 623 с.

7. Рон, К.С.Чен. Autodesk Inventor. — ISBN 5-85582-164-1 — М.: Лори, 2002. — 568 с.

8. Педли, Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. — М.: МИР, 1983. — 400 с.

9. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1973. — 847 с.

10. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — 712 с.

Надійшла 24.05.2013 року