Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2012, №4(110) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

ЗБІЖНІСТЬ ПРОКСИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМУ ДЛЯ ЗАДАЧІ ДВОРІВНЕВОЇ ОПУКЛОЇ МІНІМІЗАЦІЇ

В. В. Семенов

(Присвячується пам'яті Юрія Івановича Петуніна)

Резюме. Нехай H — гільбертовий простір, f_1, f_2 — задані на H власні опуклі напівнеперервні знизу функціонали. У роботі розглянуто питання розв'язання дворівневої задачі мінімізації вигляду

$$f_2(x) \to \min, \quad x \in \mathrm{argmin} f_1$$

за допомогою проксимального алгоритму

$$x_{n+1} = \mathtt{prox}_{\lambda_n(f_2+\alpha_n f_1)} x_n.$$

У випадку сильної опуклості f_2 наведено теорему про сильну збіжність. При деяких метричних умовах на функціонал f_1 доведено теореми про слабку збіжність та слабку збіжність у розумінні Чезаро.

Вступ

Серед наукових інтересів Ю. І. Петуніна екстремальні задачі посідали важливе місце. Варто згадати лише роботи про задачі геометричної природи на побудову еліпсів мінімального об'єму, некласичні регресійні задачі та останні роботи по узагальненим екстремальним елементам. Вважаю, що Юрій Іванович поділяв тезу Лоренса Янга про варіаційне числення як літопис математичних понять. Одна з наших останніх математичних бесід була присвячена регуляризації екстремальних задач та задачам мінімізації функцій на неявно заданих множинах, наприклад, на множинах точок мінімуму інших функцій. Тому саме цією роботою я хочу вшанувати пам'ять Юрія Івановича.

В оптимізації та теорії некоректних задач є популярним такий підхід до розв'язання задач з неєдиним розв'язком [1, 2]. Розглядають певну родину збурених задач, однозначно та коректно розв'язних. Частинний розв'язок вихідної задачі одержують як границю розв'язків збурених задач при зменшенні збурень. Знайдені так частинні розв'язки задовольняють певним додатковим умовам, наприклад, мінімальність норми нормального розв'язку оптимізаційної задачі.

Іншим джерелом задач вигляду

$$f_2(x) \to \min, \quad x \in \mathrm{argmin} f_1$$

є метод штрафів зняття обмежень [3, 4] та задачі оптимізації за послідовно заданними критеріями (лексикографічна, послідовна або багатоетапна оптимізація [5, 6]). Наприклад, задачу оптимального керування [3]

$$F(y,u) \to \min, \quad Ly = Bu$$

можна переформулювати у вигляді

$$F(y,u) \to \min, \quad (y,u) \in \mathrm{argmin}_{(\xi,\eta)} \|L\xi - B\eta\|^2 .$$

Останнім часом з'явились роботи по більш загальним задачам: послідовним варіаційним нерівностям [7–13] та послідовним задачам про нерухомі точки [14].

У даній роботі розглядається дворівнева задача опуклої мінімізації в гільбертовому просторі. Ефективні методи розв'язання таких задач у скінченновимірній постановці запропоновані в [15, 16].

Нашою метою є дослідження збіжності схем вигляду

$$x_{n+1} = \mathrm{argmin}_{y\in H} \left\{ \lambda_n f_2(y) + \lambda_n \alpha_n f_1(y) + \frac{1}{2}\|y - x_n\|^2 \right\}.$$

При $\alpha_n = 0$ маємо проксимальний метод для задачі $f_2 \to \min$, збіжності різних варіантів якого присвячено багато робіт [17–21]. У роботі [22] доведено сильну збіжність методу

$$x_{n+1} = \mathrm{argmin}_{y\in H} \left\{ \alpha_n \|y\|^2 + f_1(y) + \frac{1}{2\lambda_n}\|y - x_n\|^2 \right\}$$

до нормального розв'язку задачі $f_1 \to \min$.

Основний результат даної статті такий: для опуклих напівнеперервних знизу функціоналів f_2 та опуклих напівнеперервних знизу функціоналів f_1, що задовольняють деякій метричній умові, доведено теореми збіжності наведеної схеми. У роботі використана техніка, розвинута в [23–29]. Попереднє повідомлення результатів було зроблено на міжнародній молодіжній математичній школі „The Issues of Calculation Optimization–XXXVII“ (22–29 вересня 2011 року, Кацивелі, Крим) [30].

Усі необхідні відомості з нелінійного та опуклого аналізу наведено в книгах [31–35].

1. Постановка задачі та допоміжні факти

Нехай H — дійсний простір Гільберта зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ та нормою $\|\cdot\|$. Нехай $f_1, f_2 : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — власні опуклі напівнеперервні знизу функціонали. Припустимо, що $\mathrm{argmin} f_1 \neq \emptyset$ та $\min f_1 = 0$. Множина $\mathrm{argmin} f_1$ — замкнена та опукла.

Розглянемо задачу

$$f_2(x) \to \min, \quad x \in \mathrm{argmin} f_1. \tag{1}$$

Припустимо, що $0 \in \mathrm{int}\,(\mathrm{dom} f_2 - \mathrm{argmin} f_1)$. Позначимо через C множину $\mathrm{argmin} f_1$, а через S множину розв'язків задачі (1). Задача (1) еквівалентна включенню

$$\text{знайти } x \in H : \ \ 0 \in \partial f_2(x) + N_C x,$$

де $N_C x$ — нормальный конус множини $C \subseteq H$ в точці $x \in H$, тобто

$$N_C x = \begin{cases} \{z \in H : \ (z, y - x) \le 0 \ \ \forall y \in C\}, & \text{якщо } x \in C, \\ \emptyset, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Нехай $g : H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — власний опуклий напівнеперервний знизу функціонал. Проксимальним оператором [36], асоційованим з g, називають оператор

$$H \ni x \mapsto \mathtt{prox}_g x = \operatorname{argmin}_{y \in H} \left(g(y) + \frac{1}{2} \|y - x\|^2 \right).$$

Для доведення збіжності алгоритму будемо використовувати наступні леми про числові послідовності та послідовності елементів гільбертових просторів.

Лема 1. *Нехай обмежена знизу послідовність (a_n) та послідовності невід'ємних чисел (b_n) і (c_n) такі, що $a_{n+1} - a_n + b_n \le c_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty$. Тоді існує $\lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$.*

Лема 2 ([37])**.** *Нехай H — гільбертовий простір; $F \subseteq H$ — непорожня множина; (x_n) — послідовність точок H. Припустимо, що:*

1) *усі слабкі часткові границі послідовності (x_n) належать F;*
2) *для всіх $y \in F$ існує $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y\| \in \mathbb{R}$.*

Тоді (x_n) слабко збігається до деякої точки $x \in F$.

Зауваження 1. Лема 2 дозволяє доводити слабку збіжність послідовностей без апріорного знання границі.

2. Алгоритм

Нехай (λ_n), (α_n) — послідовності додатніх чисел.

Алгоритм 1. Обираємо $x_1 \in H$ та генеруємо послідовність елементів (x_n) за допомогою ітераційної схеми

$$x_{n+1} = \mathtt{prox}_{\lambda_n (f_2 + \alpha_n f_1)} x_n.$$

Зауваження 2. При $\alpha_n = 1$ маємо класичний проксимальний метод для задачі $f_1 + f_2 \to \min$ [17–19].

Подальший план такий. У розділі 3 наводиться теорема сильної збіжність алгоритму для сильно опуклого функціоналу f_2. У розділах 4 та 5 вводиться певна метрична умова на функціонал f_1 (умова (A1)) та при її виконанні одержуються дві теореми про слабку збіжність. Предмет розділу 6 — слабка збіжність за Чезаро породжених алгоритмом послідовностей.

3. Сильна збіжність

У випадку сильної опуклості f_2 алгоритм 1 сильно збігається до єдиного розв'язку задачі (1). Наступна теорема отримана за допомогою незначної модифікації міркувань роботи [12].

Теорема 1. *Нехай функціонал f_2 сильно опуклий. Припустимо, що*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty, \quad \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \lambda_n > 0.$$

Тоді породжена алгоритмом 1 послідовність (x_n) сильно збігається до единого розв'язку задачі (1).

4. Основні нерівності

Перейдемо до вивчення поведінки алгоритму 1 у ситуації, коли функціонал f_2 не є сильно опуклим.

Припустимо, що

(A1) $\exists k > 0 : f_1(x) \ge k \cdot d_C^2(x) = k \cdot \min_{y \in C} \|x - y\|^2 \ \forall x \in H$.

З міркувань теорії двоїстості опуклих функціоналів [31, 32, 35] випливає

Лема 3 ([29]). *Нехай для f_1 виконується припущення (A1). Тоді для $z \in C$ і $w \in N_C z$ має місце нерівність*

$$(w, x) - f_1(x) - (w, z) \le \frac{1}{4k} \|w\|^2 \quad \forall x \in H.$$

Доведення. Оскільки

$$(w, x) - f_1(x) - (w, z) \le f_1^*(w) - \sigma_C(w),$$

то достатньо довести оцінку

$$f_1^*(\cdot) - \sigma_C(\cdot) \le \frac{1}{4k} \|\cdot\|^2 .$$

Ця оцінка випливає із однорідності опорної функції σ_C, нерівності

$$f_1^*(\cdot) \le \left(k \cdot d_C^2\right)^* (\cdot) = 2k \left(\frac{d_C^2}{2}\right)^* \left(\frac{\cdot}{2k}\right)$$

та рівності

$$\left(\frac{d_C^2}{2}\right)^* = \left(\frac{\|\cdot\|^2}{2} \oplus \chi_C\right)^* = \frac{\|\cdot\|^2}{2} + \sigma_C,$$

де χ_C — індикаторна функція множини C, $\oplus$ — операція інфімальної конволюції. □

Зауваження 3. Якщо припустити існування $k > 0$, $p > 1$, таких, що

$$f_1(x) \ge k \cdot d_C^p(x) = k \cdot \min_{y \in C} \|x - y\|^p \quad \forall x \in H,$$

то для $z \in C$ і $w \in N_C z$ можна довести оцінку

$$(w, x) - f_1(x) - (w, z) \le \frac{1}{q(pk)^{q-1}} \|w\|^q \quad \forall x \in H,$$

де $q > 1$ та $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$.

Лема 4. *Нехай для f_1 виконується припущення (A1). Нехай $z \in C$, $v \in \partial f_2(z) + N_C z$, а точка $w \in N_C z$, така, що $v - w \in \partial f_2(z)$. Тоді виконується нерівність*

$$\|x_{n+1} - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 + \|x_n - x_{n+1}\|^2 + \lambda_n \alpha_n f_1(x_{n+1}) \leq \\ \leq 2\lambda_n (v, z - x_{n+1}) + \frac{\lambda_n}{\alpha_n} \frac{1}{k} \|w\|^2 . \quad (2)$$

Доведення. Оскільки

$$x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y \in H} \left\{ \lambda_n f_2(y) + \lambda_n \alpha_n f_1(y) + \frac{1}{2} \|y - x_n\|^2 \right\},$$

то маємо

$$0 \in \lambda_n \partial f_2(x_{n+1}) + \lambda_n \alpha_n \partial f_1(x_{n+1}) + x_{n+1} - x_n,$$

тобто, існують $u_{n+1}^1 \in \partial f_1(x_{n+1})$, $u_{n+1}^2 \in \partial f_2(x_{n+1})$, такі, що

$$\lambda_n u_{n+1}^2 + \lambda_n \alpha_n u_{n+1}^1 = x_n - x_{n+1}.$$

Має місце рівність

$$\|x_n - z\|^2 = \|x_{n+1} - z\|^2 + \|x_n - x_{n+1}\|^2 + 2(x_{n+1} - z, x_n - x_{n+1}) = \\ = \|x_{n+1} - z\|^2 + \|x_n - x_{n+1}\|^2 + 2\lambda_n (x_{n+1} - z, u_{n+1}^2 + \alpha_n u_{n+1}^1).$$

Із нерівності

$$-f_1(x_{n+1}) = f_1(z) - f_1(x_{n+1}) \geq (u_{n+1}^1, z - x_{n+1})$$

випливає оцінка

$$\|x_{n+1} - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 + \|x_n - x_{n+1}\|^2 + \lambda_n \alpha_n f_1(x_{n+1}) \leq \\ \leq 2\lambda_n (u_{n+1}^2, z - x_{n+1}) - \lambda_n \alpha_n f_1(x_{n+1}).$$

Монотонність оператора ∂f_2 дає оцінку

$$(u_{n+1}^2, z - x_{n+1}) \leq (v - w, z - x_{n+1}).$$

Тому

$$2\lambda_n (u_{n+1}^2, z - x_{n+1}) - \lambda_n \alpha_n f_1(x_{n+1}) \leq 2\lambda_n (v - w, z - x_{n+1}) - \lambda_n \alpha_n f_1(x_{n+1}) = \\ = 2\lambda_n (v, z - x_{n+1}) + \lambda_n \alpha_n \left\{ \left(\frac{2w}{\alpha_n}, x_{n+1} \right) - f_1(x_{n+1}) - \left(\frac{2w}{\alpha_n}, z \right) \right\}.$$

Враховуючи лему 3, отримуємо нерівність (2). □

5. Слабка збіжність

Має місце

Лема 5. *Нехай $S \neq \emptyset$, виконується умова (A1). Припустимо, що*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\alpha_n} < +\infty. \quad (3)$$

Тоді

1) $\forall z \in S \ \exists \lim_{n\to\infty} \|x_n - z\| \in \mathbb{R}$;
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\|^2 < +\infty$;
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n f_1(x_{n+1}) < +\infty$.

Доведення. Оскільки $S \neq \emptyset$, то в нерівності (2) з леми 4 для $z \in S$ можна покласти $v = 0 = w - w$, де $w \in -\partial f_2(z) \bigcap N_C z$ (випливає з включення $0 \in \partial f_2(z) + N_C z$). Маємо

$$\|x_{n+1} - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 + \|x_n - x_{n+1}\|^2 + \lambda_n \alpha_n f_1(x_{n+1}) \leq \frac{\lambda_n}{\alpha_n} \frac{1}{k} \|w\|^2 . \quad (4)$$

Твердження 1), 2) та 3) випливають з (3), (4) та леми 1. □

Доведемо слабку збіжність послідовності (x_n) до розв'язку задачі (1). В силу леми 2 та твердження 1) леми 5 для цього достатньо показати, що всі слабкі часткові границі послідовності (x_n) належать множині S. Оскільки функціонали f_1 та f_2 слабко напівнеперервні знизу, то останнє випливатиме з наступної асимптотичної поведінки числових послідовностей $(f_1(x_n))$, $(f_2(x_n))$

$$\lim_{n\to\infty} f_1(x_n) = 0, \quad (5)$$

$$\limsup_{n\to\infty} f_2(x_n) \leq f_2(z) \ \ \forall z \in S. \quad (6)$$

Теорема 2. *Нехай $S \neq \emptyset$, виконується умова (A1). Припустимо, що*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\alpha_n} < +\infty, \quad (7)$$

$$\liminf_{n\to\infty} \lambda_n > 0. \quad (8)$$

Тоді породжена алгоритмом 1 послідовність (x_n) слабко збігається до розв'язку задачі (1).

Зауваження 4. Умовам теореми 2 задовольняє варіант алгоритму 1 з $\lambda_n = 1$, $\alpha_n = n^2$:

$$x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y\in H} \left\{ f_2(y) + n^2 f_1(y) + \frac{1}{2} \|y - x_n\|^2 \right\}.$$

Доведення теореми 2. З (7) та (8) випливає, що $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty$. Тому для деяких $m \in \mathbb{N}$ та $c > 0$ виконується

$$\lambda_n \alpha_n \geq c \quad \forall n \geq m.$$

Тому, враховуючи факт 3) з леми 5, маємо

$$c \sum_{n=m}^{\infty} f_1(x_{n+1}) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \lambda_n \alpha_n f_1(x_{n+1}) < +\infty.$$

Звідки випливає (5).

Доведемо (6) від супротивного. Припустимо існування $z \in S$ такого, що $\limsup_{n\to\infty} f_2(x_n) > f_2(z)$. Тобто існує така підпослідовність (x_{n_k}), що для деякого $\delta > 0$ виконується

$$f_2(x_{n_k}) - f_2(z) \geq \delta \ \ \forall k \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Оскільки

$$x_{n_k} = \operatorname{argmin}_{y\in H} \left\{ \lambda_{n_k-1} f_2(y) + \lambda_{n_k-1}\alpha_{n_k-1} f_1(y) + \frac{1}{2}\left\| y - x_{n_k-1} \right\|^2 \right\},$$

то

$$\lambda_{n_k-1}\left(f_2(y) + \alpha_{n_k-1} f_1(y) - f_2(x_{n_k}) - \alpha_{n_k-1} f_1(x_{n_k}) \right) + \\ + \left(x_{n_k} - x_{n_k-1}, y - x_{n_k} \right) \geq 0 \quad (10)$$

для всіх $y \in H$. Поклавши в (10) $y = z \in S$ і врахувавши рівність $f_1(z) = 0$, одержимо

$$2\lambda_{n_k-1}\left(f_2(x_{n_k}) - f_2(z) \right) \leq \left\| x_{n_k-1} - z \right\|^2 - \\ - \left\| x_{n_k} - z \right\|^2 - \left\| x_{n_k-1} - x_{n_k} \right\|^2 - 2\lambda_{n_k-1}\alpha_{n_k-1} f_1(x_{n_k}) \leq \\ \leq \left\| x_{n_k-1} - z \right\|^2 - \left\| x_{n_k} - z \right\|^2 - 2\lambda_{n_k-1}\alpha_{n_k-1} f_1(x_{n_k}). \quad (11)$$

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $\lambda_n \geq d > 0$ для $n \geq n_1$. Сумуючи нерівності (11) та враховуючи оцінку (9), одержимо

$$0 < 2\delta N d \leq 2\delta \sum_{k=1}^{N} \lambda_{n_k-1} \leq 2 \sum_{k=1}^{N} \lambda_{n_k-1}\left(f_2(x_{n_k}) - f_2(z) \right) \leq \\ \leq \left\| x_{n_1-1} - z \right\|^2 - 2 \sum_{k=1}^{N} \lambda_{n_k-1}\alpha_{n_k-1} f_1(x_{n_k}). \quad (12)$$

Спрямувавши в (12) число N до нескінченності, прийдемо до абсурду. □

Теорема 3. *Нехай $S \neq \emptyset$, виконується умова (A1). Припустимо, що*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\alpha_n} < +\infty, \quad (13)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = +\infty, \quad (14)$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty, \quad (15)$$

$$\exists M > 0: \ \ \alpha_{n+1} - \alpha_n \leq M\lambda_n\alpha_n. \quad (16)$$

Тоді породжена алгоритмом 1 послідовність (x_n) слабко збігається до розв'язку задачі (1).

Зауваження 5. Умовам теореми 3 задовольняє варіант алгоритму 1 з $\lambda_n = \frac{1}{n}$, $\alpha_n = n^2$:

$$x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y\in H} \left\{ \frac{1}{n} f_2(y) + n f_1(y) + \frac{1}{2}\left\| y - x_n \right\|^2 \right\}. \quad (17)$$

З теореми 2 не випливає збіжність схеми (17).

Доведення теореми 3. Маємо

$$\lambda_n f_2(x_{n+1}) + \lambda_n \alpha_n f_1(x_{n+1}) + \frac{1}{2}\|x_{n+1} - x_n\|^2 \le \lambda_n f_2(x_n) + \lambda_n \alpha_n f_1(x_n).$$

Врахувавши (16), отримаємо

$$\begin{aligned} f_2(x_{n+1}) + \alpha_n f_1(x_{n+1}) \le f_2(x_n) + \alpha_n f_1(x_n) \le \\ \le f_2(x_n) + \alpha_{n-1} f_1(x_n) + (\alpha_n - \alpha_{n-1}) f_1(x_n) \le \\ \le f_2(x_n) + \alpha_{n-1} f_1(x_n) + M\lambda_{n-1}\alpha_{n-1} f_1(x_n). \end{aligned} \quad (18)$$

Застосувавши до нерівності (18) лему 1 та твердження 3) леми 5, отримаємо існування скінченної границі $\lim_{n\to\infty}(f_2(x_{n+1}) + \alpha_n f_1(x_{n+1}))$.

Для всіх $N > 1$ та $z \in S$ має місце оцінка (отримана сумуванням нерівностей, аналогічних (11))

$$2\sum_{n=1}^{N} \lambda_n (f_2(x_{n+1}) + \alpha_n f_1(x_{n+1}) - f_2(z)) \le \|x_1 - z\|^2. \quad (19)$$

Покажемо, що

$$\lim_{n\to\infty}(f_2(x_{n+1}) + \alpha_n f_1(x_{n+1})) \le f_2(z) \ \ \forall z \in S,$$

звідки одержимо (6). Міркуємо від супротивного. Припустимо існування $z \in S$ такого, що $\lim_{n\to\infty}(f_2(x_{n+1}) + \alpha_n f_1(x_{n+1})) > f_2(z)$. Тобто існують такі $\delta > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$, що для всіх $n > n_0$ виконується

$$f_2(x_{n+1}) + \alpha_n f_1(x_{n+1}) - f_2(z) > \delta. \quad (20)$$

Для всіх $N > n_0$ з (19) та (20) випливає оцінка

$$2\delta \sum_{n=n_0+1}^{N} \lambda_n \le \|x_1 - z\|^2 - 2\sum_{n=1}^{n_0} \lambda_n (f_2(x_{n+1}) + \alpha_n f_1(x_{n+1}) - f_2(z)).$$

Отже, $(\lambda_n) \in \ell_1$, що суперечить умові (14).

З умови (15) та

$$\alpha_n f_1(x_{n+1}) = (f_2(x_{n+1}) + \alpha_n f_1(x_{n+1})) - f_2(x_{n+1}) = O(1)$$

випливає (5). □

6. Слабка збіжність за Чезаро

Використовуючи техніку, розвинуту в [23], покажемо, що розв'язність задачі (1) рівносильна слабкій збіжності послідовності середніх за Чезаро елементів x_n, породжених алгоритмом 1.

Перш за все сформулюємо відоме твердження.

Лема 6 ([23]). *Нехай H — гільбертовий простір; $F \subseteq H$ — непорожня множина; (x_n) — послідовність точок H і $\bar{x}_n = \frac{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k}{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k}$, де (λ_n) — послідовність додатніх чисел така, що $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n = +\infty$. Припустимо, що:*

1) *усі слабкі часткові границі послідовності $(\bar{x}_n)$ належать F;*
2) *для всіх $y \in F$ існує $\lim_{n\to\infty}\|x_n - y\| \in \mathbb{R}$.*

Тоді $(\bar{x}_n)$ *слабко збігається до деякої точки* $x \in F$.

Має місце

Лема 7. *Для точок* z, v, w *з леми 4 та породженої алгоритмом 1 послідовності* (x_n) *виконується нерівність*

$$-\frac{\|x_1 - z\|^2}{2\sum_{i=1}^n \lambda_i} \le (v, z - \bar{x}_{n+1}) + \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\alpha_i}\right)\frac{1}{2k}\|w\|^2, \qquad (21)$$

де $\bar{x}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i x_{i+1}}{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i}$.

Доведення. Для $i = \overline{1,n}$ маємо

$$\frac{\|x_{i+1} - z\|^2 - \|x_i - z\|^2}{2} \le \lambda_i(v, z - x_{i+1}) + \frac{\lambda_i}{\alpha_i}\frac{1}{2k}\|w\|^2.$$

Просумувавши ці нерівності по i від 1 до n, після ділення на $\sum_{i=1}^n \lambda_i$, одержимо (21). □

Сформулюємо основний результат розділу.

Теорема 4. *Нехай виконуються умова (A1). Припустимо, що*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{\alpha_n} < +\infty, \qquad (22)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n = +\infty. \qquad (23)$$

Тоді справедливі твердження:

1) *якщо* $S \ne \emptyset$, *то послідовність чезарівських середніх* $(\bar{x}_n)$ *слабко збігається до точки з множини* S;
2) *якщо* $S = \emptyset$, *то* $\|\bar{x}_n\| \to +\infty$.

Доведення. Якщо $S \ne \emptyset$, то за лемою 5 послідовність (x_n) обмежена та існує $\lim_{n\to\infty}\|x_n - z\| \in \mathbb{R}$ для всіх $z \in S$. Те саме має місце і для послідовності середніх

$$\bar{x}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i x_{i+1}}{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i}.$$

Тому послідовність $(\bar{x}_n)$ має слабко збіжну до деякого $\bar{x} \in H$ підпослідовність $(\bar{x}_{n_k})$. Записавши (21) для $\bar{x}_{n_k}$ та здійснивши (з урахуванням (22), (23)) граничний перехід при $k \to \infty$, отримаємо

$$(v, z - \bar{x}) \ge 0$$

для всіх $z \in C$, $v \in \partial f_2(z) + N_C z$. З максимальної монотонності $\partial f_2 + N_C$ випливає включення $\bar{x} \in S$.

Отже, у випадку $S \ne \emptyset$ для згенерованої алгоритмом послідовності (x_n) і множини $F = S$ виконані умови леми 6. Тому послідовність $(\bar{x}_n)$ слабко збігається до точки з множини S.

Припустимо, що $S = \emptyset$. Тоді $\|\bar{x}_n\| \to +\infty$. Дійсно, інакше послідовність $(\bar{x}_n)$ має слабку граничну точку $\bar{x} \in H$, що, як було показано, лежить в множині S. $\square$

7. Висновки

Для задачі (1) у даній роботі одержано такі основні результати. Якщо додатні послідовності (λ_n) та (α_n) задовольняють умови

$$(\lambda_n/\alpha_n) \in \ell_1, \tag{24}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \lambda_n > 0 \quad \text{або} \quad \begin{cases} (\lambda_n) \notin \ell_1, \\ \lim_{n\to\infty} \alpha_n = +\infty, \\ \exists M > 0:\ \alpha_{n+1} - \alpha_n \le M\lambda_n\alpha_n, \end{cases}$$

то алгоритм

$$x_{n+1} = \mathtt{prox}_{\lambda_n(f_2+\alpha_n f_1)} x_n \tag{25}$$

слабко збігається до розв'язку задачі (1) (теореми 2, 3). Зокрема, послідовність (x_n), породжена схемою

$$x_{n+1} = \operatorname{argmin}_{y\in H} \left\{ f_2(y) + n^\alpha f_1(y) + \frac{n^\gamma}{2}\|y - x_n\|^2 \right\},$$

слабко збіжна до розв'язку задачі (1) при виконанні умов:

$$\gamma \le 1, \quad \alpha > 1 - \gamma.$$

При виконанні умов (24) та $(\lambda_n) \notin \ell_1$ доведено слабку збіжність чезаровських середніх породженої алгоритмом послідовності (теорема 4).

Зауваження 6. Якщо замість умови (A1) функціонал f_1 задовольняє умову росту зауваження 3, то замінивши (24) на умову $(\lambda_n/\alpha_n^{q-1}) \in \ell_1$, де $q > 1$ та $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$, одержуємо аналогічні результати про збіжність (25).

Робота виконана за фінансової підтримки ДФФД України (Грант Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених, проект GP/F44/042).

Література

1. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М.: Наука, 1979. — 288 с.
2. Бакушинский А. Б. Некорректные задачи. Численные методы и приложения / А. Б. Бакушинский, А. В. Гончарский. — М.: Изд-во МГУ, 1989. — 200 с.
3. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972. – 414 с.
4. Васильев Ф. П. Методы оптимизации / Ф. П. Васильев. — М.: Факториал Пресс, 2002. — 824 с.
5. Еремин И. И. О задачах последовательного программирования / И. И. Еремин // Сиб. мат. журн. — 1973. — 14, № 1. — С. 53-–63.

6. Подиновский В. В. Оптимизация по последовательно применяемым критериям / В. В. Подиновский, В. Н. Гаврилов. — М.: Советское радио, 1975. — 192 с.
7. Калашников В. В. Решение двухуровневого вариационного неравенства / В. В. Калашников, Н. И. Калашникова // Кибернетика и системный анализ. — 1994. — № 4. — С. 178–180.
8. Коннов И. В. О системах вариационных неравенств / И. В. Коннов // Изв. вузов. Матем. — 1997. — № 12. — С. 79—88.
9. Попов Л. Д. Об одноэтапном методе решения лексикографических вариационных неравенств / Л. Д. Попов // Изв. вузов. Матем. — 1998. — № 12. — С. 71–81
10. Попов Л. Д. Лексикографические вариационные неравенства и некоторые приложения / Л. Д. Попов // Математическое программирование. Регуляризация и аппроксимация, Сборник статей. — Тр. ИММ. — 8, № 1. — 2002. — С. 103–115.
11. Семенов В. В. О сходимости методов решения двухуровневых вариационных неравенств с монотонными операторами / В. В. Семенов // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 2 (101). — С. 121–129.
12. Денисов С. В. Проксимальний алгоритм для дворівневих варіаційних нерівностей: сильна збіжність / С. В. Денисов, В. В. Семенов // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2011. — № 3 (106). — С. 27–32.
13. Апостол Р. Я. Ітераційні алгоритми для монотонних дворівневих варіаційних нерівностей / Р.Я. Апостол, А. А. Гриненко, В. В. Семенов // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2012. — № 1 (107). — С. 3–14.
14. Moudafi A. Towards viscosity approximations of hierarchical fixed-point problems / A. Moudafi, P.-E. Mainge // Fixed Point Theory Appl. — V. 2006, Article ID 95453. — P. 1–10.
15. Solodov M. An explicit descent method for bilevel convex optimization / M. Solodov // Journal of Convex Analysis. — 2007. — 14. — P. 227–238.
16. Solodov M. A bundle method for a class of bilevel nonsmooth convex minimization problems / M. Solodov // SIAM Journal on Optimization. — 2007. — 18. — P. 242–259.
17. Martinet B. Regularisation d'inequations variationelles par approximations successives / B. Martinet // Rev. Francaise Informat. Recherche Operationelle. — 1970. — 4. — P. 154–159.
18. Rockafellar R. T. Monotone operators and the proximal point algorithm / R. T. Rockafellar // SIAM J. Control Optim. — 1976. — 14. — P. 877–898.
19. Guler O. On the convergence of the proximal point algorithm for convex minimization / O. Guler // SIAM J. Control Optim. — 1991. —29. — P. 403–419.
20. Acker F., Prestel M.-A. Convergence d'un schema de minimisation alternee / F. Acker, M.-A. Prestel // Annales de la faculte des sciences de Toulouse. — 1980. — V. 2, № 1. — P. 1–9.
21. Васин В. В. Операторы и итерационные процессы фейеровского типа. (Теория и приложения) / В. В. Васин, И. И. Еремин. — Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2005. — 200 с.
22. Васильев Ф. П. Регуляризованный проксимальный метод для выпуклых задач минимизации / Ф. П. Васильев, О. Обрадович // Тр. МИАН. — 1995. — 211. — С. 131-139.

23. Passty G. B. Ergodic Convergence to a Zero of the Sum of Monotone Operators in Hilbert Spaces / G. B. Passty // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1979. — 72. — P. 383–390.
24. Attouch H., Redont P., Soubeyran A. A New Class of Alternating Proximal Minimization Algorithms with Costs-to-Move / H. Attouch, P. Redont, A. Soubeyran // SIAM J. Optim. — 2007. — Vol. 18, No. 3. — P. 1061–1081.
25. Войтова Т. А. Метод решения двухэтапных операторных включений / Т. А. Войтова, В. В. Семенов // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — № 3 (102). — С. 34–39.
26. Семенов В. В. О методе параллельной проксимальной декомпозиции для решения задач выпуклой оптимизации / В. В. Семенов // Проблемы управления и информатики. — 2010. — №2. — С. 42–46.
27. Денисов С. В. Параллельная схема декомпозиции для поиска седловой точки и равновесия Нэша / С. В. Денисов // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2010. — №3 (102). — С. 40–48.
28. Семенов В. В. Параллельная декомпозиция вариационных неравенств с монотонными операторами / В. В. Семенов // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2012. — №2 (108). — С. 53–58.
29. Voitova T. A. Alternating proximal algorithm for the problem of bilevel convex minimization / T. A. Voitova, S. V. Denisov, V. V. Semenov // Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine. — 2012. — № 2. — P. 56–62. (In Ukrainian)
30. Войтова Т. А. Методи регуляризації та декомпозиції варіаційних задач / Т. А. Войтова, Ю. В. Маліцький, В. В. Семенов // Праці міжнародної молодіжної математичної школи „Питання оптимізації обчислень (ПОО–XXXVII)“ — К.: Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2011. — С. 30–31.
31. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. — М.: Мир, 1975. — 496 с.
32. Экланд И. Выпуклый анализ и вариационные проблемы / И. Экланд, Р. Темам. — М.: Мир, 1979. — 399 с.
33. Обен Ж.-П. Прикладной нелинейный анализ / Ж.-П. Обен, И. Экланд. — М.: Мир, 1988. — 510 с.
34. Гольштейн Е. Г. Модифицированные функции Лагранжа. Теория и методы оптимизации / Е. Г. Гольштейн, Н. В. Третьяков. — М.: Наука, 1989. — 400 с.
35. Магарил–Ильяев Г. Г. Выпуклый анализ и его приложения / Г. Г. Магарил–Ильяев, В. М. Тихомиров. — М.: ЛИБРОКОМ, 2011. — 176 с.
36. Moreau J. J. Proximite et dualite dans un espace hilbertien / J. J. Moreau // Bull. Soc. Math. France. — 1965. — 93. — P. 273–299.
37. Opial Z. Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings / Z. Opial // Bull. Amer. Math. Soc. — 1967, 73. — P. 591–597.

Факультет кібернетики, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, вул. Володимирська, 64, Київ, 01601, Україна.

Надійшла 3.10.2012