Журнал обчислювальної та прикладної математики | 2013, №4(114) | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.9

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ОДНОГО КЛАСУ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ ЕЛІПТИЧНИХ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Н. В. Задоянчук, О. П. Купенко

Резюме. Досліджується задача оптимального керування для еліптичної варіаційної нерівності з однорідними умовами Діріхле на межі області у випадку, коли пов'язаний з нею лінійний еліптичний оператор не завольняє умовам коерцитивності та обмеженності. Залучаючи нерівність Харді-Пуанкаре, отримано достатні умови, за яких наведена оптимізаційна задача має єдиний розв'язок.

Ключові слова: Задача Діріхле, еліптична вараційна нерівність, вироджена вагова функція, нерівність Харді-Пуанкаре

1. Вступ

Основним об'єктом дослідження даної роботи виступає задача оптимального керування для такої виродженої еліптичної варіаційної нерівності: знайти елемент $y \in K$ такий, щоб співвідношення

$$\langle -\mathrm{div}(\rho(x)\nabla y), v - y\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)} \geq \langle f(x) + u(x), v - y\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)}$$

мало місце для всіх елементів $v \in K$. Тут f — задане розподілення, u — керування, ρ — невід'ємна вагова функція з властивостями $\rho \in L^1(\Omega)$, $\rho^{-1} \in L^1(\Omega)$ і $\rho + \rho^{-1} \notin L^\infty(\Omega)$, а K — опукла підмножина вагового простору Соболєва $W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)$.

Характерною рисою вироджених еліптичних рівнянь, варіаційних нерівностей та пов'язаних з ними оптимізаційних задач є той факт, що проблема їх розв'язності суттєво залежить від властивостей вагової функції ρ. Дійсно, оскільки в силу зроблених припущень функції ρ та ρ^{-1} можуть бути локально необмеженими, то відповідний диференціальний оператор втрачає властивості коерцитивності та неперервності на $H_0^1(\Omega)$. У свою чергу, це призводить до таких наслідків як неєдиність визначення розв'язку варіаційної нерівності, ефекту Лаврентьєва та інше (див. [1, 2, 3, 4]).

Дана робота ставить за мету отримати на функцію ρ достатні умови, за яких наведена задача оптимального керування має єдиний розв'язок навіть якщо простір фінітних функцій $C_0^\infty(\Omega)$ не є щільним у ваговому просторі Соболєва $W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)$. Для цього в роботі залучається перетворення, за яким вихідна задача зводиться до проблеми оптимального керування еліптичною варіаційною нерівністю з необмеженими коефіцієнтами потенціального типу, і за нерівністю типу Харді-Пуанкаре досліджується питання про існування її єдиного розв'язку.

2. Основні позначення та факти

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ — відкрита обмежена область з достатньо регулярною межею $\partial\Omega$ така, що $0 \in \mathbb{R}^N$ є внутрішньою точкою множини Ω. Всюди далі будемо позначати через $C_0^\infty(\Omega)$ локально опуклий простір усіх нескінченно диференційовних функцій з носіями в Ω. Через $H_0^1(\Omega)$ та $W_0^{1,p}(\Omega)$ $(p \geq 1)$ позначимо простори Соболєва, які утворено шляхом замикання $C_0^\infty(\Omega)$ за нормами

$$\|y\|_{H^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla y(x)|^2_{\mathbb{R}^N} \, dx \right)^{1/2}$$

та

$$\|y\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|y\|^p_{L^p(\Omega)} + \|\nabla y\|^p_{L^p(\Omega)^N} \right)^{1/p},$$

відповідно, а через $H^{-1}(\Omega)$ — дуальний до $H_0^1(\Omega)$ простір.

Нехай є заданою функція $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ така, що: $\rho(x) > 0$ майже скрізь (м.с.) на Ω,

$$\rho \in L^1(\Omega),\ \rho^{-1} \in L^1(\Omega),\ \nabla \ln \rho \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N) \ \text{ і } \ \rho + \rho^{-1} \notin L^\infty(\Omega). \qquad (1)$$

В цьому випадку функцію ρ можна утотожнити з невід'ємною мірою Радона на Ω, поклавши $\rho(E) = \int_E \rho(x)\,dx$ для довільної вимірної множини $E \subset \Omega$. Нагадаємо, що невід'ємною мірою Радона на Ω називають невід'ємну міру Бореля, що є скінченною на кожній компактній множині. Всюди далі будемо вважати, що існує замкнена підмножина $\mathcal{O}$ множини Ω така, що

$$\operatorname{dist}(\mathcal{O}, \partial\Omega) = \varepsilon, \qquad \rho > \varepsilon \ \text{ м.с. в } \ \Omega \setminus \mathcal{O}, \quad \text{і} \quad \rho \in L^\infty(\Omega \setminus \mathcal{O}) \qquad (2)$$

для деякого $\varepsilon > 0$. Інакше кажучи, припускається, що умови (1) не є характерними для примежового шару множини Ω.

Надалі невід'ємну функцію ρ з властивостями (1)–(2) будемо називати виродженною ваговою функцією і пов'язуватимемо з нею вагові гільбертові простори $L^2(\Omega, \rho\,dx)$, $L^2(\Omega, \rho^{-1}\,dx)$ та $W_0^{1,2}(\Omega; \rho\,dx)$, де через $W_0^{1,2}(\Omega; \rho\,dx)$ позначено ваговий простір Соболєва, який утворений тими елементами з $W_0^{1,1}(\Omega)$, для яких є скінченною норма

$$\|y\|_{W_0^{1,2}(\Omega; \rho\,dx)} = \left(\int_\Omega y^2 \rho\,dx + \int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} \rho\,dx \right)^{1/2}.$$

Зокрема, $f \in L^2(\Omega, \rho\,dx)$, якщо

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega, \rho\,dx)} = (f, f)_{L^2(\Omega, \rho\,dx)} = \int_\Omega f^2 \rho\,dx < +\infty.$$

Нехай $\lambda_* = (N-2)^2/4$. Тоді для довільної відкритої обмеженої області $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ з достатньо регулярною межею $\partial\Omega$ знайдеться стала величина $C(\Omega) > 0$ така, що

$$\int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \lambda_* \frac{y^2}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \right] dx \geq C(\Omega) \int_\Omega y^2\, dx \quad \forall\, y \in H^1_0(\Omega). \tag{3}$$

В літературі співвідношення (3) зазвичай називають нерівністю типу Харді-Пуанкаре (див. [5]). Як випливає з (3), для довільних $y \in H^1_0(\Omega)$ та $\lambda \in \mathbb{R}_+$ можна записати

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \lambda \frac{y^2}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \right] dx = \\ = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_*}\right) \int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} dx + \frac{\lambda}{\lambda_*} \int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \lambda_* \frac{y^2}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \right] dx \geq \\ \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_*}\right) \int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} dx + \frac{\lambda\, C(\Omega)}{\lambda_*} \int_\Omega y^2\, dx. \end{aligned} \tag{4}$$

Отже, якщо $0 < \lambda < \lambda_*$, то

$$\left(\int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \lambda \frac{y^2}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \right] dx \right)^{1/2} \quad \text{та} \quad \left(\int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N}\, dx \right)^{1/2}$$

є еквівалентними нормами в просторі Соболєва $H^1_0(\Omega)$.

3. Постановка задачі

Нехай K — непорожня опукла підмножина простору $W^{1,2}_0(\Omega; \rho\, dx)$, яка є секвенційно замкненою відносно збіжності за нормою

$$\|y\|^2_\rho := \int_\Omega y^2 \rho\, dx + \int_\Omega \left| \nabla y + \frac{y}{2} \nabla \ln \rho \right|^2_{\mathbb{R}^N} \rho\, dx. \tag{5}$$

Нехай $y_{ad} \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx)$ та $u_0 \in L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx)$ — задані розподілення, а U_∂ — непорожня опукла замкнена підмножина в $L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx)$ така, що

$$U_\partial = \{u \in L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx) : \ \|u - u_0\|_{L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx)} \leq R\}. \tag{6}$$

Тут $\|u\|^2_{L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx)} = \int_\Omega u^2(x) \rho^{-1}\, dx$. Всюди далі функції $u \in U_\partial$ розглядаються як допустимі керування.

Розглянемо таку задачу оптимального керування для варіаційної нерівності з керуванням у правій частині:

$$I(u, y) = \frac{1}{2} \left\| y - \frac{y_{ad}}{\sqrt{\rho}} \right\|^2_{L^2(\Omega, \rho dx)} + \frac{1}{2} \|u\|^2_{L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx)} \to \inf, \tag{7}$$

$$u \in U_\partial, \ y \in K, \tag{8}$$

$$\int_\Omega (\nabla y, \nabla v - \nabla y)_{\mathbb{R}^N}\, \rho\, dx \geq \int_\Omega (f + u)\,(v - y)\, dx \quad \forall\, v \in K. \tag{9}$$

Задача оптимального керування (7)–(9) полягає у визначенні пари функцій $(u^0, y^0) \in L^2(\Omega, \rho^{-1}dx) \times W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx)$ (надалі її будемо називати оптимальною), яка б задовольняла співвідношення (8), (9) і на якій функціонал (7) досягав би свого найменшого можливого значення.

Пов'яжемо з варіаційною нерівністю (9) лінійний оператор

$$A : W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx) \to \Big(W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx)\Big)^*,$$

залучивши правило:

$$\big\langle Ay,\ v - y\big\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\rho\, dx)} = \int_\Omega (\nabla y, \nabla v - \nabla y)_{\mathbb{R}^N}\, \rho\, dx \quad \forall v \in K.$$

Тут

$$\langle \cdot, \cdot\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\rho\, dx)} : \Big(W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx)\Big)^* \times W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx) \to \mathbb{R}$$

є операцією дуального спарювання елементів з просторів $\Big(W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx)\Big)^*$ та $W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx)$, відповідно. Тоді ясно, що

$$Ay = -\operatorname{div}(\rho(x)\nabla y),$$

а отже, в силу вихідних припущень, означений оператор $A : W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx) \to \Big(W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx)\Big)^*$ не задовольняє умові коерцитивності. Дійсно, оскільки

$$\langle Ay, y\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\rho\, dx)} = \int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N}\, \rho\, dx \neq \|y\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega;\rho\, dx)} \quad \forall y \in W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx),$$

то не має жодних підстав стверджувати факт існування елемента $v_0 \in K$ такого, що

$$\frac{\langle Ay, y - v_0\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\rho\, dx)}}{\|y\|_{W_0^{1,2}(\Omega;\rho\, dx)}} \to +\infty \text{ при } \|y\|_{W_0^{1,2}(\Omega;\rho\, dx)} \to \infty,\ y \in K.$$

До того ж множина K, в загальному випадку, не є замкненою підмножиною простору $W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx)$. В результаті проблема існування розв'язків варіаційної нерівності (9) на класі допустимих керувань залишається відкритим питанням.

Таким чином, характерною рисою задачі оптимального керування (7)–(9) є те, що за певного вибору функції ρ з властивостями (1) відповідна множина допустимих розв'язків задачі (7)–(9) може виявитися порожньою.

4. Попередній аналіз задачі оптимального керування (7)–(9)

Для подальшого дослідження задачі (7)–(9) нам знадобиться такий результат (для порівняння, див. також [6]).

Твердження 1. *Для довільного елемента $y \in W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)$ має місце подання $y = \dfrac{z}{\sqrt{\rho}}$, де $z \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$.*

Доведення. Зафіксуємо довільний елемент $y \in W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)$ і покажемо, що $z = y\sqrt{\rho} \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Дійсно, маємо

$$\|z\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |y\sqrt{\rho}|^2\, dx = \left(\int_\Omega y^2 \rho\, dx\right) \leq C\|y\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)}.$$

Далі, залучаючи перетворення

$$\nabla(\sqrt{\rho}\, y) = y\frac{1}{2\sqrt{\rho}}\nabla\rho + \sqrt{\rho}\,\nabla y = \sqrt{\rho}\left(\nabla y + \frac{1}{2\rho} y \nabla\rho\right) = \sqrt{\rho}\left(\nabla y + \frac{y}{2}\nabla \ln\rho\right)$$

та властивості вагової функції $\rho(x)$, отримаємо

$$\begin{aligned}\|\nabla z\|_{L^1(\Omega;\mathbb{R}^N)} &= \int_\Omega \left|\sqrt{\rho}\left(\nabla y + \frac{y}{2}\nabla\ln\rho\right)\right|_{\mathbb{R}^N} dx \leq \\ &\leq \int_\Omega |\sqrt{\rho}\nabla y|_{\mathbb{R}^N} dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\sqrt{\rho} y \nabla \ln\rho|_{\mathbb{R}^N} dx \leq \\ \leq \left(\int_\Omega \rho|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} dx\right)^{1/2} &|\Omega|^{1/2} + \frac{1}{2}\left(\int_\Omega y^2\rho\, dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |\nabla\ln\rho|^2_{\mathbb{R}^N} dx\right)^{1/2} \leq \\ &\leq C_1\|y\|_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)}.\end{aligned}$$

Таким чином, $z \in W^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Окрім того, елемент $z = y\sqrt{\rho}$, успадковує властивості сліду вздовж межі області $\partial\Omega$ від елементу y, і нарешті, отримаємо $z \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$. Твердження доведене. □

Насправді, відображення $\varphi : W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx) \to W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, що визначається як $\varphi(y) = y\sqrt{\rho}$, не є сюр'єктивним. Проте у просторі $W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ множина його образів $\varphi(W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx))$ є щільною. Легко бачити, що для довільного $z \in C_0^\infty(\Omega) \subset W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ маємо $\dfrac{z}{\sqrt{\rho}} \in W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)$. Дійсно,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\, dx)} &= \int_\Omega \frac{z^2}{\rho}\rho\, dx + \int_\Omega \left|\frac{1}{\sqrt{\rho}}\nabla z - \frac{z}{2\sqrt{\rho}}\nabla\ln\rho\right|^2_{\mathbb{R}^N} \rho\, dx \leq \\ &\leq \|z^2\|_{C(\Omega)}|\Omega| + 2\int_\Omega |\nabla z|^2_{\mathbb{R}^N} dx + \frac{1}{2}\int_\Omega z^2|\nabla\ln\rho|^2_{\mathbb{R}^N}\, dx \leq \\ &\leq \|z^2\|_{C(\Omega)}|\Omega| + 2\||\nabla z|^2_{\mathbb{R}^N}\|_{C(\Omega)}|\Omega| + \frac{1}{2}\|z^2\|_{C(\Omega)}\|\nabla\ln\rho\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{R}^N)} < \infty.\end{aligned}$$

Таким чином, як очевидний наслідок попереднього результату та неперервності вкладення $H_0^1(\Omega) \subset W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, отримаємо такий результат.

Наслідок 1. *Існує щільна множина $D_\rho \subset H_0^1(\Omega)$ така, що*

$$\frac{z}{\sqrt{\rho}} \in W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)\ \forall z \in D_\rho.$$

Приймаючи до уваги дане твердження, введемо до розгляду лінійне відображення

$$\mathfrak{F} : D_\rho \subset H_0^1(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx), \quad \text{де} \quad \mathfrak{F}z = \frac{z}{\sqrt{\rho}}.$$

Оскільки область визначення D_ρ даного відображення є щільною множиною банахового простору $H_0^1(\Omega)$, то для $\mathfrak{F}$, як щільно визначеного оператора, існує спряжений оператор

$$\mathfrak{F}^* : D(\mathfrak{F}^*) \subset \left(W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)\right)^* \to H^{-1}(\Omega)$$

такий, що

$$\langle \mathfrak{F}^* v, z \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle v, \mathfrak{F} z \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)} \ \forall\, z \in D_\rho \text{ і } \forall\, v \in D(\mathfrak{F}^*),$$

де

$$D(\mathfrak{F}^*) = \left\{ v \in \left(W_0^{1,2}(\Omega, \rho dx)\right)^* \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\, C > 0 \text{ таке, що для всіх } z \in D_\rho \\ \left|\langle v, \mathfrak{F} z \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)}\right| \le C \|z\|_{H_0^1(\Omega)} \end{array} \right\}.$$

Проте, в загальному випадку, спряжений оператор $\mathfrak{F}^*$ не є щільно визначеним.

Введемо до розляду таке поняття.

Означення 1. Будемо казати, що $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ є ваговою функцією потенціального типу, якщо $\rho > 0$ м. с. на Ω, $\rho \in L^1(\Omega)$, $\rho^{-1} \in L^1(\Omega)$, $\nabla \ln \rho \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^N)$ і існують стала $\widehat{C}(\Omega) > 0$ і підобласть $\Omega_* \subset \Omega$ така, що $\rho \in C^1(\overline{\Omega \setminus \Omega_*})$, де $\operatorname{dist}(\partial\Omega, \partial\Omega_*) > \delta$ при деякому $\delta > 0$, і при цьому виконуються такі нерівності:

$$\rho(x) \ge \sigma \text{ на } \Omega \setminus \Omega_* \text{ при деякому } \sigma > 0, \tag{10}$$

$$-\widehat{C}(\Omega) \le -\triangle \ln \rho(x) - \frac{1}{2} |\nabla \ln \rho|^2_{\mathbb{R}^N} < \frac{2\lambda_*}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}} = \frac{(N-2)^2}{2|x|^2_{\mathbb{R}^N}} \quad \text{в} \ \ \Omega. \tag{11}$$

В цьому випадку функцію $V(x) = -\triangle \ln \rho(x) - \frac{1}{2} |\nabla \ln \rho|^2_{\mathbb{R}^N}$ будемо називати потенціалом Харді для вагової функції ρ.

Наступне твердження встановлює важливу властивість оператора

$$A : W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx) \to \left(W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx)\right)^*.$$

Теорема 1. *Нехай $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ є ваговою функцією потенціального типу. Тоді*

$$\langle A(\mathfrak{F} z), \mathfrak{F} v \rangle_{W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)} = \langle B(z), v \rangle_{H_0^1(\Omega)}, \tag{12}$$

де

$$B(z) = -\triangle z - \frac{1}{2} V(x) z, \tag{13}$$

$$V(x) = -\triangle \ln \rho(x) - \frac{1}{2} |\nabla \ln \rho|^2_{\mathbb{R}^N}, \tag{14}$$

і лінійний оператор B визначає ізоморфізм простору $H_0^1(\Omega)$ в його дуальний простір $H^{-1}(\Omega)$.

Доведення. Нехай v та z – довільні елементи з $D_\rho \subset H_0^1(\Omega)$. Тоді, за наслідком 1, маємо $\mathfrak{F}z, \mathfrak{F}v \in W_0^{1,2}(\Omega, \rho\, dx)$. Далі, згідно означення оператора $\mathfrak{F}$, можна отримати таку низку перетворень

$$
\begin{aligned}
A\left(\mathfrak{F}z\right) = -\mathrm{div}\left(\rho\nabla\left(\mathfrak{F}z\right)\right) = -\mathrm{div}\left(\rho\,\nabla\left(\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right)\right) = \\
= -\rho^{1/2}\triangle z + \frac{1}{2}\rho^{-3/2}\left(\rho\triangle\rho - \frac{1}{2}|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}\right)z = \\
= -\sqrt{\rho}\,\triangle z - \frac{1}{2}\sqrt{\rho}\,z\left(-\frac{\triangle\rho}{\rho} + \frac{1}{2}\frac{|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}}{\rho^2}\right) = \\
= \sqrt{\rho}(-\triangle z - \frac{1}{2}\,z\,V(x)).
\end{aligned}
$$

Оскільки

$$
\begin{aligned}
\frac{|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}}{\rho^2} = |\nabla\ln\rho|^2_{\mathbb{R}^N}, \\
\triangle\ln\rho = \mathrm{div}(\nabla\ln\rho) = \mathrm{div}\left(\frac{\nabla\rho}{\rho}\right) = \frac{\triangle\rho\cdot\rho - (\nabla\rho,\nabla\rho)_{\mathbb{R}^N}}{\rho^2} = \\
= \frac{\triangle\rho\cdot\rho}{\rho^2} - \frac{|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}}{\rho^2} = \frac{\triangle\rho}{\rho} - \frac{|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}}{\rho^2},
\end{aligned}
$$

то функцію $V(x)$ можна подати у вигляді

$$
V(x) = -\triangle\ln\rho - \frac{1}{2}\frac{|\nabla\rho|^2_{\mathbb{R}^N}}{\rho^2} = -\triangle\ln\rho - \frac{1}{2}|\nabla\ln\rho|^2_{\mathbb{R}^N}. \tag{15}
$$

Таким чином,

$$
\begin{aligned}
\left\langle A\left(\mathfrak{F}z\right), \mathfrak{F}v\right\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx)} = \\
= \left\langle -\mathrm{div}\left(\rho\nabla\left(\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right)\right), \frac{v}{\sqrt{\rho}}\right\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx)} = \\
= \left\langle \rho^{1/2}\Big(-\mathrm{div}\left(\nabla z\right) - \frac{1}{2}V(x)z\Big), \frac{v}{\sqrt{\rho}}\right\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega,\rho\,dx)} = \\
= \left\langle -\triangle z - \frac{1}{2}V(x)z, v\right\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \left\langle B(z), v\right\rangle_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Насамкінець, оскільки вагова функція ρ є функцією потенціального типу, то з нерівності Харді-Пуанкаре випливає еквівалентінсть в просторі $H_0^1(\Omega)$ норм $\left(\int_\Omega |\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N}\,dx\right)^{1/2}$ та $\left(\int_\Omega \left[|\nabla y|^2_{\mathbb{R}^N} - \lambda\frac{y^2}{|x|^2_{\mathbb{R}^N}}\right]\,dx\right)^{1/2}$, а це означає, що оператор B визначає ізоморфізм між $H_0^1(\Omega)$ та $H^{-1}(\Omega)$. $\square$

З огляду на отримані результати, зауважимо наступну властивість множини K. Оскільки K є замкненою підмножиною простору $\mathcal{W}_\rho$, який утворимо як замикання простору фінітних функцій $C_0^\infty(\Omega)$ за нормою (5),

$$\mathcal{W}_\rho := \mathrm{cl}_{\,\|\cdot\|_\rho} C_0^\infty(\Omega),$$

то для будь-якого елемента $y \in K$ маємо: $y = \frac{z}{\sqrt{\rho}}$, де $z \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ за твердженням 1, та $\|y\|_\rho = \left\|\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right\|_\rho < +\infty$ (за вихідними припущеннями). Звідки отримуємо, що $z \in H_0^1(\Omega)$. Дійсно, для довільного $y \in \mathcal{W}_\rho$, маємо

$$\begin{aligned}\|y\|^2_{\mathcal{W}_\rho} &= \int_\Omega y^2(x)\rho(x)\,dx + \int_\Omega \left|\nabla y(x) + \frac{y(x)}{2}\nabla \ln\rho(x)\right|^2_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\,dx = \\ &= \int_\Omega (y\sqrt{\rho})^2 dx + \int_\Omega \left|\sqrt{\rho}\,\nabla y + \frac{y}{2\sqrt{\rho}}\nabla\rho\right|^2_{\mathbb{R}^N} dx = \\ &= \int_\Omega (y\sqrt{\rho})^2\,dx + \int_\Omega |\nabla(\sqrt{\rho}\,y)|^2_{\mathbb{R}^N}\,dx = \|z\|^2_{H_0^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Отже, $K \subset \mathfrak{F}(D_\rho)$.

Приймаючи до уваги даний результат, перейдемо у варіаційній нерівності (9) до її еквівалентного опису. Для цього утворимо множину

$$K' = \left\{\eta \in H_0^1(\Omega) \mid \eta = \sqrt{\rho}\,y, \forall\, y \in K \subset W_0^{1,2}(\Omega; \rho\,dx)\right\},$$

яка за побудовою та вихідними припущеннями є замкненою опуклою підмножиною простору $H_0^1(\Omega)$. В результаті, для вихідного об'єкту керування (8)–(9), маємо такий результат:

Твердження 2. *$y \in K$ є розв'язком варіаційної нерівності (8)–(9) тоді і тільки тоді, коли $y = \frac{z}{\sqrt{\rho}}$, де $z \in K'$ задовольняє співвідношення*

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\nabla z, \nabla w - \nabla z)_{\mathbb{R}^N}\,dx - \int_\Omega \frac{1}{2}V(x)z\,(w-z)\,dx \geq \\ \geq \int_\Omega \left(\frac{f}{\sqrt{\rho}} + \frac{u}{\sqrt{\rho}}\right)(w-z)\,dx \quad \forall\, w \in K'. \qquad (16)\end{aligned}$$

Доведення. Оскільки для довільного $v \in K$ існує елемент $w \in K'$ такий, що $v = \mathfrak{F}w := \frac{w}{\sqrt{\rho}}$, маємо

$$\begin{aligned}\int_\Omega (f+u)\,(v-y)\,dx &= \int_\Omega (f+u)\left(\frac{w}{\sqrt{\rho}} - \frac{z}{\sqrt{\rho}}\right)dx = \\ &= \int_\Omega \left(\frac{f}{\sqrt{\rho}} + \frac{u}{\sqrt{\rho}}\right)(w-z)\,dx \quad \forall\, w \in K',\end{aligned}$$

$$\int_\Omega (\nabla y, \nabla v - \nabla y)_{\mathbb{R}^N}\, \rho\, dx = \langle -\mathrm{div}(\rho(x)\nabla y), v - y\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\rho\, dx)} =$$
$$= \langle -\mathrm{div}(\rho(x)\nabla(\mathfrak{F}z)), \mathfrak{F}w - \mathfrak{F}z\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\rho\, dx)} =$$
$$= \Big\langle -\mathrm{div}\left(\rho(x)\nabla\left(\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right)\right), \frac{w}{\sqrt{\rho}} - \frac{z}{\sqrt{\rho}}\Big\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\rho\, dx)} =$$
$$= \Big\langle \sqrt{\rho}(-\triangle z - \frac{1}{2}\, z\, V(x)), \frac{w}{\sqrt{\rho}} - \frac{z}{\sqrt{\rho}}\Big\rangle_{W_0^{1,2}(\Omega;\rho\, dx)} =$$
$$= \big\langle -\triangle z - \frac{1}{2}\, V(x) z, w - z\big\rangle_{H_0^1(\Omega)} =$$
$$= \int_\Omega (\nabla z, \nabla w - \nabla z)_{\mathbb{R}^N}\, dx - \int_\Omega \frac{1}{2}\, V(x) z\, (w - z)\, dx.$$

□

Тепер покажемо, що коли обирати в якості вагової функції $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ функцію потенціального типу, варіаційна нерівність (9) матиме єдиний розв'язок при кожному допустимому керуванні $u \in U_\partial$. Для цього скористаємось наступними відомими результатами Ж.-Л. Ліонса (див. [7]), які стосуються розв'язності нелінійних варіаційних нерівностей.

Твердження 3. [7, теорема 8.2] *Нехай V — банахів простір і $K \subset V$ — замкнена опукла підмножина. Нехай також $A : K \to V^*$ — нелінійний оператор, $f \in V^*$ — задане розподілення і нехай для A виконуються такі умови:*

1. *A — псевдомонотонний оператор, а саме, A є обмеженим і таким, що при $y_k \to y$ слабко в V, $y_k, y \in K$ і $\overline{\lim}_{k\to\infty}\langle A(y_k), y_k - y\rangle_V \le 0$, має місце нерівність*
$$\underline{\lim}_{k\to\infty} \langle A(y_k), y_k - v\rangle_V \ge \langle A(y), y - v\rangle_V \ \forall v \in V;$$
2. *A — коерцитивний оператор, тобто існує елемент $v_0 \in K$ такий, що*
$$\frac{\langle A(y), y - v_0\rangle_V}{\|y\|_V} \to +\infty \text{ при } \|y\|_V \to \infty,\ y \in K. \tag{17}$$

Тоді варіаційна задача знаходження елементу $y \in K$, при якому
$$\langle A(y), v - y\rangle_V \ge \langle f, v - y\rangle_V \ \forall v \in K, \tag{18}$$
має принаймні один розв'язок.

Твердження 4. [7, теорема 8.3] *Якщо оператор $A : K \to V^*$ у твердженні 3 є строго монотонним на K, то варіаційна задача (18) має єдиний розв'язок.*

Встановимо такий результат:

Теорема 2. *Нехай $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ є ваговою функцією потенціального типу. Тоді при заданих $f \in L^2(\Omega, \rho^{-1}dx)$ та $u \in U_\partial$ варіаційна нерівність* (8)–(9) *має єдиний розв'язок $y = y(u, f) \in K$ такий, що $y = z/\sqrt{\rho}$ і $z \in H_0^1(\Omega)$.*

Доведення. Оскільки варіаційні нерівності (8)–(9) та (16) є еквівалентними з точки зору проблеми їх розв'язності, то покладемо $V = H_0^1(\Omega)$ і покажемо, що в цьому випадку для варіаційної нерівності (16) виконуються усі передумови твердження 3. Згідно теореми 1, з нерівністю (16) можна пов'язати лінійний оператор $B : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$, який означений за правилом:

$$\langle Bz, w\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \left((\nabla z, \nabla w)_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{2} V(x) z w \right) dx. \qquad (19)$$

Тоді, беручи до уваги співвідношення (10), (11) та нерівність Харді-Пуанкаре, отримуємо (див.(4)): існує стала $C_1 > 0$ така, що:

$$\langle Bz, w\rangle_{H_0^1(\Omega)} \le \|z\|_{H_0^1(\Omega)} \|w\|_{H_0^1(\Omega)}, \qquad (20)$$

$$\langle B(z-w), z-w\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \left((\nabla(z-w))^2_{\mathbb{R}^N} - \frac{1}{2} V(x)(z-w)^2 \right) dx \ge$$
$$\ge C_1 \|z-w\|^2_{H_0^1(\Omega)} > 0 \quad \forall\, z \ne w. \qquad (21)$$

Отже, оператор B є обмеженим, строго монотонним і коерцитивним в сенсі

$$\frac{\langle Bz, z\rangle_{H_0^1(\Omega)}}{\|z\|_{H_0^1(\Omega)}} \to +\infty, \text{ якщо } \|z\|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty.$$

Тоді, за твердженням 2.5 з [7], відображення $B : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ є псевдомонотонним. Окрім того, для довільного елемента $w_0 \in H_0^1(\Omega)$ та для всіх $z \in K'$, згідно (21) та оцінки (20), маємо:

$$\langle Bz, z-w_0\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \langle Bz, z\rangle_{H_0^1(\Omega)} - \langle Bz, w_0\rangle_{H_0^1(\Omega)} \ge$$
$$\ge C_1 \|z\|^2_{H_0^1(\Omega)} - |\langle Bz, w_0\rangle_{H_0^1(\Omega)}| \ge C_1 \|z\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \|w_0\|_{H_0^1(\Omega)} \|z\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Отже, $\dfrac{\langle Bz, z-w_0\rangle_{H_0^1(\Omega)}}{\|z\|_{H_0^1(\Omega)}} \to +\infty$, при $\|z\|_{H_0^1(\Omega)} \to +\infty$.

Оскільки умова $f \in L^2(\Omega, \rho^{-1}dx)$ гарантує, що $\dfrac{f}{\sqrt{\rho}} \in L^2(\Omega)$, а простір $L^2(\Omega)$ компактно вкладається в $H^{-1}(\Omega)$, то виконуються всі передумови твердження 3. Таким чином, варіаційна задача (16) має єдиний розв'язок $z \in K'$ при кожному фіксованому допустимому керуванні $u \in U_\partial$. □

Беручи до уваги наведені вище перетворення, розглянемо наступну задачу оптимального керування:

$$J(p, w) = \frac{1}{2} \|z - y_{ad}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \|p\|^2_{L^2(\Omega)} \to \inf, \qquad (22)$$

за обмежень (16) та за умови, що

$$z \in K', \quad p \in P_\partial := \left\{ p \in L^2(\Omega) : \left\| p - \frac{u_0}{\sqrt{\rho}} \right\|_{L^2(\Omega)} \le R \right\}. \qquad (23)$$

Далі розглянемо такі множини:
$\Lambda = \big\{(p,z) \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$ де p та $z -$ пов'язані співвідношенням

$$\int_\Omega (\nabla z, \nabla w - \nabla z)_{\mathbb{R}^N}\, dx - \int_\Omega \frac{1}{2} V(x) z\,(w-z)\, dx \geq$$
$$\geq \int_\Omega \left(\frac{f}{\sqrt{\rho}} + p\right)(w-z)\, dx \quad \forall\, w \in K'$$

та задовольняють обмеження (23)$\,\}$,

$\Xi = \{(u,y) \in L^2(\Omega, \rho^{-1}dx) \times W_0^{1,2}(\Omega; \rho dx),$ де u і y задовольняють (8)–(9)$\}$, які надалі будемо називати множинами допустимих розв'язків задач оптимального керування (22), (16), (23) та (7)–(9) відповідно.

Означення 2. Будемо казати, що пари функцій $(p^0, z^0) \in \Lambda$ та $(u^0, y^0) \in \Xi$ є оптимальними розв'язками задач (22), (16), (23) та (7)–(9) відповідно, якщо

$$\inf_{(p,z)\in\Lambda} J(p,z) = J(p^0, z^0), \quad \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u,y) = I(u^0, y^0).$$

Наступний результат показує, що означені задачі оптимального керування є в певному сенсі еквівалентними. Отже, з регулярності задачі (22), (16), (23) (див. теорему 2), буде випливати регулярність задачі оптимального керування (7)–(9).

Теорема 3. *Нехай $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ є ваговою функцією потенціального типу. Нехай $f \in L^2(\Omega, \rho^{-1}dx)$, $y_{ad} \in L^2(\Omega)$ є заданими функціями. Тоді допустима пара $(p^0, z^0) \in \Lambda$ є оптимальною в задачі* (22), (16), (23) *в тому і тільки в тому випадку, коли*

$$(u^0, y^0) := \left(\sqrt{\rho} p^0, \frac{z^0}{\sqrt{\rho}}\right) \tag{24}$$

є розв'язком вихідної задачі оптимального керування (7)–(9)*. При цьому має місце рівність*

$$\inf_{(p,z)\in\Lambda} J(p,z) = J(p^0, z^0) = I(u^0, y^0) = \inf_{(u,y)\in\Xi} I(u,y). \tag{25}$$

Доведення. Як випливає з твердження 2, об'єкти керування задач оптимального керування (7)–(9) і (22), (16), (23) є еквівалентними, більше того, розв'язки цих двох варіаційних нерівностей пов'язані співвідношенням $y = \dfrac{z}{\sqrt{\rho}}$. Означивши в просторі $L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx)$ відображення $\mathcal{G}$ за правилом $\mathcal{G}(u) = \dfrac{u}{\sqrt{\rho}}$, легко бачити, що воно ізометрично відображає простір $L^2(\Omega, \rho^{-1}dx)$ на простір $L^2(\Omega)$. Дійсно, для довільного керування $u \in L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx)$ маємо $p = \mathcal{G}(u)$, де

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega, \rho^{-1}\, dx)} = \int_\Omega u^2(x) \rho^{-1}(x)\, dx = \int_\Omega p^2(x)\, dx = \|p\|_{L^2(\Omega)}.$$

Більше того, умова (23) гарантує еквівалентність тверджень:

$$u \in U_\partial \Leftrightarrow p = \frac{u}{\sqrt{\rho}} \in P_\partial. \tag{26}$$

Таким чином, $(u, y) \in \Xi \Leftrightarrow (p, z) \in \Lambda$. Для завершення доведення залишається зауважити, що для будь-якої пари $(u, y) \in \Xi$ має місце рівність

$$I(u, y) = \frac{1}{2}\left\| y - \frac{y_{ad}}{\sqrt{\rho}} \right\|^2_{L^2(\Omega, \rho dx)} + \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega, \rho^{-1}dx)} =$$

$$= \frac{1}{2}\|\sqrt{\rho}y - y_{ad}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\left\| \frac{u}{\sqrt{\rho}} \right\|^2_{L^2(\Omega)} = J(p, z),$$

що гарантує виконання умови (25). □

5. Теорема існування

Доведемо розв'язність вихідної задачі оптимального керування (7)–(9).

Теорема 4. *Нехай $\rho : \Omega \to \mathbb{R}_+$ є ваговою функцією потенціального типу. Нехай $f \in L^2(\Omega, \rho^{-1}dx)$, $y_{ad} \in L^2(\Omega)$ є заданими функціями. Тоді задача оптимального керування* (7)–(9) *має єдиний розв'язок* (u^0, y^0) *в просторі* $L^2(\Omega, \rho^{-1}dx) \times W_0^{1,2}(\Omega; \rho\, dx)$.

Доведення. За теоремою 3 задачі (22), (16), (23) та (7)–(9) є еквівалентними. Отже, для однозначної розв'язності задачі (7)–(9) достатньо показати, що задача (22), (16), (23) має єдиний розв'язок. Для початку зауважимо, що відображення $p \mapsto z(p)$ простору $L^2(\Omega)$ в $H_0^1(\Omega)$ є слабко неперервним. Дійсно, оберемо довільну послідовність допустимих керувань $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset P_\partial$. За означенням множини P_∂ можемо вважати, що $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ є слабко збіжною послідовністю. Покажемо, що відповідна послідовність розв'язків $\{z_k = z(p_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ нерівності (16) є обмеженою в просторі $H_0^1(\Omega)$. Дійсно, припустивши обернене, а саме, що існує підпослідовність $\{z_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ така, що $\|z_{k_n}\|_{H_0^1(\Omega)} \to \infty$ при $n \to \infty$, приходимо до протиріччя з властивістю коерцитивності оператора B (див. (19)) в сенсі (17)

$$+\infty \leftarrow \frac{\langle Bz_{k_n}, z_{k_n} - w_0\rangle_{H_0^1(\Omega)}}{\|z_{k_n}\|_{H_0^1(\Omega)}} \le \frac{\langle f/\sqrt{\rho} + p_{k_n}, z_{k_n} - w_0\rangle_{H_0^1(\Omega)}}{\|z_{k_n}\|_{H_0^1(\Omega)}} \le$$

$$\le \frac{\|f/\sqrt{\rho} + p_{k_n}\|_{H^{-1}(\Omega)}\|z_{k_n} - w_0\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|z_{k_n}\|_{H_0^1(\Omega)}} \le$$

$$\le \left(\|f/\sqrt{\rho}\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|p_{k_n}\|_{H^{-1}(\Omega)}\right)\left(1 + \frac{\|w_0\|_{H_0^1(\Omega)}}{\|z_{k_n}\|_{H_0^1(\Omega)}}\right) \le C$$

для довільного фіксованого елементу $w_0 \in H_0^1(\Omega)$, оскільки P_∂ є компактною множиною простору $H^{-1}(\Omega)$. Далі, з обмеженості послідовності $\{z_k = z(p_k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ випливає її слабка збіжність (з точністю до підпослідовності) до деякого елементу $z^* \in H_0^1(\Omega)$.

Нехай $z_k \to z^*$ слабко в $H_0^1(\Omega)$. Оскільки множина K' є замкненою і опуклою, то за лемою Мазура, вона є також слабко замкненою. Отже, $z^* \in K'$. Покажемо, що $(p, z^*) \in \Lambda$, тобто $z^* = z(p)$, а отже, множина Λ є замкненою відносно топології слабкої збіжності в $L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Для цього перейдемо до границі у співвідношенні

$$\langle Bz_k, z_k - w\rangle_{H_0^1(\Omega)} \leq \langle f/\sqrt{\rho} + p_k, z_k - w\rangle_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall\, w \in K'$$

і скористаємося компакністю вкладення $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ та властивістю напівнеперервності знизу норми в $H_0^1(\Omega)$ відносно слабкої збіжності. В результаті маємо

$$\begin{aligned}
&\langle Bz^*, z^* - w\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \|z^*\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \langle Bz^*, w\rangle_{H_0^1(\Omega)} \leq \\
&\quad \leq \liminf_{k\to\infty} \|z_k\|^2_{H_0^1(\Omega)} - \lim_{k\to\infty} \langle Bz_k, w\rangle_{H_0^1(\Omega)} \leq \liminf_{k\to\infty} \langle Bz_k, z_k - w\rangle_{H_0^1(\Omega)} \leq \\
&\quad \leq \liminf_{k\to\infty} \langle f/\sqrt{\rho} + p_k, z_k - w\rangle_{H_0^1(\Omega)} = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega (f/\sqrt{\rho} + p_k)\,(z_k - w)\; dx \leq \\
&\qquad = \int_\Omega (f/\sqrt{\rho} + p)\,(z^* - w)\; dx = \langle f/\sqrt{\rho} + p, z^* - w\rangle_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall\, w \in K'.
\end{aligned}$$

Отже, $(p, z^*) \in \Lambda$ і тим самим доведено слабку неперервність відображення $p \to z(p)$.

Для завершення досить зауважити, що функціонал вартості (22) — строго опуклий, обмежений знизу, коерцитивний та напівнеперервний знизу на $L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Отже, згідно теорем 1.1 та 1.2 з [8], існує єдина пара $(p^0, z^0) \in L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ така, що $(p^0, z^0) \in \Lambda$ і $J(p^0, z^0) = \inf_{(p,z)\in\Lambda} J(p, z)$, тобто (p^0, z^0) є оптимальною парою для задачі (22)–(23). Таким чином, за теоремою 3, пара $(u^0, y^0) := \left(\sqrt{\rho}p, \frac{z}{\sqrt{\rho}}\right)$ є єдиним оптимальним розв'язком для задачі (7)–(9), що і потрібно було встановити. □

Література

1. Zhikov V. V. On Lavrentiev phenomenon // Russian J. Math. Phys. — 1994. — №2(3). — P. 249–269.
2. Zhikov V. V. Weighted Sobolev spaces // Sbornik: Mathematics. — 1998. — №8(189). — P. 27–58.
3. Kupenko O. P. Optimal Control Problems in Coefficients for Degenerate Variational Inequalities of Monotone Type. I. Existence of Optimal Solutions // J. Comp. Appl. Math. — 2011. — №3(106), P. 88–104.
4. Kupenko O. P. Optimal Control Problems in Coefficients for Degener-ate Variational Inequalities of Monotone Type. II. At-tainability Problem // J. Comp. Appl. Math. — 2012. — №1(107). — P. 15–34.
5. Vazquez J. L., Zuazua E. The Hardy inequality and the asymptotic behaviour of the heat equation with an inverse-square potential // J. of Functional Analysis. — 2000. — 173. — P. 103–153.
6. Балененко І.Г., Когут П.І. Про одну задачу оптимального керування для виродженого параболічного рівняння // Вісник ДНУ. Серія: Моделювання. — 2012. — №8(4). — P. 3–18.

7. Lions J.-L. Some Methods of Solving Non-linear Boundary Value Problems. — Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1969.
8. Lions J.-L. Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. — Springer-Verlag, Berlin, 1971.

Механіко-математичний факультет, Київський національный університет імені Тараса Шевченко, вул. Володимирська, 64, Киев, 01601, Україна, e-mail: zadoianchuk.nv@gmail.com;
Факультет інформаційних технологій, Державний вищий навчальний заклад "Національний гірничий університет просп. Карла Маркса, 19, Дніпропетровськ, 49005,
Лабораторія нелінійного аналізу диференціально-операторних систем, Навчально-науковий комплекс "Інститут прикладного систмного аналізу" Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут", просп. Перемоги 37, корп.6, Київ, 03056, Україна, e-mail: kogut_olga@bk.ru.

Надійшла 4.10.2013