Журнал обчислювальної та прикладної математики | **2016, №1(121)** | Journal of Computational & Applied Mathematics

УДК 517.958
MSC 35K15, 35R05

GENERALIZED SOLVABILITY OF TRANSMISSION SYSTEMS IN A LAYERED DOMAIN WITH THE CONDITION OF A «PROPER LUMPED SOURCE»

Oleksii Vostrikov[1], Dmytro Nomirovskii[2]

[1]Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: alexvost93@yandex.ua.
[2]Faculty of Cybernetics, Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine, E-mail: kashpir@mail.ru.

ОБОБЩЕННАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЮЩИХ ПРОЦЕССЫ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ С УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ ТИПА «СОСРЕДОТОЧЕННЫЙ СОБСТВЕННЫЙ ИСТОЧНИК»

А. И. Востриков[1], Д. А. Номировский[2]

[1]Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина, E-mail: alexvost93@yandex.ua.
[2]Факультет кибернетики, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина, E-mail: kashpir@mail.ru.

Abstract. We consider a parabolic system that describes heat and mass transmission in a two-layer domain with the condition of a «proper lumped source». A new formulation of the problem, where the initial parabolic equation is converted to a first-order set of partial differential equations with generalized functions in their coefficients, is investigated. A priori estimates, existence and uniqueness theorems for the operator are proved.
Keywords: parabolic system, two-layer domain, a priori estimates, generalized solution.

Резюме. В статье рассмотрено параболическое уравнение, описывающее процесс тепломассопереноса в двухслойной среде с условиями сопряжения типа «сосредоточенный собственный источник». Предлагается новая постановка такой задачи, в рамках которой исходное параболическое уравнение меняется на систему дифференциальных уравнений первого порядка с обобщенными функциями в коэффициентах. Для такого оператора доказаны априорные оценки, а также установлены теоремы существования и единственности обобщённого решения.
Ключевые слова: параболическое уравнение, двухслойная среда, априорные оценки, обобщённое решение.

Вступление

При рассмотрении различных актуальных прикладных задач возникает задача моделирования процессов тепло- и массопереноса, протекающих в средах, содержащих тонкие прослойки инородных включений. Примерами таких включений могут быть трещины, плёнки, газовые зазоры, каналы с теплоотводящим носителем, окислы, слои краски и пр. При построении математических моделей подобных процессов прослойку инородных включений в силу малой толщины исключают из области протекания процесса, а на границах разрыва ставят граничные условия (условия сопряжения), учитывающие свойства и характеристики прослойки и описывающие рассматриваемый процесс переноса сквозь область пространства, соответствующую прослойке [1,2]. Таким образом, приходят к гранично-краевой задаче в области с разрезами, обычно не являющейся односвязной. Подобный подход сопряжён с существенным усложнением методов численного моделирования таких систем. Иной подход к моделированию этих процессов состоит в том, что прослойку возвращают в область протекания процесса, а эффект инородных включений учитывают в коэффициентах, принадлежащих некоторому пространству обобщённых функций конечного порядка [2]. Это позволяет свести задачу к операторному уравнению в односвязной пространственно-временной области [3–5]. Эффективным методом исследования подобных уравнений является метод априорных оценок в негативных нормах [6–9]. Данная работа посвящена построению обобщённой постановки задачи тепломассопереноса в двухслойной среде с условиями сопряжения типа « сосредоточенный собственный источник». Получена система априорных оценок, на базе которых были установлены теоремы существования и единственности сильного и слабого решения в обобщённом смысле.

1. Классическая и обобщённая постановки задачи

Пусть состояние системы описывается функцией $u(t,\xi_1,\ldots,\xi_n)$, определённой в пространственно-временной области $Q = (0;T)\times\Omega$, где $\Omega = \Omega_1\cup\gamma\cup\Omega_2\subset\mathbb{R}^n$ — ограниченная пространственная область, состоящая из двух односвязных областей Ω_1 і Ω_2 ($\Omega_1\cap\Omega_2=\varnothing$) с регулярными границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$, а также тонкого включения $\gamma = (\bar\Omega_1\cap\bar\Omega_2)\setminus\partial\Omega$. Обозначим соответствующие цилиндрические области следующим образом: $Q_1=(0;T)\times\Omega_1$, $Q_2=(0;T)\times\Omega_2$, $Q_\gamma=(0;T)\times\gamma$.

Рассмотрим параболическое уравнение

$$u_t-\sum_{i,j=1}^{n}(k_{ij}u_{\xi_j})_{\xi_i}+qu=-f,\qquad (t,\xi)\in Q_1\cup Q_2, \tag{1}$$

описывающее процесс тепломассопереноса с условиями сопряжения типа «сосредоточенный собственный источник» на гиперповерхности Q_γ

$$[\mathbf{K}\mathrm{grad}(u),\mathbf{n})]_\gamma=\alpha u|_\gamma,\quad [u]_\gamma=0,\qquad (t,\xi)\in Q_\gamma, \tag{2}$$

где $\mathbf{K} = (k_{ij})_{i,j=1}^n$, а $[f]_\gamma = \lim\limits_{\Omega_1 \ni \xi \to \xi_0} f(\xi) - \lim\limits_{\Omega_2 \ni \xi \to \xi_0} f(\xi)$, $\xi_0 \in \gamma$ — скачок значения функции на поверхности γ, $\mathbf{n}$ — вектор нормали к γ, внешний для Ω_2. На коэффициенты уравнения наложим следующие ограничения

$$q(\xi), k_{ij}(\xi) \in C^1(\bar{\Omega}),\ \alpha(\xi) \in C^1(\bar{\gamma}),$$

$$\alpha(\xi) \geqslant a > 0,\ q(\xi) \geqslant b > 0,\ \sum_{i,j=1}^n k_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant c\sum_{i=1}^n \xi_i^2,\ c > 0.$$

Будем исследовать такую начально-краевую задачу: найти функцию $u(t,\xi)$, удовлетворяющую уравнениям (1), (2) и следующим начальным и краевым условиям

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{\xi \in \partial\Omega} = 0. \tag{3}$$

Введём следующее обозначение для вектора потока: $\omega = -\mathbf{K}\mathrm{grad}(u)$. В области $Q_1 \cup Q_2$ равенство понимается в классическом смысле, а на гиперповерхности Q_γ — в смысле равенства пределов

$$\lim_{\Omega_i \ni \xi \to \xi_0 \in \gamma} \omega(t,\xi) = \lim_{\Omega_i \ni \xi \to \xi_0 \in \gamma} \left(-\mathbf{K}\mathrm{grad}(u(t,\xi))\right),\ i = 1,2.$$

Подобное определение имеет смысл для функций u, принадлежащих пространству

$$C^1(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) = \left\{u = (u_1,u_2) \mid u_1 \in C^1(\bar{Q}_1), u_2 \in C^1(\bar{Q}_2)\right\}.$$

Теперь уравнения (1), (2) можно переписать в виде

$$u_t + \mathrm{div}(\omega) + qu = -f, \tag{4}$$

$$[(\omega,\mathbf{n})] = -\alpha u|_\gamma, \quad [u]_\gamma = 0. \tag{5}$$

Введём обобщённый оператор дивергенции

$$\widetilde{\mathrm{div}} = \mathrm{div}(\omega) + [(\omega,\mathbf{n})]_\gamma \delta(\gamma) = \mathrm{div}(\omega) - \alpha u|_\gamma \delta(\gamma), \tag{6}$$

где $g\delta(\gamma)(v) = \int_\gamma g(t,\xi)v(t,\xi)d\gamma$ для всех непрерывных в $\bar{Q}$ функций v. Здесь g — произвольная непрерывная на $\bar{Q}_\gamma$ функция.

Отметим, что полученный оператор $\widetilde{\mathrm{div}}$ является расширением классического оператора дивергенции с $(C^1(\bar{Q}))^n$ на $(C^1(\bar{Q}_1,\bar{Q}_2))^n$, т.е.

$$\widetilde{\mathrm{div}}\colon (C^1(\bar{Q}_1,\bar{Q}_2))^n \to (C(\bar{Q}))^*.$$

Нетрудно убедиться, что для обобщённой дивергенции имеет место аналог формулы интегрирования по частям

$$\int_\Omega \widetilde{\mathrm{div}}(\omega)v d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\omega v, \mathbf{n}_\Omega)d(\partial\Omega) - \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (\omega, \mathrm{grad}(v))d\Omega, \tag{7}$$

где $v \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\bar{\Omega}_1, \bar{\Omega}_2)$.

Отметим, что интеграл в левой части следует понимать как результат применения функционала $\widetilde{\mathrm{div}}(\omega)$ к функции v. В дальнейшем это обозначение будет сохранять такой же смысл.

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} u_t + \widetilde{\operatorname{div}}(\omega) + qu + \alpha u\delta(\gamma) = -f, \\ \omega = -\mathbf{K}\operatorname{grad}(u), \end{array}\right. \tag{8}$$

где $(t,\xi) \in Q$, $u \in C(\bar{Q}) \cap C^1(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2)$, $\omega \in (C^1(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2))^n$.

Эту систему уравнений можно представить в операторной форме $\mathcal{L}x = F$, где $x = (u,\omega)$, а оператор $\mathcal{L}$ задаётся символической матрицей

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} + q + \alpha\delta(\gamma) & \widetilde{\operatorname{div}} \\ \mathbf{K}\operatorname{grad} & \mathbf{E} \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} -f \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Систему (8) с начально-краевыми условиями (3) назовём моделью Демченко задачи (1)-(3).

2. Основные функциональные пространства

Обозначим пространство гладких функций, удовлетворяющих начально-краевым условиям (3), как

$$C^1_{\text{гр}} = \{u \in C(\bar{Q}) \cap C^1(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) \mid u|_{t=0}, u|_{\xi\in\partial\Omega} = 0\}.$$

Введём в рассмотрение линейное множество $D \subset C^1_{\text{гр}} \times (C^1(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2))^n$, которому принадлежат пары (u,ω), удовлетворяющие условиям сопряжения (5).

Для условия сопряжения

$$[(\mathbf{K}\eta, \mathbf{n})]_\gamma = \alpha v|_\gamma \tag{10}$$

и начально-краевых условий

$$v|_{t=T} = 0, \ v|_{\xi\in\partial\Omega} = 0 \tag{11}$$

рассмотрим также линейное множество $D^* \subset C^1_{\text{гр}*} \times (C^1(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2))^n$, которому принадлежат пары (v,η), удовлетворяющие (10). Здесь

$$C^1_{\text{гр}*} = \{v \in C(\bar{Q}) \cap C^1(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2) \mid v|_{t=T}, v|_{\xi\in\partial\Omega} = 0\}.$$

Рассмотрим следующую норму на множествах D и D^*

$$\|x\|^2_+ = \|u\|^2_{W^1_2} + \|\omega\|^2_{L^n_2(Q_1\cup Q_2)}, \quad \|u\|^2_{W^1_2} = \int\limits_Q u_t^2 + \sum_{i=1}^n u^2_{\xi_i} dQ. \tag{12}$$

Пусть W^1_2 и W^1_{2*} — пополнение множеств $C^1_{\text{гр}}$ и $C^1_{\text{гр}*}$ по норме $\|\cdot\|_{W^1_2}$, а X и Y — пополнение множеств D и D^* по норме $\|\cdot\|_+$ соответственно.

Через W^{-1}_2 и W^{-1}_{2*} обозначим негативные относительно $L_2(Q)$ пространства для W^1_2 и W^1_{2*} соответственно.

В силу теоремы о следах существует непрерывный оператор взятия следа $T\colon W^1_2 \to L_2(Q_\gamma)$. Поэтому для произвольного $x \in X$ имеет смысл след $[(\omega, \mathbf{n})]_\gamma$, являющийся элементом пространства $L_2(Q_\gamma)$. Аналогичное утверждение имеет место и в пространстве Y.

Далее будем считать, что оператор $\mathcal{L}$ действует из пространства X в пространство Y^*. В качестве его области определения пока возьмём множество D. Кроме этого, введём в рассмотрение сопряжённый оператор $\mathcal{L}^*$, действующий из пространства Y в X^*. Этот оператор задаётся следующей символической матрицей

$$\mathcal{L}^* = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial t} + q + \alpha\delta(\gamma) & -\widetilde{\mathrm{div}}\mathbf{K}' \\ -\mathrm{grad} & \mathbf{E} \end{pmatrix}.$$

Сопряжённым оператор $\mathcal{L}^*$ является в том смысле, что для всех элементов $x \in D \subset X$, $y \in D^* \subset Y$ выполняется равенство

$$\langle \mathcal{L}x, y\rangle_{Y^*,Y} = \langle x, \mathcal{L}^* y\rangle_{X,X^*}.$$

Задачу нахождения такого $x \in X$, что $\mathcal{L}x = F \in Y^*$, назовём обобщённой постановкой задачи (1)–(3). Аналогично операторное уравнение $\mathcal{L}^* y = G$, где $G \in X^*$, назовём обобщённой постановкой сопряжённой задачи.

3. Априорные оценки

Установим систему априорных оценок для операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^*$, необходимую для доказательства существования и единственности решения задачи (1)–(3). Используя неравенство Коши-Буняковского, а также ограничения на коэффициенты уравнения (1), несложно установить следующую лемму.

Лемма 1. *Существует такая положительная константа c, что для всех $x = (u, \omega) \in D$ справедливо неравенство $\|\mathcal{L}x\|_{Y^*} \leqslant c\|x\|_X$.*

Лемма позволяет расширить по непрерывности оператор $\mathcal{L}$ на всё пространство X. Расширенный оператор обозначим $\bar{\mathcal{L}}$. Неравенство леммы остаётся справедливым и для него.

Аналогичная лемма имеет место и для сопряжённого оператора, который также можно расширить на всех пространство Y.

Лемма 2. *Существует такая положительная константа c, что для всех $y = (v, \eta) \in Y$ справедливо неравенство $\|\bar{\mathcal{L}}^* y\|_{X^*} \leqslant c\|y\|_Y$.*

Покажем существование оценок снизу.

Лемма 3. *Существует такая положительная константа c, что для всех $x = (u, \omega) \in X$ справедливо неравенство $c\|u\|_{L_2(Q)} \leqslant \|\bar{\mathcal{L}}x\|_{Y^*}$.*

Доказательство. Рассмотрим значения функционала $\bar{\mathcal{L}}x \in Y^*$ на элементе $y = (v, \eta) \in Y$, где

$$v = -\int\limits_T^t e^{-\tau} u(\tau, \xi)\, d\tau, \qquad \eta = \mathrm{grad}(v).$$

Оценим билинейную форму

$$\langle \bar{\mathcal{L}}x, y\rangle_{Y^*,Y} = (u_t + qu, v)_{L_2(Q)} + \int_Q \widetilde{\operatorname{div}}(\omega) v dQ +$$

$$+(\alpha u, v)_{L_2(Q_\gamma)} + \sum_{k=1}^{2} \sum_{i,j=1}^{n} (k_{ij} u_{\xi_j}, \eta_k^i)_{L_2(Q_k)} + \sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{n} (\omega_k^i, \eta_k^i)_{L_2(Q_k)}. \tag{13}$$

Оценим первое слагаемое, используя формулу интегрирования по частям, а также условия (11) и тот факт, что $u = -e^t v_t$

$$(u_t + qu, v)_{L_2(Q)} = (u_t, v)_{L_2(Q)} - (qe^t v_t, v)_{L_2(Q)} = -(u, v_t)_{L_2(Q)} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_Q (qe^t v^2)_t - qe^t v^2 dQ = \int_Q e^{-t} u^2 dQ +$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega qv^2|_{t=0} d\Omega + \frac{1}{2}\int_Q qe^t v^2 dQ \geqslant c\|u\|^2_{L_2(Q)}.$$

Рассмотрим второе слагаемое из правой части (13). Воспользуемся аналогом формулы (7).

$$\int_0^T \int_\Omega \widetilde{\operatorname{div}}(\omega) v \, d\Omega dt = \int_0^T \int_{\partial\Omega} (\omega v, \mathbf{n}_\Omega) \, d(\partial\Omega) dt - \int_0^T \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (\omega, \operatorname{grad}(v)) \, d\Omega dt.$$

За счёт условий (11) интеграл по $(0;T)\times\partial\Omega$ равен нулю. Второй интеграл преобразуем с помощью равенства $\eta = \operatorname{grad}(v)$.

$$-\int_{Q_1 \cup Q_2} (\omega, \operatorname{grad}(v)) dQ = -\int_{Q_1 \cup Q_2} (\omega, \eta) dQ = -\sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{n} (\omega_k^i, \eta_k^i)_{L_2(Q_k)}.$$

Поэтому второе и пятое слагаемые в правой части (13) в сумме дают ноль.

Третье слагаемое в (13) интегрируем по частям по временной переменной, учитывая, что $u = -e^t v_t$ и условие (11)

$$(\alpha u, v)_{L_2(Q_\gamma)} = -\int_{Q_\gamma} \alpha e^t v_t v dQ_\gamma = \frac{1}{2}\int_\gamma \alpha v^2|_{t=0} d\gamma + \frac{1}{2}\int_{Q_\gamma} \alpha e^t v^2 dQ_\gamma \geqslant 0.$$

Осталось рассмотреть четвёртое слагаемое из (13). Его преобразуем аналогично предыдущему, воспользовавшись ограничением на коэффициенты k_{ij}. Получаем

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{i,j=1}^{n} (k_{ij} u_{\xi_j}, \eta_k^i)_{L_2(Q_k)} = -\sum_{i,j=1}^{n} \int_Q e^t k_{ij} v_{t\xi_j} v_{\xi_i} dQ =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \Big(\int_\Omega k_{ij} v_{\xi_j} v_{\xi_i}|_{t=0} d\Omega + \int_Q k_{ij} e^t v_{\xi_j} v_{\xi_i} dQ \Big) \geqslant c \sum_{i=1}^{n} \int_Q v_{\xi_i}^2 dQ.$$

Таким образом, выполняется неравенство

$$\langle \bar{\mathcal{L}}x, y\rangle_{Y^*,Y} \geqslant c\|u\|^2_{L_2(Q)} + c\sum_{i=1}^{n} \|v_{\xi_i}\|^2_{L_2(Q)}.$$

Покажем, что

$$\|y\|^2_Y \leqslant c\|u\|^2_{L_2(Q)} + c\sum_{i=1}^{n} \|v_{\xi_i}\|^2_{L_2(Q)}.$$

Действительно, поскольку $\eta = \mathrm{grad}(v)$, то

$$\|y\|^2_Y = \|v_t\|^2_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^{n} \|v_{\xi_i}\|^2_{L_2(Q)} + \|\eta\|^2_{L_2^n(Q)} = \|e^{-t}u\|^2_{L_2(Q)} +$$
$$+2\sum_{i=1}^{n} \|v_{\xi_i}\|^2_{L_2(Q)} \leqslant c\|u\|^2_{L_2(Q)} + c\sum_{i=1}^{n} \|v_{\xi_i}\|^2_{L_2(Q)}.$$

Воспользовавшись неравенством Шварца, получаем

$$\|\bar{\mathcal{L}}x\|_{Y^*}\|y\|_Y \geqslant \langle \bar{\mathcal{L}}x, y\rangle_{Y^*,Y} \geqslant c\|u\|_{L_2(Q)}\|y\|_Y.$$

Сокращаем на $\|y\|_Y$ и приходим к утверждению леммы. □

Аналогичным образом доказывается соответствующее утверждение для сопряжённого оператора.

Лемма 4. *Существует такая положительная константа c, что для всех $y = (v, \eta) \in Y$ справедливо неравенство $c\|v\|_{L_2(Q)} \leqslant \|\bar{\mathcal{L}}^* y\|_{X^*}$.*

Отметим, что оценки снизу имеют неклассический вид, а именно, вместо нормы элементов x или y в левой части фигурирует лишь полунорма. Таким образом, полученных априорных оценок может быть недостаточно для доказательства единственности решения уравнения $\bar{\mathcal{L}}x = F$. Проблему можно устранить за счёт инъективности оператора $\bar{\mathcal{L}}$.

Лемма 5. *Операторы $\bar{\mathcal{L}}$ и $\bar{\mathcal{L}}^*$ инъективны.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение $\bar{\mathcal{L}}x = 0$. Допустим, оно имеет нетривиальное решение $x = (u, \omega)$. Используя неравенство леммы 3, получаем, что $u = 0$. С учетом этого имеем

$$\langle \bar{\mathcal{L}}x, y\rangle_{Y^*,Y} = \sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{n} \big((\omega^i_k)_{\xi_i}, v\big)_{L_2(Q_k)} + ([(\omega, \mathbf{n})]_\gamma, v)_{L_2(Q_\gamma)} +$$
$$+\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{n} (\omega^i_k, \eta^i_k)_{L_2(Q_k)} = \sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{n} \big(\omega^i_k, -v_{\xi_i} + \eta^i_k\big)_{L_2(Q_k)} + ([(\omega, \mathbf{n})]_\gamma, v)_{L_2(Q_\gamma)}.$$

Нетрудно убедиться, что для произвольного малого $\varepsilon > 0$ существует такой $y = (0, \tilde{\omega}) \in Y$, что $\|\omega - \tilde{\omega}\|_{L_2^n(Q)} < \varepsilon$. Подставляя этот y в предыдущее равенство, получаем

$$0 = \langle 0, y\rangle_{Y^*,Y} = \langle \bar{\mathcal{L}}x, y\rangle_{Y^*,Y} = \sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\omega_k^i, \tilde{\omega}_k^i\right)_{L_2(Q_k)} = (\omega, \tilde{\omega})_{L_2^n(Q)} =$$
$$= \|\omega\|^2_{L_2^n(Q)} + (\omega, \tilde{\omega} - \omega)_{L_2^n(Q)} \geqslant \|\omega\|^2_{L_2^n(Q)} - \varepsilon\|\omega\|_{L_2^n(Q)}.$$

Откуда следует, что $\omega = 0$. □

3. Теоремы существования и единственности

Теорема 1. *Для произвольной правой части $F = (f, 0) \in Y^*$, такой что $f \in L_2(Q)$, существует единственный $x \in X$, что $\bar{\mathcal{L}}x = F$ в Y^*.*

Доказательство. Для произвольного $y \in Y$ с учётом неравенства Шварца и системы априорных оценок верно

$$|\langle F, y\rangle_{Y^*,Y}| = |(f, v)_{L_2(Q)}| \leqslant \|f\|_{L_2(Q)}\|v\|_{L_2(Q)} \leqslant c\|\bar{\mathcal{L}}^*y\|_{X^*}.$$

За счёт инъективности оператора $\bar{\mathcal{L}}^*$ выражение $\langle F, y\rangle_{Y^*,Y}$ можно рассматривать как линейный непрерывный функционал от $\mu = \bar{\mathcal{L}}^*y$ в X^*. По теореме Хана-Банаха расширяем его по непрерывности на всё пространство X^*. Тогда по теореме Рисса существует элемент $x \in X$, такой что $\langle \bar{\mathcal{L}}^*y, x\rangle_{X^*,X} = \langle F, y\rangle_{Y^*,Y}$ для всех $y \in Y$. Отсюда получаем равенство $\langle \bar{\mathcal{L}}x, y\rangle_{Y^*,Y} = \langle F, y\rangle_{Y^*,Y}$ для всех $y \in Y$, т.е. $\bar{\mathcal{L}}x = F$ в Y^*. Единственность решения следует из инъективности оператора $\bar{\mathcal{L}}$. □

Таким образом, для произвольной правой части $f \in L_2(Q)$ существует единственное обобщённое решение $u \in W_2^1$ системы (1)–(3).

Определение 1. Функцию $u \in L_2(Q)$ назовём слабым решением системы (1)–(3), если существует такая последовательность $x_k = (u_k, \omega_k) \in X$, что

$$\|u - u_k\|_{L_2(Q)} \to 0, \qquad \|F - \bar{\mathcal{L}}x_k\|_{Y^*} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Из доказанных априорных оценок легко видеть, что если $x = (u, \omega)$ удовлетворяет уравнению $\bar{\mathcal{L}}x = F$, тогда u будет слабым решением (1)–(3).

С учётом плотности множества $L_2(Q)$ в W_{2*}^{-1} несложно установить теорему.

Теорема 2. *Для произвольной правой части $F = (f, 0) \in Y^*$, где $f \in W_{2*}^{-1}$, существует единственное слабое решение $u \in L_2(Q)$ системы (1)–(3).*

Аналогичные теоремы нетрудно установить и для сопряжённого уравнения.

Литература

1. Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения — К.: Наук. думка, 1998. — 614 с.
2. Ляшко И. И., Демченко В. Ф. Обобщенные формулировки задач тепло- и массопереноса в слоистых средах — К.: Институт кибернетики, 1987. — 27 с.
3. Номировский Д. А. Обобщенная разрешимость и оптимизация сингулярных параболических систем // Доповіді НАН України. — 2003. — № 10. — С. 30–35.
4. Номировский Д. А. Свойства параболической системы в областях с тонкими слабопроницаемыми включениями (неидеальный контакт) // Журнал обчисл. та прикл. матем. — 2004. — № 1. — С. 71–82.
5. Nomirovskii D. Generalized solvability and optimization of a parabolic system with a discontinuous solution // Journal of differential equations. — Vol. 233, Number 1, — 2007. — P. 1-21.
6. Ляшко И. И., Диденко В. П., Цитрицкий О. Е. Фильтрация шумов — К.: Наук. думка, 1979. — 230 с.
7. Ляшко С. И. Обобщенное управление линейными системами — К.: Наук. думка, 1998. — 472 с.
8. Номировский Д. А. Обобщенная разрешимость параболических систем с неоднородными условиями сопряжения типа неидеального контакта // Дифференциальные уравнения. — 2004. — Т. 45, № 10. — С. 1390–1399.
9. Klyushin D. A., Lyashko S. I., Nomirovskii D. A., Petunin Yu. I., Semenov V. V. Generalized solutions of operator equations and extreme elements — New York: Springer, 2012.

Надійшла 04.03.2016