

ГРАВІТАЦІЙНЕ ВІДШТОВХУВАННЯ ДЛЯ ЧАСТОК ЗІ СПІНОМ У ПОЛІ ШВАРЦШІЛЬДА

Р. М. Пляцко, О. Б. Стефанишин

*Інститут прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-б, Львів, 79060, Україна*

(Отримано 13 березня 2009 р.)

На прикладах розв'язків рівнянь Матісона–Папапетру, які описують колові і близькі до них орбіти ультрарелятивістської частки зі спіном в околі $r = 3M$ поля Шварцшільда, розглянуто ефекти гравітаційного відштовхування. Показано, що ці ефекти випливають із рівнянь Матісона–Папапетру за обох варіантів умов, якими їх найчастіше доповнюють — Френкеля–Матісона і Тульчієва–Діксона. Звернуто увагу на можливості проявів гравітаційного відштовхування в астрофізичних явищах.

Ключові слова: рівняння Матісона–Папапетру, поле Шварцшільда, гравітаційне відштовхування, ультрарелятивістські рухи.

PACS number(s): 04.20.–q, 95.30.Sf

I. ВСТУП

На відміну від ньютонівської теорії тяжіння, у якій наявність у пробного тіла внутрішнього кутового моменту (обертання) не впливає на його рух відносно масивнішого тіла (прикладом є класичний опис руху планет навколо Сонця), у загальній теорії відносності ситуація інша. Згідно з рівняннями, які вперше отримав М. Матісон [1], через внутрішнє обертання (спін) пробне тіло (частка) зазнає впливу кривини простору-часу, внаслідок чого змінюються траєкторія й орієнтація осі обертання [2, 3]. Ці рівняння традиційно записують так:

$$\frac{D}{ds} \left(mu^\lambda + u_\mu \frac{DS^{\lambda\mu}}{ds} \right) = -\frac{1}{2} u^\pi S^{\rho\sigma} R_{\pi\rho\sigma}^\lambda, \quad (1)$$

$$\frac{DS^{\mu\nu}}{ds} + u^\mu u_\sigma \frac{DS^{\nu\sigma}}{ds} - u^\nu u_\sigma \frac{DS^{\mu\sigma}}{ds} = 0, \quad (2)$$

де $u^\lambda \equiv dx^\lambda/ds$ — 4-швидкість частки, $S^{\mu\nu}$ — її тензор спіну, m і D/ds — відповідно маса й коваріантна похідна, $R_{\pi\rho\sigma}^\lambda$ — тензор Рімана кривини простору-часу. Відомі також їх зображення через 4-вектор або 3-вектор спіну, а також у термінах локальних (тетрадных) величин, які властиві системі відліку, супутній до частки [4, 5]. Після Матісона рівняння (1), (2) повторно вивів іншим методом А. Папапетру [2], тому їх часто називають рівняннями Матісона–Папапетру. (М. Матісону та його рівнянням присвячено спеціальний випуск журналу *Acta Phys. Pol. B. Proc. Suppl.* **1** (2008), де вміщено доповіді учасників міжнародної конференції “Мирон Матісон, його життя, творчість і вплив на сучасні дослідження”, Варшава, 18–20 жовтня 2007 р.)

Для вивчення фізичних наслідків рівнянь (1), (2) у конкретних гравітаційних полях їх необхідно доповнити деяким співвідношенням, сенс якого полягає у виділенні таких розв'язків системи (1), (2), які описують рух центра маси пробного тіла [4]. Існує неоднозначність у виборі доповняльної умови, пов'язана із

залежністю в релятивістській механіці (на відміну від механіки класичної) розташування центра маси тіла, що обертається, від системи відліку [6]. Найчастіше використовують два варіанти умов:

$$S^{\lambda\nu} u_\nu = 0 \quad (3)$$

або

$$S^{\lambda\nu} P_\nu = 0, \quad (4)$$

де

$$P^\nu = mu^\nu + u_\lambda \frac{DS^{\nu\lambda}}{ds} \quad (5)$$

є 4-імпульсом. Співвідношення (3) доцільно називати умовою Френкеля–Матісона (Френкель увів її в електродинаміці [7], а Матісон використав в [1]), хоч її часто називають умовою Пірані, маючи на увазі публікацію [8]. За співвідношенням (4) закріпилася назва умови Тульчієва–Діксона [9, 10].

Рівняння (1), (2) передбачають урахування умови пробності частки зі спіном [11]

$$\frac{S_0}{mr} \equiv \varepsilon \ll 1, \quad (6)$$

де S_0 — абсолютна величина спіну.

Загалом, розв'язки рівнянь (1), (2) за умов (3) і (4) відрізняються між собою. Зокрема в просторі Мінковського рівняння (1)–(3) поряд із розв'язками, що описують прямі світові лінії, мають ще й розв'язки у вигляді осцилюючих (спіральных) ліній [9, 10, 12, 13]. Тоді як рівняння (1), (2), (4) останніх не допускають (тлумачення цих незвичайних розв'язків дав Меллер у термінах власного й не власних центрів маси [14]). Водночас у просторі Мінковського рівняння (1), (2) за умов (3) і (4) мають спільні розв'язки, що описують рухи власного центра маси. Якщо ж наявне гравітаційне поле, яке розглядають у пост-ньютонівському

наближенні, відповідні розв'язки рівнянь (1), (2) за умов (3), (4), (6), хоч і не збігаються, однак близькі між собою з високою точністю [15]. Більш загально ситуація подібна, якщо вплив спіну на рух частки можна описати рядом за спіновими поправками до відповідних виразів для геодезійних рухів [16].

Специфічним є випадок, коли рух власного центра маси не можна описати малими за спіном поправками до геодезійного руху. Згідно з [4, 5, 17–19], за умов близькості швидкості частки зі спіном відносно джерела поля до швидкості світла вплив спіну на її світову лінію і траєкторію стає значним, навіть визначальним. Причиною цього є те, що гравітаційна спін-орбітальна взаємодія (а саме такою постає взаємодія спіну з кривиною простору-часу, наприклад, у полі Шварцшільда) для ультрарелятивістських швидкостей пропорційна до квадрата γ -фактора Лоренца. При цьому, залежно від співвідношень знаків (орієнтації) спіну й тангенціальної компоненти швидкості частки, сила цієї взаємодії посилює або послаблює силу звичайного (“геодезійного”, тобто безспінового) притягання. Досліджені в [4, 17–19] випадки конкретних рухів частки зі спіном у полі Шварцшільда демонструють можливості протидії гравітаційної ультрарелятивістської спін-орбітальної взаємодії звичайному притягання аж до проявів ефектів відштовхування. Відповідний аналіз рівнянь Матісона–Папаетру в цих працях базувався на використанні умови (3). Виникає запитання: чи допускає подібні ефекти умова (4)? Відповіді на нього присвячено наступний розділ статті.

Вплив нахилу спіну до екваторіальної площини метрики Шварцшільда на вихід частки з цієї площини, коли його опис рівнянням (1), (2) за обох варіантів умов, тобто (3) і (4), практично збігається, розглянуто в розділі III.

Важливість досліджень поведінки ультрарелятивістських часток із спіном у сильних гравітаційних полях визначається тим, що в астрофізичних спостереженнях відповідні закономірності можуть проявитися поблизу ядер галактик, квазарів, окремих чорних дір. Числові оцінки щодо цього подано в розділі IV.

II. ДЕЯКІ СПІЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯНЬ (1), (2) ЗА УМОВ (3) І (4)

Різні траєкторії частки зі спіном, що впливають із рівнянь (1), (2), (4) у полях Шварцшільда й Керра, вивчали в [20–26] залежно від конкретних значень інтегралів енергії й кутового моменту. На відміну від цих досліджень, тут будемо розглядати лише колові орбіти, однак не обмежуючись малими за спіном збуреннями. Шукатимемо аналітичні розв'язки рівнянь (1), (2), (4) без використання інтегралів енергії і кутового моменту. Значення ж цих інтегралів оцінимо після отримання явних виразів для величин, які їх визначають.

A. Основні співвідношення, що впливають із рівнянь (1), (2) за умови (4)

Рівняння (1), (2) за умови (4) записують у вигляді

$$\frac{DP^\lambda}{ds} = -\frac{1}{2}u^\pi S^{\rho\sigma} R_{\pi\rho\sigma}^\lambda, \quad (7)$$

$$\frac{DS^{\lambda\nu}}{ds} = P^\lambda u^\nu - P^\nu u^\lambda. \quad (8)$$

Величина

$$\mu = \sqrt{P_\lambda P^\lambda} \quad (9)$$

є масою частки, яка, згідно з (7), (8), за умови (4) є інтегралом руху:

$$\frac{d\mu}{ds} = 0. \quad (10)$$

(За умови (3) сталою величиною є m у рівнянні (1)).

Зв'язок між 4-швидкістю u^λ і 4-імпульсом P^λ має вигляд [21]

$$u^\lambda = N \left[\frac{P^\lambda}{\mu} + \frac{1}{2\mu^3 \Delta} S^{\lambda\nu} P^\pi R_{\nu\pi\rho\sigma} S^{\rho\sigma} \right], \quad (11)$$

де

$$\Delta = 1 + \frac{1}{4\mu^2} R_{\lambda\pi\rho\sigma} S^{\lambda\pi} S^{\rho\sigma}, \quad (12)$$

$$N = \left[1 + \frac{1}{4\Delta^2 \mu^4} S_{\pi\nu} P_\lambda S_{\rho\sigma} R^{\nu\lambda\rho\sigma} S^{\pi\alpha} P^\beta S^{\gamma\delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \right]^{-1/2}. \quad (13)$$

Із співвідношення (11) випливає, що $P_\lambda P^\lambda = \mu^2$. або
Інтегралом руху є величина спіну S_0 :

$$S_0^2 \equiv \frac{1}{2} S_{\lambda\nu} S^{\lambda\nu}. \quad (14)$$

**В. Рівняння, що випливають з (7), (8)
для екваторіальних колових орбіт у полі
Шварцшільда**

Використовуємо запис метрики Шварцшільда в стандартних координатах $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$, $x^4 = t$ з такими відмінними від нуля компонентами метричного тензора $g_{\lambda\nu}$:

$$g_{11} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \quad g_{22} = -r^2, \quad (15)$$

$$g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta, \quad g_{44} = 1 - \frac{2M}{r}.$$

Розгляньмо співвідношення, що випливають із рівнянь (7), (8) за умови (4) для екваторіальних колових рухів з $\theta = \pi/2$ частки зі спіном зі сталою орбітальною швидкістю відносно шварцшільдівської маси. Тобто в (7), (8) покладаємо

$$u^1 = 0, \quad u^2 = 0, \quad u^3 = \text{const} \neq 0, \quad u^4 = \text{const} \neq 0, \quad (16)$$

$$S^{12} = 0, \quad S^{23} = 0, \quad S^{13} = \text{const} \neq 0 \quad (17)$$

без апріорних обмежень на P_λ . Згідно з (4), (16), (17) маємо

$$S^{14} = -\frac{P_3}{P_4} S^{13}, \quad S^{24} = 0, \quad S^{34} = \frac{P_1}{P_4} S^{13}. \quad (18)$$

Для похідних $DS^{\lambda\nu}/ds$ знаходимо

$$\frac{DS^{12}}{ds} = 0, \quad \frac{DS^{13}}{ds} = -\frac{P_1}{P_4} \Gamma_{44}^1 u^4 S^{13}, \quad \frac{DS^{23}}{ds} = 0, \quad (19)$$

де Γ_{44}^1 — символ Крістофеля, обчислений за метрикою (15). Згідно з (16)–(19) із рівнянь (8) отримуємо два нетривіальні співвідношення:

$$-\frac{P_1}{P_4} \Gamma_{44}^1 u^4 S^{13} = P^1 u^3, \quad (20)$$

$$P^2 u^3 = 0. \quad (21)$$

Оскільки $u^3 = d\varphi/ds \neq 0$, внаслідок (21) необхідно

$$P^2 = 0. \quad (22)$$

Співвідношення (20) задовольняється у двох випадках:

$$P^1 = 0 \quad (23)$$

$$-g_{11} u^4 \Gamma_{44}^1 S^{13} = P_4 u^3. \quad (24)$$

Спочатку проаналізуємо випадок (23). Тоді два перші співвідношення (11), з $\lambda = 1, 2$, задовольняються тотожно, а інші набирають вигляду

$$u^3 = N \frac{P^3}{\mu} \left(1 - \frac{3S_0^2}{\mu^4 \Delta} P_4 P^4 R^{13}_{13}\right), \quad (25)$$

$$u^4 = N \frac{P^4}{\mu} \left(1 + \frac{3S_0^2}{\mu^4 \Delta} P_3 P^3 R^{13}_{13}\right), \quad (26)$$

де

$$\Delta = 1 + \frac{S_0^2}{\mu^2} R^{13}_{13} (1 - 3P_3 P^3), \quad (27)$$

$$N = \left(1 + \frac{A}{4\Delta^2 \mu^4}\right)^{-1/2}, \quad (28)$$

$$A \equiv 36S_0^4 R_{1313} R^{1313} P_3 P^3 P_4 P^4. \quad (29)$$

Для отримання (25), (26) ми використали вирази

$$(S^{13})^2 = S_0^2 P_4 P^4 g^{11} g^{33}, \quad (S^{14})^2 = S_0^2 P_3 P^3 g^{11} g^{44}, \quad (30)$$

які випливають із (4), (14).

Розгляньмо рівняння (7) за умов (16)–(19), (22), (23). Перше з них (7), з $\lambda = 1$, таке:

$$\Gamma_{33}^1 u^3 P^3 + \Gamma_{44}^1 u^4 P^4 = -g_{44}^2 \sqrt{g^{11} g^{33} g^{44}} \times \frac{S_0}{\mu} (2P^3 u^4 + P^4 u^3). \quad (31)$$

Друге рівняння (7), з $\lambda = 2$, задовольняється тотожно. З третього й четвертого рівнянь набору (7) отримуємо відповідно

$$P^3 = \text{const}, \quad P^4 = \text{const}. \quad (32)$$

Отже, всі рівняння (7), (8) задовольнятимуться, якщо чотири сталі величини u^3, u^4, P^3, P^4 задовольняють рівняння (25), (26), (31).

С. Область існування екваторіальних колових орбіт

З алгебраїчних співвідношень (25), (26), (31) неважко отримати квадратне рівняння для величини

$$x \equiv P_3 P^3. \quad (33)$$

Це рівняння таке:

$$x^2 \left[\left(1 - \frac{3M}{r} - \frac{3M^2}{r^2} \varepsilon^2 \right)^2 - 9\varepsilon^2 \frac{M^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{4M}{r} \varepsilon^2 \right) \right] + \mu^2 x \left[\frac{2M}{r} \left(1 - \frac{3M}{r} - \frac{3M^2}{r^2} \varepsilon^2 \right)^2 \left(1 + \frac{M}{r} \varepsilon^2 \right) + 9\varepsilon^2 \frac{M^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(1 + \frac{4M}{r} \varepsilon^2 \right) \right] + \mu^4 \frac{M^2}{r^2} \left(1 + \frac{2M}{r} \varepsilon^2 \right) = 0, \quad (34)$$

де

$$\varepsilon^2 \equiv \frac{S_0^2}{\mu^2 r^2} \quad (35)$$

і, згідно з умовою (6), необхідно $\varepsilon^2 \ll 1$. У тривіальному випадку безспінової частки ($\varepsilon = 0$) із (34) маємо

$$x = -\mu^2 \frac{M}{r} \left(1 - \frac{3M}{r} \right)^{-1}. \quad (36)$$

Унаслідок чого, згідно з (33),

$$P^3 = \pm \mu \sqrt{\frac{M}{r^3}} \left(1 - \frac{3M}{r} \right)^{-1/2}. \quad (37)$$

Вираз (37) збігається з відомим виразом для 4-імпульсу частки без спіну маси μ , який впливає безпосередньо з рівнянь геодезійних ліній для колових орбіт. Зокрема вираз (37) показує, що такі орбіти в полі Шварцшільда існують лише для $r > 3M$.

Зауважимо, що у випадку

$$1 - \frac{3M}{r} \gg \frac{M^2}{r^2} \varepsilon^2, \quad (38)$$

тобто коли r не є близьким до $3M$, з рівняння (34) отримуємо вираз для P^3 , який відрізняється від (37) лише малими поправками порядку ε^2 .

Особливим є випадок, коли r дорівнює чи близьке до $3M$. Зокрема при

$$r = 3M, \quad \varepsilon \neq 0 \quad (39)$$

з (34) отримуємо єдиний від'ємний корінь

$$x = -\frac{1}{\sqrt{3}\mu^2\varepsilon}, \quad (40)$$

де, не втрачаючи загальності, покладаємо

$$\varepsilon \equiv \frac{S_0}{\mu r}, \quad (41)$$

тобто $\varepsilon > 0$. (За обраної сигнатури метрики величина x у (34) є від'ємною). Згідно з (33), (40) маємо $P^3 = \pm 3^{-5/4} \varepsilon^{-1/2} \mu M^{-1}$. Однак легко перевірити, що всі співвідношення (25), (26), (31) задовольняються лише при

$$P^3 = -\frac{\mu}{3^{5/4} M \sqrt{\varepsilon}}. \quad (42)$$

Ураховуючи співвідношення (25)-(29), з точністю до ε записуємо $u^3 = P^3/\mu$. Тоді, згідно з (42), для кутової швидкості маємо

$$u^3 = -\frac{1}{3^{5/4} M \sqrt{\varepsilon}}. \quad (43)$$

Якщо r не дорівнює $3M$, однак близьке до цього значення, а саме

$$1 - \frac{3M}{r} = \delta, \quad |\delta| \ll \varepsilon, \quad (44)$$

то, замість (42), (43), із (34) отримуємо

$$P^3 = -\frac{\mu}{3^{5/4} M \sqrt{\varepsilon}} \left(1 - \frac{\sqrt{3}\delta}{2\varepsilon} \right), \quad (45)$$

$$u^3 = -\frac{1}{3^{5/4} M \sqrt{\varepsilon}} \left(1 - \frac{\sqrt{3}\delta}{2\varepsilon} \right). \quad (46)$$

Підкреслимо, що тут δ може бути як додатним, так і від'ємним. Тобто рівняння (34) допускає існування колових орбіт у межах малого околу значення $r = 3M$, якщо $|\delta| \ll \varepsilon$, як для $r > 3M$, так і для $r < 3M$.

Порівняймо вирази (43), (46) із відповідними виразами u^3 , отриманими в [17] із рівнянь (1), (2) за умови (3). Легко переконатися, що вони збігаються між собою (необхідно врахувати, що в [17] для ε використовувалося позначення $\varepsilon \equiv |S_0|/Mm$, на відміну від (6)). Тому доходимо висновку, що існування колових орбіт частки зі спіном у малому околі $r = 3M$ є спільним наслідком рівнянь (1), (2) за умов (3) і (4).

Стосовно співвідношення (24) неважко переконатися, що в цьому випадку рівняння (7), (8) несумісні. Тобто випадок (23) єдино можливий.

Д. Величини енергії та орбітального моменту

Оцінимо величини енергії E та орбітального моменту L частки зі спіном на розглянутих вище колових орбітах. Вирази для цих величин у випадку екваторіальних рухів у полі Шварцшільда мають вигляд

$$E = P_4 + \frac{1}{2} g_{44,1} S^{14}, \quad (47)$$

$$L = -P_3 - \frac{1}{2} g_{33,1} S^{13}. \quad (48)$$

Згідно зі співвідношеннями (6), (9), (30), (45) запишемо

$$|g_{44,1}S^{14}| \ll P_4, \quad (49)$$

тому наближено отримуємо

$$E = \mu \frac{3^{-3/4}}{\sqrt{\varepsilon}} \left(1 - \frac{\sqrt{3} \delta}{2 \varepsilon} \right). \quad (50)$$

Порівняймо це значення енергії частки зі спіном на коловій орбіті з малого околу $r = 3M$ зі значенням енергії частки без спіну на геодезійній коловій орбіті з $r = 3M(1 + \delta)$, $0 < \delta \ll 1$. Згідно з (37) маємо

$$E_{\text{geod}} = \frac{\mu}{3\sqrt{\delta}}. \quad (51)$$

Із (50), (51) випливає, що

$$E^2/\mu^2 \gg 1, \quad E_{\text{geod}}^2/\mu^2 \gg 1, \quad (52)$$

тобто ці величини є ультрарелятивістськими. Водночас, згідно з (44), маємо

$$E^2/E_{\text{geod}}^2 = \frac{\sqrt{3}\delta}{\varepsilon} \ll 1, \quad (53)$$

тобто на колових орбітах з малого околу $r = 3M$ значення енергії частки зі спіном і безспінової суттєво відрізняються. Це не дивно, оскільки різні фізичні причини зумовлюють такі орбіти: геодезійні колові орбіти існують завдяки гравітаційному притяганням, тоді як колові орбіти частки зі спіном визначаються спільною дією гравітаційного притягання та гравітаційного спін-орбітального відштовхування. Причому підкреслимо, що з погляду супутнього спостерігача, прискорення частки зі спіном відносно безспінової має порядок M/r^2 , тобто є значним [27]. Отже, колові орбіти частки зі спіном з малого околу $r = 3M$ є суттєво негеодезійними орбітами.

Неважко переконатися, що аналогічні висновки впливають з аналізу величини орбітального моменту (48).

Е. Випадок неекваторіальних колових орбіт

Покажімо, що рівняння (7), (8) за умови (4) мають розв'язки, які описують неекваторіальні колові орбіти частки зі спіном у полі Шварцшільда. Послідовність обчислень й оцінок у цьому випадку аналогічна тому, що проводилось для екваторіальних орбіт. Початково покладемо

$$u^1 = u^2 = 0, \quad u^3 = \text{const} \neq 0, \quad \theta = \text{const} \neq \pi/2, 0, \quad (54)$$

$$S^{12} = \text{const}, \quad S^{23} = \text{const}, \quad S^{13} = \text{const}, \quad (55)$$

без апріорних обмежень на P^ν . Неважко перевірити, що всі рівняння набору (8) задовольняються, якщо додатково до (54), (55) виконуються співвідношення:

$$P^1 = 0, \quad P^2 = 0, \quad S^{12} = 0, \quad (56)$$

$$S^{13}\Gamma_{33}^2 u^3 = S^{23} \left(\Gamma_{33}^1 u^3 - \Gamma_{44}^1 u^4 \frac{P_3}{P_4} \right). \quad (57)$$

Безпосередніми обчисленнями знаходимо, що всі рівняння (7) задовольняються за необхідних обмежень:

$$r = 3M(1 + \delta_1), \quad 0 < \delta_1 \ll 1, \quad (58)$$

$$\cos \theta = \delta_2, \quad |\delta_2| \ll 1, \quad (59)$$

де малі величини δ_1 і δ_2 пов'язані з величиною ε , означеною в (35), співвідношенням

$$3\delta_1^2 + \delta_2^2 = \varepsilon^2. \quad (60)$$

Із рівнянь (7) отримуємо

$$P^3 = \frac{\sqrt{6}}{18M} \frac{\mu}{\sqrt{\delta_1}}, \quad (61)$$

$$S^{13} = \mu \frac{\sqrt{\delta_1}}{\sqrt{6}}, \quad S^{23} = \frac{\mu \delta_2}{3\sqrt{6}M\sqrt{\delta_1}} \quad (62)$$

(не втрачаючи загальності, покладемо $S^{13} > 0$). З точністю до ε маємо $u^3 = P^3/\mu$, $u^4 = P^4/\mu$, а також

$$(u^3)^2 = \frac{1}{54M^2\delta_1}, \quad (u^4)^2 = \frac{1}{2\delta_1}. \quad (63)$$

Тобто згідно з (58)–(60) неекваторіальні колові орбіти існують лише в малому околі значення $r = 3M$ ($r > 3M$) і під малим кутом $\pi/2 - \theta$. Згідно з (63) швидкість частки на цих орбітах є ультрарелятивістською, а для величини її енергії маємо

$$E = \frac{\mu}{3\sqrt{2}\delta_1}, \quad (64)$$

тобто $E^2/\mu^2 \gg 1$.

Неважко переконатися, що рівняння (1), (2) за умови (3) також допускають існування неекваторіальних колових орбіт частки зі спіном у полі Шварцшільда, для яких справджуються вирази (58)–(64) [4].

III. ВПЛИВ НАХИЛУ СПІНУ ЧАСТКИ НА ЇЇ ВІДХИЛЕННЯ ВІД ЕКВАТОРІАЛЬНОЇ ПЛОЩИНИ

Особливістю часткового розв'язку рівнянь (1)–(3), який описує колову орбіту з $r = 3M$ у площині $\theta = \pi/2$, є те, що він також є розв'язком так званої вкороченої системи рівнянь Матісона–Папапетру, коли замість (1) розглядаються рівняння

$$m \frac{D}{ds} u^\lambda = -\frac{1}{2} u^\pi S^{\rho\sigma} R_{\pi\rho\sigma}^\lambda, \quad (65)$$

тобто коли враховують лише лінійні за спіном члени й умови (3) і (4) практично не відрізняються. З'ясуємо, як згідно з рівняннями (2), (3), (65) змінюється цей розв'язок, якщо початково спін не є ортогональним до площини $\theta = \pi/2$. Система рівнянь (65) для довільно орієнтованого спіну в полі Шварцшільда має вигляд

$$\begin{aligned}
 \dot{u}^1 &= \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} (u^1)^2 + r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (u^2)^2 + r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sin^2 \theta (u^3)^2 \\
 &\quad - \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (u^4)^2 - \frac{3M}{mr^3 \sin \theta} (\sin^2 \theta u^3 S_2 - u^2 S_3), \\
 \dot{u}^2 &= \sin \theta \cos \theta (u^3)^2 - \frac{2}{r} u^1 u^2 - \frac{3M}{mr^3} \sin \theta u^3 S_1, \\
 \dot{u}^3 &= \frac{2}{r} u^1 u^3 - 2 \cot \theta u^2 u^3 + \frac{3M}{mr^3 \sin \theta} u^2 S_1, \\
 \dot{u}^4 &= -\frac{2M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} u^1 u^4 - \frac{3M \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-2} u^1}{mr^3 \sin \theta} (u^3 S_2 \sin^2 \theta - u^2 S_3). \tag{66}
 \end{aligned}$$

Систему (2) за умови (3) зручно записати через 3-вектор спіну у вигляді

$$\begin{aligned}
 \dot{S}_1 &= \frac{2M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} u^1 S_1 + \frac{1}{r} u^2 S_2 + \frac{1}{r} u^3 S_3 + \dot{u}^4 \frac{S_1}{u^4} \\
 &\quad - (S_1 u^1 + S_2 u^2 + S_3 u^3) \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{u}^1 - \dot{u}^4 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{u^1}{u^4} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} (u^1)^2 - r(u^2)^2 - r \sin^2 \theta (u^3)^2 + \frac{M}{r^2} (u^4)^2 \right], \\
 \dot{S}_2 &= -r \left(1 - \frac{3M}{r}\right) u^2 S_1 + \left(\frac{2M}{r^2} \left(1 - \frac{3M}{r}\right)^{-1} + \frac{1}{r} \right) u^1 S_2 \\
 &\quad + \cot \theta u^3 S_3 + \dot{u}^4 \frac{S_2}{u^4} - (S_1 u^1 + S_2 u^2 + S_3 u^3) \left[\dot{u}^2 r^2 - \dot{u}^4 r^2 \frac{u^2}{u^4} \right. \\
 &\quad \left. + u^1 u^2 \left(2r - 2M \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \right) - (u^3)^2 r^2 \cos \theta \sin \theta \right], \\
 \dot{S}_3 &= \left(\frac{2M}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} + \frac{1}{r} \right) u^1 S_3 - r \left(1 - \frac{3M}{r}\right) \sin^2 \theta u^3 S_1 + \cot \theta u^2 S_3 \\
 &\quad - \sin \theta \cos \theta u^3 S_2 - [S_1 u^1 + S_2 u^2 + S_3 u^3] \left[r^2 \sin^2 \theta \dot{u}^3 - r^2 \sin^2 \theta \dot{u}^4 \frac{u^3}{u^4} \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sin^2 \theta \left(r - M \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \right) u^1 u^3 + 2r^2 \sin \theta \cos \theta u^2 u^3 \right] + \frac{S_3}{u^4} \dot{u}^4, \tag{67}
 \end{aligned}$$

де за означенням між компонентами тензора спіну S^{kl} і 3-вектором S_i існує зв'язок [4]

$$S^{kl} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} = \varepsilon^{klm} S_m. \tag{68}$$

Згідно з (1)–(2) вираз для S_0^2 є таким:

$$\begin{aligned}
 S_0^2 &= S_1^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \frac{1 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} (u^1)^2}{(u^4)^2} + S_2^2 r^{-2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-2} \frac{1 + r^2 (u^2)^2}{(u^4)^2} \\
 &\quad + S_3^2 r^{-2} \sin^{-2} \theta \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-2} \frac{1 + r^2 \sin^2 \theta (u^3)^2}{(u^4)^2} + S_1 S_2 \frac{u^1 u^2}{(u^4)^2} 2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-2} \\
 &\quad + S_1 S_3 \frac{u^1 u^3}{(u^4)^2} 2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-2} + S_2 S_3 \frac{u^2 u^3}{(u^4)^2} 2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-2}. \tag{69}
 \end{aligned}$$

Запишімо систему рівнянь (66), (67) та інтеграл (69) у термінах безрозмірних величин

$$\begin{aligned}
 y_1 &\equiv \frac{r}{M}, & y_2 &\equiv \theta, & y_3 &\equiv \varphi, & y_4 &\equiv \frac{t}{M}, & y_5 &\equiv \frac{dr}{ds} \equiv u^1, \\
 y_6 &\equiv M \frac{d\theta}{ds} \equiv M u^2, & y_7 &\equiv M \frac{d\varphi}{ds} \equiv M u^3, & y_8 &\equiv \frac{dt}{ds} \equiv u^4,
 \end{aligned}$$

$$y_9 \equiv \frac{S_1}{mM}, \quad y_{10} \equiv \frac{S_2}{mM^2}, \quad y_{11} \equiv \frac{S_3}{mM^2}, \quad x \equiv \frac{s}{M}, \quad \varepsilon \equiv \frac{S_0}{Mm}. \quad (70)$$

Рівняння (66) запишемо у вигляді системи рівнянь першого порядку:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= y_5, & \frac{dy_2}{dx} &= y_6, & \frac{dy_3}{dx} &= y_7, & \frac{dy_4}{dx} &= y_8, \\ \frac{dy_5}{dx} &= A_1, & \frac{dy_6}{dx} &= A_2, & \frac{dy_7}{dx} &= A_3, & \frac{dy_8}{dx} &= A_4, \\ \frac{dy_9}{dx} &= \frac{2}{y_1^2} \left(1 - \frac{2}{y_1}\right)^{-1} y_5 y_9 + \frac{y_6 y_{10}}{y_1} + \frac{y_7 y_{11}}{y_1} - [y_5 y_9 + y_6 y_{10} + y_7 y_{11}] \left[\left(1 - \frac{2}{y_1}\right)^{-1} A_1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{y_5}{y_8} \left(1 - \frac{2}{y_1}\right)^{-1} A_4 - \frac{3y_5^2}{y_1^2} \left(1 - \frac{2}{y_1}\right)^{-2} - y_1 y_6^2 - y_1 y_7^2 \sin^2 y_2 + \frac{y_8^2}{y_1^2}\right] + \frac{y_9}{y_8} A_4, \\ \frac{dy_{10}}{dx} &= -y_1 y_6 y_9 \left(1 - \frac{3}{y_1}\right) + \frac{y_5 y_{10}}{y_1} \left(\frac{2}{y_1} \left(1 - \frac{2}{y_1}\right)^{-1} + 1\right) + \cot y_2 y_7 y_{11} + \frac{y_{10}}{y_8} A_4 \\ &\quad - [y_5 y_9 + y_6 y_{10} + y_7 y_{11}] \left[y_1^2 A_2 - \frac{y_1^2 y_6}{y_8} A_4 + y_5 y_6 \left(2y_1 - 2 \left(1 - \frac{2}{y_1}\right)^{-1}\right) - y_1^2 y_7^2 \cos y_2 \sin y_2\right], \\ \frac{dy_{11}}{dx} &= \frac{y_5 y_{11}}{y_1} \left(\frac{2}{y_1} \left(1 - \frac{2}{y_1}\right)^{-1} + 1\right) - y_1 y_7 y_9 \left(1 - \frac{3}{y_1}\right) \sin^2 y_2 - y_6 y_{11} \cot y_2 \\ &\quad - y_7 y_{10} \cos y_2 \sin y_2 - [y_5 y_9 + y_6 y_{10} + y_7 y_{11}] \left[y_1^2 \sin^2 y_2 A_3 - \frac{y_1^2 y_7}{y_8} \sin^2 y_2 A_4 \right. \\ &\quad \left. + 2y_5 y_7 \sin^2 y_2 \left(y_1 - \left(1 - \frac{2}{y_1}\right)^{-1}\right) + 2y_1^2 y_6 y_7 \cos y_2 \sin y_2\right] + \frac{y_{11}}{y_8} A_4, \end{aligned} \quad (71)$$

де

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{y_5^2}{y_1^2} \left(1 - \frac{2}{y_1}\right)^{-1} + y_1 y_6^2 \left(1 - \frac{2}{y_1}\right) + \left(1 - \frac{2}{y_1}\right) \left(y_1 y_7^2 \sin^2 y_2 - \frac{y_8^2}{y_1^2}\right) - \frac{3}{y_1^3 \sin y_2} (y_7 y_{10} \sin^2 y_2 - y_6 y_{11}), \\ A_2 &= y_7^2 \cos y_2 \sin y_2 - \frac{2y_5 y_6}{y_1} - \frac{3y_7 y_9}{y_1^3} \sin y_2, \\ A_3 &= -\frac{2y_5 y_7}{y_1} - 2y_6 y_7 \cot y_2 + \frac{3y_6 y_9}{y_1^3 \sin y_2}, \\ A_4 &= -\frac{2y_5 y_8}{y_1^2} \left(1 - \frac{2}{y_1}\right)^{-1} - \frac{3y_5 \left(1 - \frac{2}{y_1}\right)^{-2}}{y_1^3 y_8 \sin y_2} (y_7 y_{10} \sin^2 y_2 - y_6 y_{11}). \end{aligned} \quad (72)$$

Ураховуючи позначення (70), маємо

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= y_9^2 \left(1 - \frac{2}{y_1}\right)^{-1} \frac{1 + \left(1 - \frac{2}{y_1}\right)^{-1} y_5^2}{y_8^2} + y_{10}^2 \left(1 - \frac{2}{y_1}\right)^{-2} \frac{1 + y_1^2 y_6^2}{y_1^2 y_8^2} + y_{11}^2 \left(1 - \frac{2}{y_1}\right)^{-2} \frac{1 + y_1^2 y_7^2 \sin^2 y_2}{y_1^2 y_8^2 \sin^2 y_2} \\ &\quad + y_9 y_{10} \frac{y_5 y_6}{y_8^2} 2 \left(1 - \frac{2}{y_1}\right)^{-2} + y_9 y_{11} \frac{y_5 y_7}{y_8^2} 2 \left(1 - \frac{2}{y_1}\right)^{-2} + y_{10} y_{11} \frac{y_6 y_7}{y_8^2} 2 \left(1 - \frac{2}{y_1}\right)^{-2}. \end{aligned} \quad (73)$$

Систему (71) та вираз (73) використовуватимемо для обчислень на комп'ютері при конкретних початкових значеннях величин (70).

Строго коловим орбітам з $r = 3M$ частки зі спіном, ортогональним до екваторіальної площини у полі Шварцшільда, властиві такі початкові значення величин y_i :

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 3, & y_2(0) &= \frac{\pi}{2}, & y_3(0) &= 0, & y_4(0) &= 0, & y_5(0) &= 0, & y_6(0) &= 0, \\ y_7(0) &= u, & y_8(0) &= v, & y_9(0) &= 0, & y_{10}(0) &= w, & y_{11}(0) &= 0, \end{aligned} \quad (74)$$

де

$$u = -\frac{1}{3\sqrt{2}} \sqrt{-1 + \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + 12}}{\varepsilon}}, \quad v = \sqrt{3} \sqrt{1 + 9u^2}, \quad w = \varepsilon v. \quad (75)$$

Якщо ж початково спін не є ортогональним до площини $\theta = \pi/2$, то відмінними від нуля, згідно з позначеннями (70), можуть бути всі величини y_9, y_{10}, y_{11} . Їхні початкові значення позначимо так:

$$y_9(0) = w_1, \quad y_{10}(0) = w_2, \quad y_{11}(0) = w_3.$$

Початкові значення інших величин y_i залишаємо такими ж, як у (74). Розглядатимемо випадки, коли, незважаючи на зміну початкової орієнтації спіну, його

абсолютна величина фіксована, тобто ε задане. Для величин w_2, w_3 зручно покласти

$$w_2 = \varepsilon v(1 + \alpha), \quad w_3 = \varepsilon \beta, \tag{76}$$

де α і β – параметри, які визначають нахил спіну (при $\alpha = \beta = 0$ нахил відсутній і величина w_2 дорівнює величині w з (74), (75)). Тоді зі співвідношення (73) знаходимо вираз для w_1 :

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + 12}}{\varepsilon}\right) [-3\alpha(2 + \alpha)\varepsilon^2 - \varepsilon^2\beta^2]}. \tag{77}$$

Із простого аналізу співвідношень (76), (77) випливає, що параметри α, β можуть змінюватись у межах

$$|\beta| < \sqrt{3}, \quad -1 - \sqrt{1 - \beta^2/3} < \alpha < -1 + \sqrt{1 - \beta^2/3}, \tag{78}$$

описуючи при цьому всі можливі орієнтації спіну.

Деякі типові графіки, отримані внаслідок інтегрування системи рівнянь (71), подані на рис. 1–5. У всіх випадках $\varepsilon = 10^{-2}$, а параметри α, β є такими: $\alpha = -10^{-6}, \beta = 0$, тобто нахил спіну до площини $\theta = \pi/2$ незначний і зумовлений компонентою спіну S_r , тоді як початково $S_\varphi = 0$. Згідно з рис. 1, 5 частка зі спіном поступово наближається до поверхні горизонту $r = 2M$, однак значно повільніше, ніж частка без спіну з тими ж початковими значеннями координат і швидкості (для порівняння зображені відповідні геодезійні лінії; нагадаємо, що за відсутності нахилу спіну, тобто при $\alpha = 0, \beta = 0$, орбіта частки зі спіном є строго коловою). Геодезійні лінії на рис. 1–3 доведені до моменту досягнення поверхні горизонту. Рис. 4 описує вихід частки з площини $\theta = \pi/2$, зумовлений нахилом спіну. Його особливістю є те, що траєкторія частки зі спіном лягає в іншу площину, яка не перетинає точки з $r = 0$. Тобто проявляється ефект зависання частки над джерелом гравітаційного поля, причому під невеликим кутом $\pi/2 - \theta$. На рис. 6 схематично зображено розташування орбіти частки стосовно площини $\theta = \pi/2$ (горизонтальна лінія) з тим, що реально кут $\pi/2 - \theta$ є значно меншим. Цей результат узгоджується з висновками, описаними в [4] на основі аналізу рівнянь Матісона–Папапетру в полі Шварцшільда про існування зависаючих колових орбіт, при цьому ті з них, для яких r близьке до $3M$, також зависають під малим кутом (на відміну від цих орбіт, зависла орбіта, якій відповідають рис. 1–3, не є строго коловою).

Зазначимо, що при інтегруванні рівнянь (71) проводили оцінки тих членів точних рівнянь Матісона–Папапетру, якими знехтували, обмежуючись укороченими рівняннями (65). Криві на рис. 1–5 подані для інтервалів інтегрування, на яких указані члени, значно менші від збережених членів. Для їх продовження на більші часові необхідно було б

ураховувати точні рівняння Матісона–Папапетру.

Зі збільшенням абсолютної величини параметра α , тобто нахилу спіну до площини $\theta = \pi/2$, за збереження початкових умов (74) і $\beta = 0$ крива $\rho(\tau)$ для частки зі спіном наближається до аналогічної кривої для частки без спіну, зображеної на рис. 1. У граничному випадку $\alpha = -1$, коли початково $S_\theta = 0$, обидві криві збігаються. Також із збільшенням абсолютної величини α зростає амплітуда коливань кривої $\theta(\tau)$ (див. рис. 4), а з нею і кут зависання частки зі спіном над джерелом поля. Однак цей кут залишається малим навіть при $\alpha = -1$.

Ми не подаємо графіків залежності компонент вектора спіну від часу, оскільки на вибраному часовому інтервалі вони змінюються мало.

Якщо при інтегруванні рівнянь (71) з початковими умовами (74) покласти $\alpha = 0, \beta \neq 0$, тобто початково $S_r = 0, S_\varphi \neq 0$, то частка зі спіном не виходить з екваторіальної площини.

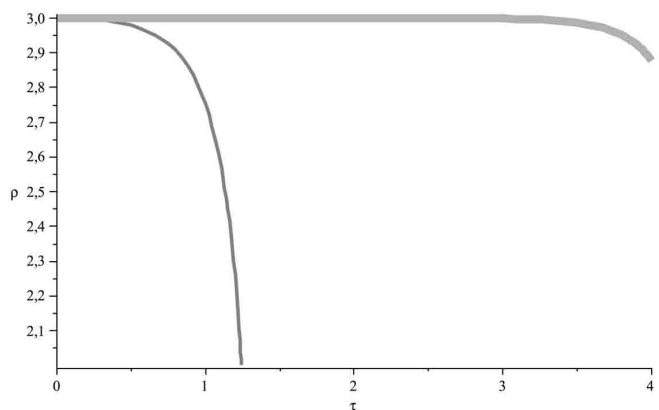


Рис. 1. Залежність $\rho \equiv r/M$ від $\tau \equiv s/M$ для частки зі спіном (товста лінія) і частки без спіну (тонка лінія).

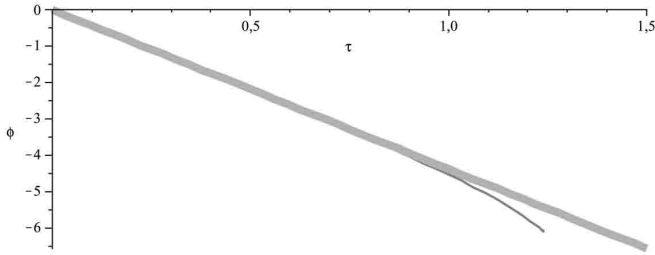


Рис. 2. Залежність кутової координати від τ для частки зі спіном (товста лінія) і частки без спіну (тонка лінія).

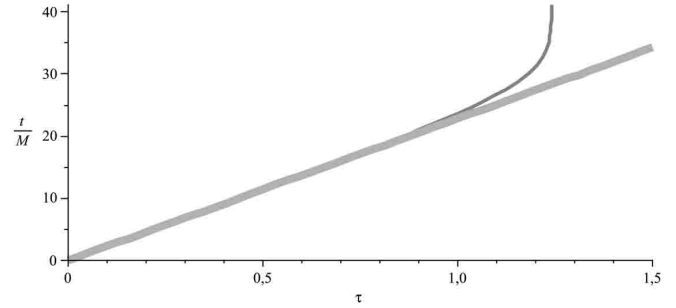


Рис. 3. Залежність t/M від τ для частки зі спіном (товста лінія) і частки без спіну (тонка лінія).

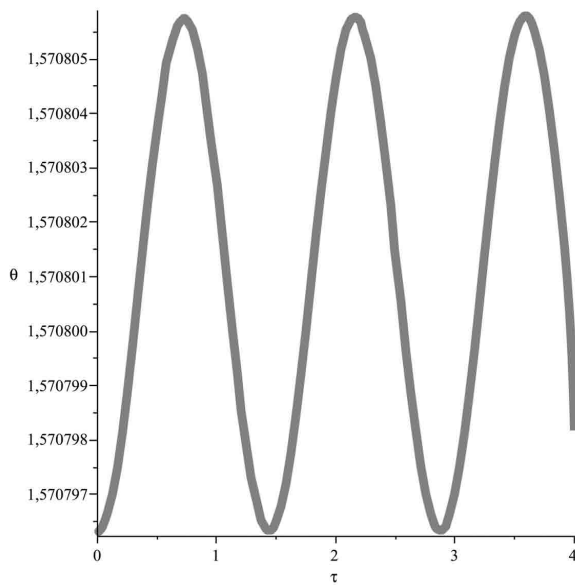


Рис. 4. Залежність кута θ від τ для частки зі спіном.

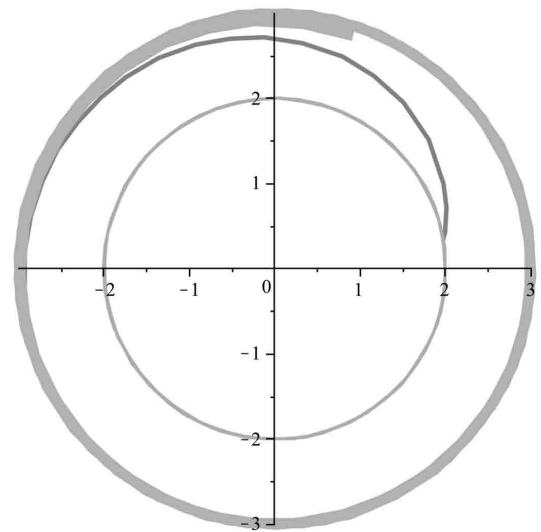


Рис. 5. Траєкторії частки зі спіном (товста лінія) і частки без спіну (тонка лінія). Коло радіуса 2 відповідає поверхні горизонту.

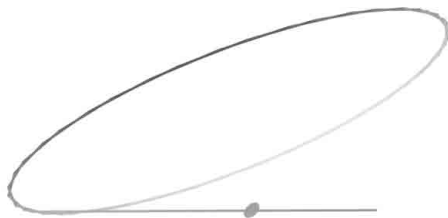


Рис. 6. Схематичне зображення відхилення траєкторії частки зі спіном від екваторіальної площини. Темна пляма вказує на розташування шварцшільдівського джерела.

IV. ВИСНОВКИ

Конкретну ситуацію, коли гіпотетично міг би проявитись ефект значного гравітаційного відштовхування, зумовлений наявністю у пробної частки

внутрішнього обертання, імовірно, уперше аналізували в [11]. З'ясувалось, чи може частка зі спіном бути нерухомою відносно джерела поля Керра, зависнувши на осі його обертання. Показано, що рівняння Матісона–Папапетру такої можливості не допускають. З урахуванням результатів інших досліджень цей негативний результат цілком зрозумілий, оскільки виявилось, що необхідною умовою суттєвого зростання впливу взаємодії спіну з кривиною простору-часу на траєкторію частки є близькість її швидкості відносно джерела поля до швидкості світла. Тобто статичне зависання неможливе. Однак, згідно з [28], рівняння Матісона–Папапетру з доповняльною умовою (3) допускають ефект динамічного зависання частки зі спіном у полі Шварцшільда, коли вона рухається по ультрарелятивістській коловій орбіті з $\theta \neq \pi/2$ (пізніше цей результат був узагальнений для поля Керра [29], повніший аналіз проведено в [4]).

Результати, викладені в розділах 2 і 3 цієї статті, показують, що ефекти значного гравітаційного відштовхування для частки зі спіном проявляються не

лише за умови (3), але й за умови (4). При цьому для колових орбіт з малого околу значення $r = 1,5r_g$ ($r_g = 2M$ — шварцшільдівський радіус горизонту) або близькі до них відповідні розв'язки рівнянь Матісона–Папаетру за умов (3) і (4) практично збігаються. Відповідно до числових оцінок, поданих у [17, 27], для реалізації рухів електронів і протонів по вказаних орбітах вони повинні мати ультрарелятивістські швидкості, які відповідають їхнім енергіям вільного руху відповідно порядку $E_e = 10^{14}$ еВ і $E_p = 7 \times 10^{18}$ еВ, якщо маса шварцшільдівського джерела становить три маси Сонця і $E_e = 5 \times 10^{16}$ еВ та $E_p = 3 \times 10^{21}$ еВ

для шварцшільдівської маси порядку 10^6 маси Сонця. Такі швидкості властиві високоенергетичним часткам із складу космічних променів. Подальший аналіз процесів поблизу конкретних джерел гравітаційного поля (чорних дір, ядер галактик) дасть змогу з'ясувати можливу роль ефектів гравітаційного відштовхування, зумовлених наявністю в часток спіну. Зокрема необхідно дослідити, чи можуть ці ефекти впливати на формування джетів.

Робота частково підтримана Програмою НАН України “Космомікрофізика”.

-
- [1] M. Mathisson, Acta Phys. Pol. **6**, 163 (1937).
 - [2] A. Papapetrou, Proc. R. Soc. A. **209**, 248 (1951); E. Corinaldesi, Proc. R. Soc. A. **209**, 258 (1951).
 - [3] L. Schiff, Phys. Rev. Lett. **4**, 219 (1960).
 - [4] Р. М. Пляцко, *Прояви гравітаційної ультрарелятивістської спин-орбітальної взаємодії* (Наук. думка, Київ, 1988).
 - [5] R. Plyatsko, Phys. Rev. D **58**, 084031 (1998).
 - [6] К. Меллер, *Теория относительности* (Атомиздат, Москва, 1975).
 - [7] J. Frenkel, Z. für Phys. **37**, 243 (1926).
 - [8] F. Pirani, Acta Phys. Pol. **15**, 389 (1956).
 - [9] W. Tulczyjew, Acta Phys. Pol. **18**, 393 (1959).
 - [10] W. Dixon, Proc. R. Soc. A **314**, 499 (1970).
 - [11] R. Wald, Phys. Rev. D **6**, 406 (1972).
 - [12] M. Mathisson, Acta Phys. Pol. **6**, 218 (1937).
 - [13] J. Weyssenhoff, A. Raabe, Acta. Phys. Pol. **9**, 7 (1947).
 - [14] C. Möller, Commun. Dublin Inst. Advan. Stud. A **5**, 3 (1949).
 - [15] V. M. Barker, R. F. O'Connell, Gen. Rel. Grav. **4**, 193 (1973).
 - [16] А. Н. Александров, Кинем. физ. небес. тел **7**, 13 (1991).
 - [17] R. Plyatsko, Class. Quantum Grav. **22**, 1545 (2005).
 - [18] R. Plyatsko, O. Stefanyshyn, Acta Phys. Pol. B **39**, 23 (2008).
 - [19] R. Plyatsko, Acta Phys. Pol. B. Proc. Suppl. **1**, 173 (2008).
 - [20] K. Tod, F. de Felice, Nuovo Cimento B **34**, 365 (1976).
 - [21] S. Suzuki, K. Maeda, Phys. Rev. D **55**, 4848 (1996).
 - [22] O. Semerak, Mon. Not. R. Astron. Soc. D **308**, 863 (1999).
 - [23] M. D. Hartl, Phys. Rev. D **67**, 024005 (2003).
 - [24] J.-K. Kao, H. T. Cho, Phys. Lett. A **336**, 159 (2005).
 - [25] B. Mashhoon, D. Singh, Phys. Rev. D **74**, 124006 (2006).
 - [26] D. Singh, Gen. Relativ. Gravit. **40**, 1179 (2008).
 - [27] R. Plyatsko, O. Bilaniuk, Class. Quantum Grav. **18**, 5187 (2001).
 - [28] Р. М. Пляцко, препринт ИФ АН БССР №158 (Минск, 1978).
 - [29] Р. М. Пляцко, А. Л. Винар, Докл. Акад. наук СССР **263**, 1125 (1982).

GRAVITATIONAL REPULSION FOR SPINNING PARTICLES IN A SCHWARZSCHILD FIELD

R. M. Plyatsko, O. B. Stefanyshyn
*Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics
of the National Academy of Sciences of Ukraine
3-b Naukova St., Lviv, 79060, Ukraine*

The effects of the gravitational repulsion in the cases of solutions of the Mathisson–Papapetrou equations which describe the circular or close to circular orbits in the small region of the value $r = 3M$ in a Schwarzschild field are considered. It is shown that these effects follow from the Mathisson–Papapetrou equations both at the Frenkel–Mathisson and Tulczyjew–Dixon conditions. Attention is also paid to the possibilities of manifestations of the gravitational repulsion in some astrophysical phenomena.