DOI: https://doi.org/10.36910/6775-2524-0560-2023-50-13
УДК 531.011
Пастернак Роман Михайлович, к. ф.-м. н., доцент
https://orcid.org/0000-0001-9668-9161
Луцький національний технічний університет, м.Луцьк, Україна

РЕЛЯТИВІСТСЬКІ РІВНЯННЯ РУХУ В ПОТЕНЦІАЛЬНОМУ СИЛОВОМУ ПОЛІ

Пастернак Р. М. Релятивістські рівняння руху в потенціальному силовому полі. На прикладі задачі про зсув перицентра планет проведено верифікацію альтернативного апарату релятивістської корпускулярної механіки в евклідовому 4-просторі та закону Всесвітнього тяжіння. Показано, що в межах Сонячної системи закон обернених квадратів у законі тяжіння виконується. Виконаний апаратом корпускулярної релятивістської механіки в 4-просторі аналіз впливів гравітаційних та кінематичних змін маси тіла показав збіги результатів розрахунку з даними астрономічних спостережень.
Ключові слова: закон тяжіння, зсув перигелію, релятивістська механіка.

Pasternak R. M. Relativistic equations of motion in a potential force field. The verification of the alternative apparatus of relativistic corpuscular mechanics in Euclidean 4 space and the law of universal gravitation was carried out on the example of the problem of the shift of the pericenter of the planets. It is shown that within the solar system, the law of inverse squares in the law of gravitation is fulfilled. The analysis of the effects of gravitational and kinematic changes in body mass performed by the apparatus of corpuscular relativistic mechanics in 4th space showed the coincidence of the calculation results with the data of astronomical observations.
Key words: law of gravity, perihelion shift, relativistic mechanics

Постановка завдання. У. Левер'є виявив, що орбітальний рух Меркурія не підкоряється законам небесної механіки [1] – спостережуваний просторовий зсув перигелію Меркурія в 570" за століття небесна механіка пояснювала лише частково [1]. Існувало декілька можливих причин виникнення розбіжностей: 1) у законі тяжіння не виконується закон обернених квадратів; 2) рівняння руху недосконалі; 3) існують неспостережувані об'єкти на внутрішніх орбітах Сонячної системи.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Нев'язку зсуву в 43" за століття згодом було пояснено в рамках польової загальної теорії відносності (ЗТВ) на основі принципу А. Айнштайна [2] еквівалентності маси та енергії. Хоча впливів неспостережуваних небесних тіл не виявлено, ЗТВ не давала відповіді на перші два питання, – розрахунок зсуву перигелію засобами релятивістської корпускулярної механіки частинок у просторі-часі пояснював лише третину нев'язки [1]. У [3] запропоновано альтернативний апарат релятивістської корпускулярної механіки змінної маси в евклідовому 4-просторі, де поняття еквівалентності маси та енергії лежить а його основі, – появилась реальна можливість перевірити як валідність рівняння руху релятивістської корпускулярної механіки в просторі-часі [1] так і сам закон обернених квадратів І. Ньютона.

Метою роботи є верифікація запропонованого в [3] альтернативного апарату релятивістської механіки та закону Всесвітнього тяжіння [1] на прикладі задачі про швидкість зсуву перигелію Меркурія.

Виклад основного матеріалу містить три розділи: кінематична та гравітаційна маси тіла, енергія зв'язку та розділ тестування.

1. Потенціальна енергія. Кінематична та гравітаційна маси тіла

1.1. Сила Всесвітнього тяжіння. Відповідно до формули І. Ньютона сила $\vec{f}_N$ тяжіння сферично-симетричних тіл з масами M та m дорівнює [1]:

$$\vec{f}_N = m\vec{g}_N \text{, де } \vec{g}_N = -\frac{GM}{r^3}\vec{r}\,. \quad (1)$$

Тут $\vec{g}_N$ – напруженість гравітаційного поля, що створюється тілом масою M, G – гравітаційна стала, а $\vec{r}$ – радіус-вектор пробного тіла масою m із центру гравітаційних сил. Для зручності викладу запишемо формулу напруженості гравітаційного поля тіла масою M у геометричному представленні

$$\vec{g}_N = -\frac{c^2 r_G}{2r^3}\vec{r}\,, \quad (2)$$

де $r_G = 2GM/c^2$ – гравітаційний радіус тіла масою M, а c – швидкість світла у вакуумі [2].

1.2. Кінематична та гравітаційна маси тіла. Системи відліку в гравітаційному полі неінерційні [2], тому проводити в них аналіз взаємодії тіл стандартними методами релятивістської механіки [1] неможливо. Перш ніж вирішувати поставлене в назві роботи завдання, розглянемо ряд допоміжних задач в інерційній системі відліку.

Нехай у просторі без гравітаційного поля діє сила $\vec{f} = \vec{f}_N$ (позначення r_G тут використано формально, лише для характеристики сили). Розглянемо одновимірну задачу падіння пробного точкового тіла масою m з нескінченності на центр сили f. Відповідно до формули Ж. Понселе [1], з урахуванням принципу еквівалентності маси та енергії $E = c^2 m$ [2], запишемо:

$$dE = (\vec{f}, d\vec{r}) = -c^2 m \frac{r_G}{2r^2} dr = -E \frac{r_G}{2r^2} dr \,. \tag{3}$$

Інтегруючи (3) частинами за початкової умови, коли $r \to \infty$ то $E \to E_0 = c^2 m_0$, де E_0 та m_0 – відповідно енергія та маса спокою пробного тіла, отримуємо приріст енергії E_G:

$$\Delta E_G = E_0 \left(\exp\left(\frac{r_G}{2r} \right) - 1 \right). \tag{4}$$

У релятивістській механіці змінної маси [3] прийнято вважати, що вся надана тілу (силою f) енергія йде лише на зміну кінетичної енергії: $\Delta E_G = E_K(\upsilon) = E_0(\gamma - 1)$, де $\gamma(\upsilon) = (1-\beta^2)^{-2}$ – Лоренц-фактор [3], а $\beta = \upsilon / c$ – зведена до швидкості c світла у вакуумі швидкість υ поступального руху пробного тіла. Відповідно, можна записати кінематичну масу $m(\upsilon) = m_0 \gamma$ пробного тіла, що залежать від швидкості руху в полі сили f [3].

1.3. Потенціальна енергія в релятивістській механіці. Обчислимо роботу A з переміщення пробного тіла з точки простору r на ∞ проти сили f зі швидкістю $\upsilon \to 0$ (при нульовій кінетичній енергії). У цьому випадку вся робота A буде $A = E_0(\exp(r_G/(2r) - 1)$, для якої введемо формальне поняття потенціальної енергії, тобто змін гравітаційної енергії пробного тіла в полі сили f, яка буде залежати від r: $E_G(r) = E_0(\exp(r_G/(2r)) - 1)$. Відповідно, можна ввести поняття гравітаційної маси $m_G(r) = m_0 \exp(r_G/(2r)$ пробного тіла. (Маса – скалярна характеристика тіла, що пропорційна його енергії, а умовний поділ її змін на гравітаційну та кінематичну вказує лише на конкретний спосіб цих змін.)

1.4. Двовимірний рух. Зміну енергії пробного тіла в цілому можна визначити за формулою (4). Однак розглянуті варіанти не дають можливості визначити пропорцію розподілу енергії тіла між кінетичною та гравітаційною. У класичному випадку є можливість встановити цей розподіл для колового руху пробного тіла. Так, прирівнюючи відцентрову та доцентрову сили, отримуємо:

$$m_0 \frac{\upsilon_C^2}{r_C} = E_0 \frac{\beta_C^2}{r_C} = E_0 \frac{r_G}{2r_C^2} \,. \tag{5}$$

Із (5) видно, що $\beta_C^2 = r_G/(2r_C)$, тобто кінетична буде $E_K = E_0 \beta_C^2 / 4$, а потенціальна $E_G = E_0 r_G / (4r_C)$. Видно, що кінетична та потенціальна енергії пробного тіла на коловій орбіті однакові.

2. Енергія зв'язку

Аналогічно до підходу класичної механіки для кожної точки простору, де діє створена масою M сила f_N, введемо поняття енергії E_B гравітаційного зв'язку двох тіл, як різницю кінетичної та потенціальної енергій пробного тіла: $E_B = E_K - E_P$. У даному випадку, коли тіло масою m потрапляє в силове поле на нескінченній відстані від його центра сили з нульовою кінетичною енергією, енергія зв'язку $E_B = 0$. У загальному випадку кінетична енергія пробного тіла може бути довільною, тому $E_B \neq 0$.

2.1. Класичний підхід. У небесній механіці енергія зв'язку в системі двох тіл, де діє сила $f = f_N$ дорівнює: [1]:

$$E_B = E_0\left(\frac{\beta^2}{2} - \frac{r_G}{2r}\right) = E_0 Z_B . \tag{6}$$

Тут Z_B – зведена (питома) енергія зв’язку. Перетворивши вираз для Z_B до однієї змінної, для еліптичної орбіти отримуємо $Z_B = -r_G/(4\langle r\rangle)$, де $\langle r \rangle$ – усереднене значення r за період T обертання пробної маси по орбіті. Тут $\langle r\rangle^2 = a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}$, де a – довжина його великої півосі, а ε – ексцентриситет еліпса [1]. Характер траєкторії пробної частинки визначає знак питомої енергії зв’язку Z_B: при $Z_B > 0$ її траєкторія описуватиме гіперболу, при $Z_B = 0$ – параболу, а при $Z_B < 0$ – еліпс [1].

2.2. Релятивістський підхід. У релятивістській механіці

$$E_B = E_0(\gamma - 1) - E_0\left(\exp\left(\frac{r_G}{2r}\right) - 1\right) = E_0\left(\gamma - \exp\left(\frac{r_G}{2r}\right)\right) = E_0 Z_{BR} = const . \tag{7}$$

Тут $Z_{BR} = \gamma - \exp(r_G/(2r))$. При $r >> r_G$, що для планет виконується завжди (наприклад, для Землі r_G на 9 порядків менше її розміру), враховуючи лінійне наближення розкладу величини енергії зв’язку в ряд, у першому наближенні отримуємо: $\gamma \approx 1 + \beta^2/2$, а $\exp(r_G/(2r)) \approx 1 + r_G/(2r)$. Отже, в лінійному наближенні вираз (7) практично збігається з виразом (6), тому вважатимемо, що в релятивістській механіці $Z_{BR} \approx Z_B = -r_G/(4\langle r\rangle)$.

2.3. Релятивістські поправки для орбіти Меркурія. Обчислимо гравітаційну та кінематичну поправки до енергій пробного тіла на орбіті Меркурія з параметрами:

- гравітаційний радіус Сонця $r_G = 2{,}95$ км;
- середня орбітальна швидкість $\langle \upsilon \rangle =$ 47,87 км/с;
- велика піввісь Меркурія $a = 5{,}79 \cdot 10^7$ км;
- ексцентриситет Меркурія $\varepsilon = 0{,}206$;
- період обертання навколо Сонця $T = 87{,}969$ земних діб ($2{,}78 \cdot 10^9$ с).
- Відповідно до наведених значень:
- питома кінетична енергія тіла $\dfrac{E_K}{E_0} = \left(1-\beta^2\right)^{-2} - 1 \approx \dfrac{1}{2}\beta^2 = \dfrac{2{,}55}{2}\cdot 10^{-8}$,
- питома потенціальна енергія тіла $\dfrac{E_P}{E_0} = \exp\left(\dfrac{r_G}{2\langle r\rangle}\right) - 1 \approx \dfrac{r_G}{2(r)} = 2{,}56 \cdot 10^{-8}$;
- питома енергія зв’язку $Z_B = \dfrac{E_K(\upsilon) - E_P(r)}{E_0} = -\dfrac{2{,}55}{2}10^{-8}$.

3. Тестування підходу з гравітаційною масою

У [4], відповідно до закону збереження енергії, запропоновано ввести у формулі (2) для напруженості гравітаційного поля релятивістську поправку на гравітаційну масу тіла $m_G(r) = m\exp(r_G/(2r))$

$$\vec{g}_G = \vec{g}_N \exp\left(\frac{r_G}{2r}\right). \tag{8}$$

Корекція (8) для виразу (2) суто технічна, і зовсім не ставить під сумнів закон обернених квадратів І. Ньютона.

Як показує аналіз, при незмінній масі пробного тіла еліптичні траєкторії є стійкими. У релятивістському випадку, з рівняння руху [1]

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\vec{g}_G - \frac{m}{c^2}\left(\vec{g}_G, \vec{\upsilon}\right)\vec{\upsilon} , \tag{9}$$

коли кінематична маса пробного тіла [3] залежить від швидкості руху, уся еліптична траєкторія буде повертатися в часі [1]. Другий доданок носить суто релятивістський характер і призводить до появи у замкненій системі моменту сили (його компенсує момент сили, що діє на іншу масу). Розглянемо окремо вплив першого та другого доданка правої частини релятивістського рівняння (9) на швидкість зсуву перицентра її орбіти.

3.1 Вплив першого доданка при $\vec{g} = \vec{g}_N$. Рівняння руху тіла

$$m_0 \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m_0 \vec{g}_N = -m_0 \frac{c^2 r_G}{2r^3} \vec{r} \tag{10}$$

в полярній системі координат має вигляд [1]

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \omega^2 r = -\frac{c^2 r_G}{r^2} . \tag{11}$$

Розв'язком (11) буде еліптична траєкторія, для якої виконується умова [1]: $r^2\omega = Z_0 = const$. Для середніх значень $\langle r \rangle$ та $\langle \omega \rangle = 2\pi / T$, де T – період обертання пробного тіла навколо центра сили, отримаємо зведений до одиниці маси пробного тіла момент імпульсу пробного тіла: $Z_0 = 2\pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2} / T$ (на орбіті Меркурія $Z_0 = 7,6 \cdot 10^{12}$ м^2/с).

3.2 Вплив першого доданка при $\vec{g} = \vec{g}_G$. Рівняння руху буде:

$$m \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = m\vec{g}_G = -m \frac{c^2 r_G}{2r^3} \exp\left(\frac{r_G}{2r}\right) \vec{r} . \tag{12}$$

Оскільки для напруженості $\vec{g}_G$ порушується закон обернених квадратів, орбіта пробного тіла не буде замкнутою. Для випадку $r >> r_G$, провівши лінеаризацію експоненти $\exp(r_G /(2r)) \approx 1 + r_G /(2r)$, а аналогічно до (11) запишемо рівняння (12) в полярних координатах:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \omega^2 r = -\frac{r_G c^2}{r^2}\left(1 + \frac{r_0}{2r}\right). \tag{13}$$

Розв'язок (13) буде накладанням двох рухів: замкненої еліптичної орбіти з умовою $r^2\omega = Z_0 = const$, та повороту осей еліптичної орбіти з циклічною частотою:

$$\omega'_G = \frac{r_G}{2r} \omega . \tag{14}$$

Середня циклічна частота $\langle \omega'_R \rangle$ повертання перицентра орбіти для середніх значень $\langle r \rangle$ та $\langle \omega \rangle$ складе $\langle \omega'_R \rangle = \dfrac{r_G}{2\langle r \rangle} \dfrac{2\pi}{T}$. За період T відбудеться зсув перицентра орбіти пробного тіла на кут:

$$\delta\varphi_R = \frac{\pi r_G}{a}\left(1-\varepsilon^2\right)^{-4} = 1,6 \cdot 10^{-7} \text{ рад.} \tag{15}$$

За 100 років перицентр орбіти Меркурія її зміститься на кут 13,6″, що втричі менше спостережуваної величини [1].

3.3. Момент сили. Перемноживши (11) векторно зліва на $\vec{r}$, виключимо з розгляду перший доданок у формулі (9). У результаті отримуємо вектор релятивістського моменту сили $\vec{M}_R$, що діє на пробну масу

$$\vec{M}_R = m\left[\ \vec{r} \times \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\ \right] = -\frac{m}{c^2}\left(\ \vec{g}_G, \vec{\upsilon}\ \right)\left[\ \vec{r} \times \vec{\upsilon}\ \right]. \tag{16}$$

Порівняємо вплив $\vec{M}_R$ на швидкість повертання перигелію орбіти при різних значеннях напруженості гравітаційного поля.

3.4. Вплив другого доданка при $\vec{g} = \vec{g}_N$. Запишемо (16) у циліндричній системі координат

$$\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt} + \frac{2}{r}\left(1 + \frac{r_G}{2r}\right)\frac{dr}{dt} = 0 , \tag{17}$$

розв'язком якого є вираз

$$r^2 \omega \exp\left(\frac{r_G}{2r}\right) = Z_2 = const . \tag{18}$$

Лінеаризуючи $\exp(r_G/(2r)) \approx 1 + r_G/(2r)$, отримаємо розв’язок, що є еліпсом, який повертається. Якщо для нерухомого еліпса виконується умова $r^2\omega = Z_0 = const$, то поворот осей еліптичної орбіти відбувається з циклічною частотою:

$$\omega'_{RN} = \frac{r_G}{2r}\omega\,. \qquad (19)$$

3.5. Вплив другого доданка при $\vec{g} = \vec{g}_G$. Запишемо момент сили (16) для $\vec{g} = \vec{g}_G$, звідки отримаємо вираз

$$r^2\omega\exp\left(\frac{r_G}{r}\right) = Z_2 = const\,, \qquad (20)$$

що дає середню швидкість повертання перицентра орбіти:

$$\langle\omega'_{RG}\rangle = \frac{r_G}{2\langle r\rangle}\langle\omega\rangle\,. \qquad (21)$$

Отже, сумарний вплив першого та другого доданка у рівнянні руху (9) дають середню циклічну частоту повертання перицентра орбіти

$$\langle\omega'\rangle = \frac{3r_G}{2\langle r\rangle}\langle\omega\rangle\,, \qquad (22)$$

де відношення усереднених частот дорівнює $\langle\omega'\rangle/\langle\omega\rangle = 1{,}5r_G/(\langle r\rangle)$, що для Меркурія відповідає зсуву перигелію на 40,8" за століття. Отже, в межах зроблених припущень, отриманий результат близький до астрономічних вимірів. У [4] показано, що крім орбітально-орбітальної взаємодії планет існує також власна орбітально-обертальна взаємодія, що для Меркурія дає зсув перигелію 0″,4 за століття.

Висновки Показано, що при послідовному дотриманні законів збереження та врахуванні ефекту гравітаційних змін маси тала не існує жодних обмежень на використання альтернативного апарату релятивістської корпускулярної для аналізу руху планет. Підтверджено виконання закону обернених квадратів у законі Ньютона Всесвітнього тяжіння.

Список бібліографічного опису

1. Роузвер, Н.Т. Перигелий Меркурия. От Леверье до Эйнштейна – М.: Мир, 1985. 504 с.
2. Фок, В.А. Теория пространства, времени и тяготения – М.: Физматгиз, 1955.– 504 с.
3. Pasternak R. Means of the restrictions elimination of the space-time apparatus in relativistic mechanics. *Вісник ТНТУ*, № 1 (89), 2018, с. 64-71.
4. Пастернак Р., Пастернак М. Фактори, що впливають на швидкість повертання перицентра планет. *Вісник ТНТУ*, № 3 (67), 2012, с.75-81.

References

1. Rouzver, N.T. Peryhelyi Merkuryia. Ot Levere do Эinshteina – M.: Myr, 1985. 504 s.
2. Fok, V.A. Teoryia prostranstva, vremeny y tiahotenyia – M.: Fyzmathyz, 1955.– 504 s.
3. Pasternak R. Means of the restrictions elimination of the space-time apparatus in relativistic mechanics. Visnyk TNTU, № 1 (89), 2018, s. 64-71.
4. Pasternak R., Pasternak M. Faktory, shcho vplyvaiut na shvydkist povertannia perytsentra planet. Visnyk TNTU, № 3 (67), 2012, s.75-81.