УДК 371.314.6:004.021

МІЖПРЕДМЕТНІ ПРОЕКТНО-ДОСЛІДНИЦЬКІ ЗАВДАННЯ

Зеленяк Олег Петрович,
вчитель математики та інформатики Олександрійського колегіуму, кандидат педагогічних наук, Заслужений вчитель України.

Анотація. Наведені авторські завдання для організації міжпредметної проектно-дослідницької діяльності учнів, проведення інтегрованих уроків у спеціалізованих класах. Доведено, що в інформатиці графічні побудови сприяють наочній демонстрації і неформальному засвоєнню циклів, процедур, структур даних. у математиці — аналізу геометричних конфігурацій, дослідженню функцій, розв'язуванню задач з параметрами.

Ключові слова: міжпредмерна проектно-дослідницька діяльність, комп'ютер, алгоритм, моделювання, обчислювальний експеримент, Turbo Pascal.

Міжпредметний підхід до навчання у шкільній освіті є актуальним і активно пропагується в прогресивній педагогіці [5]. Підтримується й прагнення до широкомасштабного використання інформаційно-комунікаційних технологій і засобів навчання.

Майбутня професійна діяльність випускників буде пов'язана з комп'ютерами, різноманітними мобільними пристроями, хмарними технологіями. За допомогою цих інструментів вони будуть розв'язувати новітні проблеми науки і виробництва, досліджувати світ наночасток, користуватись електронними бібліотеками, планувати й керувати.

Комп'ютер як універсальний інструмент не може бути ізольованим від іншого універсального інструмента й універсальної мови — математики. Застосування комп'ютера на уроках математики — невід'ємна складова глобального процесу інформатизації освіти [1–4]. З позицій системного підходу ця проблема повинна всебічно досліджуватися, розвиватися і вирішуватися, незважаючи на стрімкий і невпинний розвиток ІКТ. Переконані, що *технологічна складова вже практично не впливає на застосування комп'ютера на уроках математики* [4].

У цій статті наведемо *авторські завдання для організації міжпредметної проектно-дослідницької діяльності учнів, проведення інтегрованих уроків у спеціалізованих класах і т. п.* [1].

Відібрані завдання рекомендуємо застосовувати для спільної (групової, командної) роботи учнів, продуктивної взаємодії, у процесі якої ідеї народжуються шляхом аналізу, обговорення та дискусій, а навчання відбувається у співпраці. Маючи значний досвід проведення математичних боїв, які розвивають мову, уміння знаходити аргументацію, радимо також різні форми групових інтелектуальних ігор і змагань.

Педагогічні спостереження переконливо свідчать, що нині навички колективної діяльності учнів є необхідними. Більшість з них не читає книжок, не вміє і не бажає озвучити виконану дію, запам'ятовує все про гаджети, але не запам'ятовує формули, нестримно грає в електронні ігри, гортає інформацію, не аналізуючи її, «гуглить» з будь-якого приводу. Вважаємо, що ця реальність сучасної школи — найширше поле діяльності для численних інститутів відповідних профілів.

Якими мають бути проекти? На нашу думку — міжпредметними, дослідницькими, науковими, розвивальними і, водночас, доступними та цікавими для учнів. Проекти з краєзнавства, охорони праці, екології важливі, але не можна обмежуватись тільки ними.

«Выхолощенное и формализованное преподавание математики на всех уровнях сделалось, к несчастью, системой. Выросли целые поколения профессиональных математиков и преподавателей математики, умеющих только это и не представляющих себе возможности какого-либо другого преподавания математики... Мягкое моделирование требует гармоничной работы обоих полушарий мозга» (В. И. Арнольд).

Отже, ще одна характерна ознака завдань полягатиме в їх зв'язку з графічними побудовами, геометричними перетвореннями, графіками функцій. Процес розв'язування таких вправ — моделювання з елементами дослідження. В інформатиці графічні побудови сприяють наочній демонстрації і неформальному засвоєнню циклів, процедур, структур даних, у математиці — аналізу геометричних конфігурацій, дослідженню функцій, розв'язуванню задач з параметрами тощо.

Принагідно зазначимо, що завдання з параметром №34 на ЗНО-2104 з математики, яке вимагало саме функціонально-графічної культури, розв'язали тільки 73 випускники, що складає 0,05% від загальної кількості тих, що виконали тест.

Через обмежений розмір у статті наводяться кінцеві раціональні алгоритми (коментарі є лише у п'ятому завданні) й окремі програми, написані в середовищі ***Turbo Pascal***. Для створення моделей динамічних геометричних конфігурацій і їх дослідження застосовується середовище ***GeoGebra***, яке з урахуванням термінології шкільних і вузівських підручників локалізоване майже на 60 мов, *вільно розповсюджується і постійно вдосконалюється*. Міжнародний інститут GeoGebra (IGI) об'єднує інститути, створені по всьому світу (http://www.geogebra.org/igi), надає програму і поточну інформацію, довідкові та навчальні матеріали, проводить семінари і конференції, залучає вчителів і учнів для роботи з цим багатофункціональним потужним середовищем.

Пошук алгоритмів у перших чотирьох завданнях — це, скоріше, бліц-проекти, а програмування за створеними алгоритмами і наступні завдання — триваліші проекти.

Алгоритми і структури даних передують кодуванню. Отже, вкрай важливо навчати учнів ідей та прийомів створення алгоритмів, пошуку раціональних і запам'ятовуванню базисних.

Задача 1. Фірмовий знак Acer

Алгоритм. Даний унікальний ідентифікаційний графічний елемент (рис. 1) складається з ромба одного кольору і трьох рівних йому ромбів іншого кольору. Для побудови зображення одного ромба раціонально створити процедуру з формальними параметрами x, y (декартові координати початкової точки, наприклад, однієї з вершин ромба) і c (код відповідного кольору заливки).

Задача 2. Фірмовий знак Western Digital

Зображення на рис. 2 тривалий час було фірмовим знаком для Western Digital.

Нехай n=3, де n — кількість рівновіддалених квадратів у першому рядку. Алгоритмічна задача полягає в тому, щоб побудувати оригінальне зображення та аналогічні йому при n=4, ..., 40 за універсальним алгоритмом. На рис. 3 зображення, яке одержане при n=15.

***Алгоритм* (*осьова симетрія*).** Назвемо базисною фігуру, що складається з двох квадратів, з'єднаних полосою-стрілкою. Тоді фірмовий знак складатиметься з однієї найбільшої та ще n−1 пари базисних фігур (двох і чотирнадцяти пар відповідно на рис. 2 і рис. 3), у яких вони симетричні відносно прямої, що проходить через центри квадратів і рівні між собою.

Отже, враховуючи осьову симетрію, раціонально створити процедуру для зображення базисних фігур парами. Формальними параметрами можуть бути координати вершин або центрів квадратів у парах і відстань між центрами квадратів однієї фігури, яка зменшується з кожним викликом процедури в циклі. В останній парі ця відстань дорівнює 0, квадрати збігаються.

Задача 3. Створити різні алгоритми зображення фігури (рис. 4)

Фігура складається з кільця і 8 стрілок, що розбивають його на 8 рівних частин, які назвемо базисними. Периферія базисної частини — дві стрілки і дві дуги.

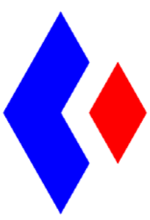

Рис. 1

Рис. 2

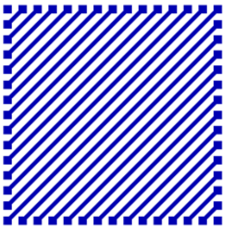

Рис. 3

На рис. 4–6 використано два кольори, у програмі — вісім. Ми багато разів пропонували учням це завдання. Найчастіше вони вказували лише однотипні варіанти: 1) намалювати два концентричні кола; у циклі, що містить 8 повторень, зобразити 8 стрілок і виконати заливку відповідним кольором кожної утвореної частини; 2) створити процедуру для малювання однієї базисної частини; здійснювати її виклик у циклі, що містить 8 повторень.

Розглянемо алгоритми, що використовують геометричні перетворення.

***Алгоритм* (*поворот*).** Одержати базисну частину можна поворотом стрілки-ламаної на 45° навколо спільного центра кіл, при якому кінці ламаної зображають дуги кіл, а її внутрішні точки виконують зафарбування (рис. 5).

***Алгоритм* (*«паралельне перенесення»*).** Інший спосіб малювання базисної частини — «паралельне перенесення» периферійних дуг, при якому утворяться стрілки і зафарбування (рис. 6). Радіуси кіл різні, тому ці дуги не рівні. Для спрощення розрахунків координат у програмі імітується паралельне перенесення — збільшується радіус меншого кола і зменшується радіус більшого кола. Отже, дуги, які відтинаються від цих кіл і відповідають одному центральному куту, мають різну довжину.

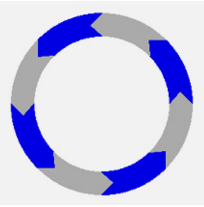

Рис. 4

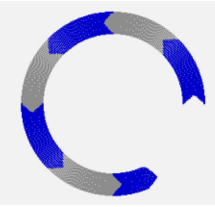

Рис. 5

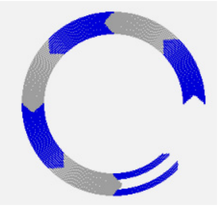

Рис. 6

```
Uses Crt,Graph;
Const r1=240; r2=180; dL=0.1;
   c: Array [1..8] of Byte = (9,7,12,4,14,2,5,11);
Var Gd,Gm,x,y,r,i: Integer; L: Real;
Procedure Arrow(L: Real);
begin
 MoveTo(Round(x+r1*Cos(L)), Round(y−r1*Sin(L)));
 LineTo(Round(x+r*Cos(L+dL)),
         Round(y− r*Sin(L+dL)));
 LineTo(Round(x+r2*Cos(L)), Round(y−r2*Sin(L)))
end;
BEGIN
 Gd:=Vga; Gm:=VgaHi; InitGraph(Gd,Gm,'d:\tp\bgi');
 x:=GetMaxX div 2; y:=GetMaxY div 2;
 {——————————————————————————————}
 r:=(r1+r2) div 2;
 for i:=1 to 8 do
 begin
  SetColor(c[i]); SetFillStyle(1,c[i]);
  Arc(x,y,(i-1)*45,i*45,r1);          {1 дуга}
  Arc(x,y,(i-1)*45,i*45,r2);          {2 дуга}
  L:=i*pi/4;                    {довжина дуги}
  Arrow(L);                        {1 стрілка}
  Arrow(L−pi/4);                   {2 стрілка}
  FloodFill(Round(x+r*Cos(L−dL)),
     Round(y−r*Sin(L−dL)),c[i])  {заливка}
 end;
 {——————————————————————————————}
```

```
 ReadLn; CloseGraph
END.
```

У блоці констант r1 і r2 — радіуси кіл, dL — приріст, що визначає форму стрілки-ламаної і використовується при заливці, елементи масиву c — коди кольорів для заливки, r — проміжна змінна. Виклик процедури Arrow, яка зображає стрілку, здійснюється у циклі двічі, тому що при заливці границя області повинна бути одного кольору.

У другому варіанті (див. рис. 5) досить замінити тіло цикла:

```
SetColor(c[i]);
for j:=(i–1)*45 to i*45 do Arrow(j*pi/180);
```

У третьому варіанті (див. рис. 6) з програми вилучається процедура Arrow і виділений у ній блок заміняється на такий:

```
n:=(r1–r2) div 2;
 for i:=1 to 8 do
 begin
  SetColor(c[i]);
  L:=45*i;   {довжина дуги}
  for j:=1 to n do
  begin
   Arc(x, y, L–45, L, r1–j);
   Arc(x, y, L–45, L, r2+j);
   if j mod 5=0 then Inc(L)
  end
    end;
```

Задача 4. Паралелограм і кільце

Визначити і зобразити геометричне місце точок (г. м. т.) середин всіх можливих відрізків, кінці яких належать а) протилежним сторонам опуклого чотирикутника; б) двом фіксованим колам.

Знання основних г. м. т. (коло, бісектриса кута, серединний перпендикуляр тощо) дуже важливо в геометрії. Задачі їх пошуку і зображення є дослідницькими і цікавими. На уроках інформатики вивчення г. м. т. можна продовжити, закріпити унаочненням. Окрім того, наведені завдання є гарними вправами на програмування вкладених циклів.

Повні математичні розв'язання цих завдань і програми їх побудови містяться у посібнику [7, с. 282–287], який доступний у мережі Інтернет.

Шукані г. м. т. — а) паралелограм (рис. 7), б) — кільце (рис. 8).

Наведемо алгоритм моделювання паралелограма (рис. 9) засобами середовища GeoGebra, скорочено записуючи: **Команда (Об'єкти побудови)** або **Об'єкт/Властивості**.

Відрізок (AB, CD, BC, AD). Точка на об'єкті (EOAB, FOCD). Відрізок (EF).

Середня точка або центр (G — середина EF).

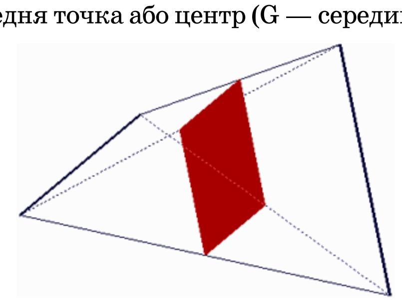

Рис. 7

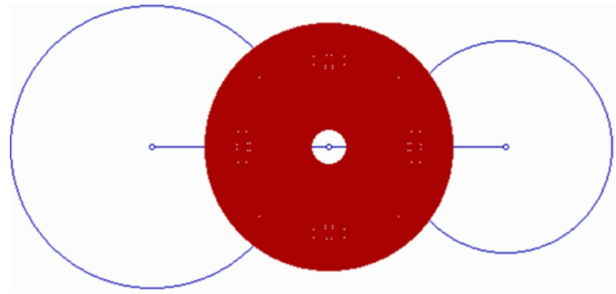

Рис. 8

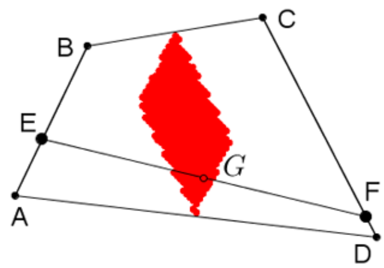

Рис. 9

Точка G/Властивості/Залишати слід/Колір.

Точка E/Властивості/Основні/Залишати слід; Алгебра/Приріст 0.01/Швидкість 6.

Точка F/Властивості/Основні/Залишати слід; Алгебра/Приріст 0.01/Швидкість 13.

Точка E/Властивості/Анімувати.

Точка F/Властивості/Анімувати.

Змінюючи параметри анімації (приріст, швидкість, розмір точки *G*) можна варіювати напрямок і щільність зафарбування г. м. т. Взагалі, наявність у середовищі команд **Анімувати, Залишати слід, Алгебра, Додатково** дає змогу будувати, демонструвати, досліджувати траєкторії, г. м. т. тощо.

Задача 5. Правильні паркети

Намалювати три правильних паркети, використовуючи для кожного зображення два кольори. Кожна вершина паркета є спільною для чотирьох правильних многокутників (рис. 10–12).

Фігури першого паркету можна отримати у результаті очевидного перетину вертикальних і горизонтальних ліній, другого — горизонтальних і двох типів похилих.

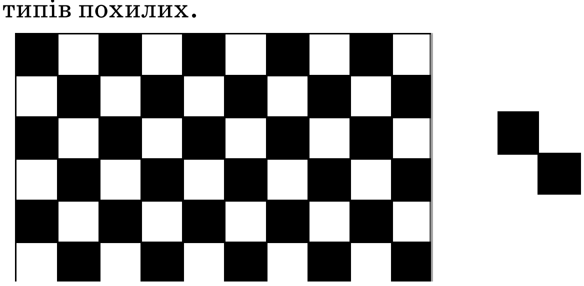

Рис. 10

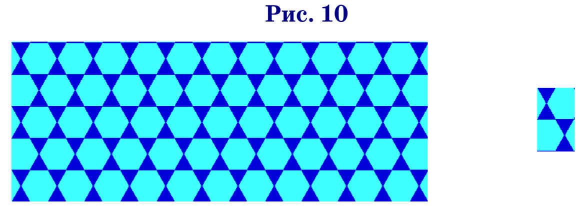

Рис. 11

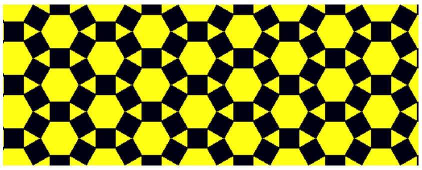
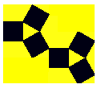

Рис. 12

Фігури третього паркету отримуються, наприклад, з відрізків, що належать прямим трьох типів, подібних до ліній у другому паркеті. Але розрахунки координат при цьому ускладнюються і саме тому відповідну програму не вдається створити більшості учнів. Разом з тим, в уяві однієї з учениць цей паркет виник як неочевидний образ перетину правильних дванадцятикутників! На попередніх уроках саме розглядалась побудова правильних вписаних і описаних многокутників.

***Алгоритм* (*паралельне перенесення*).** Ключ до універсального алгоритму — вивчення фігур одного кольору, які зображатимуться на екрані, попередньо зафарбованому іншим кольором.

У другому стовпці таблиці визначені пари рівних базисних однокольорових фігур на обраному фоні. Одна з них є образом іншої при паралельному перенесенні. Отже, це відповідне геометричне перетворення.

Оскільки зміщені у двох сусідніх стовпцях базисні фігури мають спільну вершину, то з них паркет утворюється як з окремих секцій. Наведемо відповідну програму.

```
Uses Crt,Graph;
Type BasicFigure=Procedure(x,y: Integer); {проц. тип}
Const a: Byte=32;            {a — сторона трик.}
Var  Gd,Gm,b,c: Integer;       {b — висота  трик.}
Procedure Sq_1(x,y: Integer); far;
begin  Bar(x,y,x+a,y+a) end;
Procedure Tr_2(x,y: Integer); far;
begin
 MoveTo(x,y);
 LineRel(a,b);  LineRel(−2*a,0); LineRel(a,−b); {1 трик.}
 LineRel(a,−b); LineRel(−2*a,0); LineRel(a, b); {2 трик.}
 FloodFill(x,y+2,c); FloodFill(x,y−2,c)      {заливка}
end;
Procedure Sq_3(x,y: Integer); far;
begin
 Bar(x,y,x+2*a,y+2*a);              {1 квадрат}
 MoveTo(x+2*a+b,y+a);              {2 і 3 квадрати}
 LineRel(a,b); LineRel(-b,a); LineRel(−a,−b);
 LineRel(b,−a);
 LineRel(−b,−a); LineRel(a,−b); LineRel(b,a);
 LineRel(−a,b);
 FloodFill(x+2*a+1,y,c);
 FloodFill(x+2*a+1,y+2*a,c);{заливка}
end;
Procedure ShiftedColumns
 (c1,c2,x0,y0,dx,dy: Integer; Figure: BasicFigure);
var x,y: Integer;
begin
 SetColor(c1); SetBkColor(c2); SetFillStyle(1,c1);
 x:=x0; c:=c1;  {c — колір заливки базисних фігур}
 Repeat
  y:=y0;
  Repeat
   Figure(x,y); Figure(x+dx,y+dy);  {зміщені стовпці}
   Inc(y,2*dy)
  Until y>=480;
  Inc(x,2*dx)
 Until x>=640;
 ReadLn; ClearDevice
end;
BEGIN
 Gd:=Vga; Gm:=VgaHi; InitGraph(Gd,Gm,'d:tp\bgi');
 ShiftedColumns(1, 15, 0, 0, a, a, Sq_1);
 a:=a div 2; b:=Round(a*Sqrt(3));
 ShiftedColumns(15,13, a, b, 2*a, 2*b, Tr_2);
 ShiftedColumns(8, 14, −2*a, −a, 3*a+b, a+b, Sq_3);
 CloseGraph
END.
```

Для зображення базисних фігур створено процедури Sq_1, Tr_2, Sq_3, які двічі викликаються у вкладених циклах з поточними параметрами x, y та зміщеними — x+dx, y+dy. Кроки параметрів циклів при цьому дорівнюватимуть 2*dx і 2*dy.

BasicFigure — ***процедурный тип,*** визначений для того, щоб вказані вище процедури могли бути параметрами. Змінна Figure цього типу є формальним параметром у процедурі ShiftedColumns.

Для першої процедури dx=dy=a, де a — довжина сторони правильного многокутника, яка записана у блоці констант і може змінюватись для масштабування зображення. Надалі використовується половина сторони і вводиться проміжна змінна b — висота правильного трикутника. Одержується: dx=2*a, dy=2*b і dx=3*a+b, dy=a+b відповідно для процедур малювання другого і третього паркетів. Фактичні параметри головної процедури записано в такому порядку: кольори заливки і фону, абсциса і ордината початкової точки, величини приростів, ім'я процедури. Наприклад, ShiftedColumns(1, 15, 0, 0, a, a, Sq_1).

Задача 6. Рівнобедрені трикутники

Рівнобедрений трикутник має *фіксовану бічну сторону:* $AB=BC=1$ (рис. 13). Трикутники BCF і ABE симетричні даному відносно його бічних сторін. I, K, T — інцентри трикутників ABC, BCF, ABE відповідно. Для утвореного трикутника IKT знайти найбільше значення: 1) довжини $KT;$ 2) довжини $IK;$ 3) периметра; 4) площі.

Конфігурація — динамічна. Для дослідження нескінченної множини трикутників необхідно у виразах-

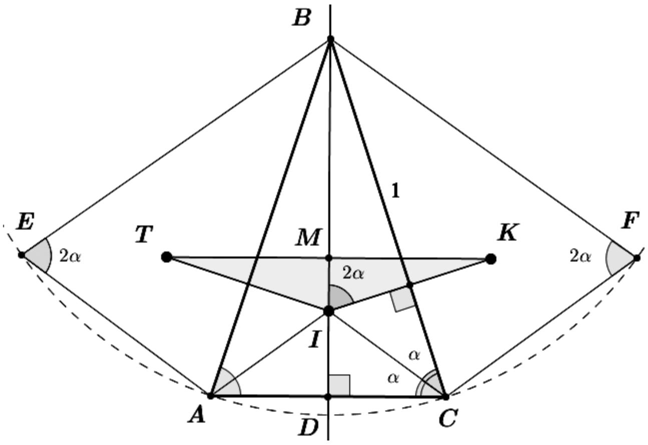

Рис. 13

відповідях до вправ одержувати функції від однієї незалежної змінної.

Досягти цього дозволяє фіксація довжини бічної сторони.

Аргументом функції може бути довжина відрізка, наприклад, AC, або величини кута A.

Отже, нехай $AB=BC=1$, $\angle A=\angle C=2\alpha$.

Основні властивості конфігурації: CI — бісектриса, $\angle DCI=\angle BCI=\alpha$; $0<2\alpha<\pi/2$, базисний трикутник ABC — симетрична фігура, BD — медіана, бісектриса і висота. Пари точок K і I, T і I, K і T симетричні відносно BC, BD, BA; $TI=IK$, $\triangle IKT$ — рівнобедрений.

Маємо: $BC=1$, $DC=\cos 2\alpha$ з $\triangle BDC$, $IK=2DI=2DC\operatorname{tg}\alpha$ $=2\cos 2\alpha \operatorname{tg}\alpha$.

$\angle MIK=2\alpha$ ($M=TK\cap BD$), тому що він і кут C доповнюють кут DIK до розгорнутого.

1. $KT=2MK=2IK\sin 2\alpha=4\cos 2\alpha \operatorname{tg}\alpha \sin 2\alpha=$
$=4\cos 2\alpha\cdot 2\sin^2\alpha = 4\cos 2\alpha - 4\cos^2 2\alpha$.

Без похідної визначаємо, що одержаний квадратний тричлен відносно $\cos 2\alpha$ набуває найбільшого значення 1 у точці B. Отже, $2\alpha=60^\circ$, трикутник ABC — правильний.

2. $IK=2\cos 2\alpha \operatorname{tg}\alpha$. Розглянемо функцію $f(\alpha)=\cos 2\alpha \operatorname{tg}\alpha$, де $\alpha\in(0;\ \pi/4)$.

При $2\alpha\to 0$: $\cos 2\alpha\to 1$, $\operatorname{tg}\alpha\to 0$, $f(\alpha)\to 0$; при $2\alpha\to\pi/2$: $\cos 2\alpha\to 0$, $\operatorname{tg}\alpha\to 1$, $f(\alpha)\to 0$.

$\cos 2\alpha$ — неперервна функція на всій числовій прямій; на інтервалі $(0;\ \pi/4)$ вона спадає і набуває додатніх значень від 1 до 0. Тангенс — неперервна функція на інтервалі $(0;\ \pi/4)$, зростає на ньому і набуває додатніх значень від 0 до 1. $f(0)=f(\pi/4)=0$, $f(\alpha)$ — неперервна на кінцях і його існування на $[0;\ \pi/4]$ випливає з теореми Вейерштраса. Найдемо це значення засобами математичного аналізу.

$f'(\alpha)=(\operatorname{tg}\alpha\cos 2\alpha)'=(1/\cos^2\alpha)\cdot(\cos 2\alpha-\sin^2 2\alpha)$ — неперервна на $(0;\ \pi/4)$.

$f'(\alpha)=0$, якщо $-\sin^2 2\alpha+\cos 2\alpha=0$, $\cos^2 2\alpha+\cos 2\alpha-1=0$,

$$\cos 2\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \cos 2\alpha>0.$$

$2\alpha=\arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($\approx 0{,}905$ рад., $\approx 51{,}827^\circ$) — внутрішня критична точка. Можна впевнитись, що при переході через неї похідна змінює знак з плюса на мінус.

$$f(\alpha)=\cos 2\alpha\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}=0{,}5\sqrt{10\sqrt{5}-22}.$$

$$IK=2f(\alpha)=\sqrt{10\sqrt{5}-22}\approx 0{,}60057.$$

Помітимо, що $\cos 2\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\dfrac{DC}{BC}=\dfrac{DI}{BI}$ (властивість бісектриси трикутника).

Отже, $\dfrac{DI}{BI}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Це відношення є характеристичною властивістю золотого перерізу, тому можна стверджувати, що точка I поділяє відрізок BD у золотому відношенні.

Моделювання і обчислювальний експеримент. Побудуємо динамічну модель конфігурації у середовищі GeoGebra. Впевнимось, що найбільше значення KT дорівнює 1 і досягається тоді, коли трикутники ABC, BCF, ABE — правильні (рис. 14).

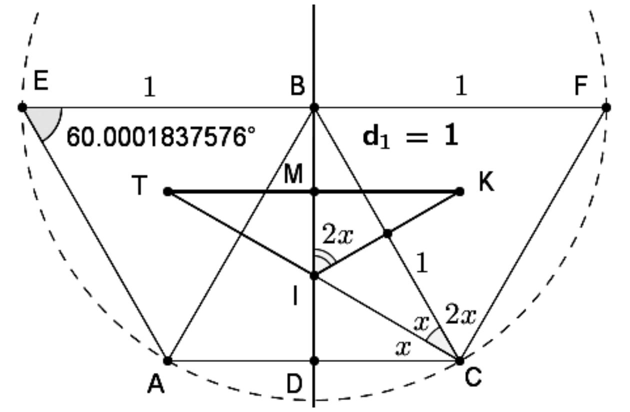

Рис. 14. Найбільше значення *KT*

Найбільше значення IK знайдемо щляхом вимірювання і сповільнення анімації: **Точка A/Властивості/Основні/Алгебра/Приріст 0.1/Швидкість 0.000001.**

$IK\approx 0{,}60057$ (рис. 15), що збігається з наближеним значенням ірраціонального числа $\sqrt{10\sqrt{5}-22}$.

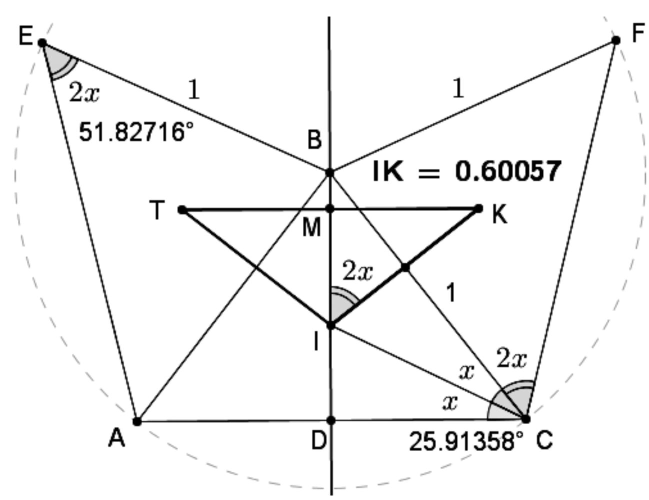

Рис. 15. Найбільше значення *IK*

Відповідь: а) 1 при $2\alpha=60^\circ$;

б) $\sqrt{10\sqrt{5}-22}$ при $2\alpha=\arccos\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

3. $P_{IKT}=2(MK+KI)=2(KI\sin 2\alpha+KI)=2KI(\sin 2\alpha+1)=$ $4\cos 2\alpha \operatorname{tg}\alpha(\sin 2\alpha+1)$. $\cos 2\alpha \operatorname{tg}\alpha=(2\cos^2\alpha-1)\operatorname{tg}\alpha=$ $\sin 2\alpha-\operatorname{tg}\alpha$. Тому $P_{IKT}=4(\sin 2\alpha-\operatorname{tg}\alpha)(\sin 2\alpha+1)$.

Нехай $4(\sin^2 2\alpha+\sin 2\alpha-2\sin^2\alpha-\operatorname{tg}\alpha)=f(\alpha)$, $\alpha\in(0;\ \pi/4)$.

При $\alpha\to 0$: $\sin 2\alpha\to 0$, $\operatorname{tg}\alpha\to 0$, $\sin\alpha\to 0$, $f(\alpha)\to 0$.

При $\alpha\to\pi/4$: $\sin 2\alpha\to 1$, $\operatorname{tg}\alpha\to 1$, $2\sin^2\alpha\to 1$, $\operatorname{tg}\alpha\to 1$, $f(\alpha)\to 0$.

$f'(\alpha)=4(2\sin 2\alpha\cdot 2\cos 2\alpha+2\cos 2\alpha-2\sin 2\alpha-1/\cos^2\alpha)$.

На $[0;\ \pi/4]$ $f'(\alpha)$ — неперервна. $f'(\alpha)=0$, якщо

$2\sin 2\alpha\cos 2\alpha+\cos 2\alpha-\sin 2\alpha-1/(2\cos^2\alpha)=0$,

$\sin 2\alpha(2\cos 2\alpha-1)=1/(1+\cos 2\alpha)-\cos 2\alpha$.

$\cos 2\alpha=t$, $\sin 2\alpha=\sqrt{1-t^2}$. Тоди $\sqrt{1-t^2}(2t-1)=\dfrac{1}{1+t}-t$,

$$\sqrt{1-t^2}(2t^2+t-1)=1-t-t^2,$$

$(1-t^2)(4t^4+t^2+1+4t^3-4t^2-2t)=1+t^2+t^4-2t-2t^2+2t^3$.

Для знаходження внутрішньої критичної точки одержано рівняння:

$$4\cos^4 2\alpha+4\cos^3 2\alpha-6\cos^2 2\alpha-4\cos 2\alpha+3=0\ (*),$$

корені якого можна знайти тільки наближено.

Моделювання і обчислювальний експеримент. Для знаходження наближеного значення кореня рівняння (*) учні можуть використати середовище програмування (див. нижче), електронні таблиці, підходящий обчислювальний веб-сервіс. Вражає своїми «здібностями» розумний універсальний розв'язник **Wolfram Alpha**, який озброєний потужним і злагодженим «оркестром» алгоритмів [3].

Виконаємо моделювання і дослідження в GeoGebra.

Побудуємо графік функції $f=4x^4+4x^3-6x^2-4x+3$, де $x=\cos 2\alpha$.

Знайдемо, що на $(0;\ \pi/4)$ $f=0$ при $x\approx 0{,}55386$ (*Перетин* [f, вісь абсцис]).

Отже, $2\alpha\approx\arccos 0{,}55386\approx 0{,}98380$.

Впевнюємось на моделі, що $P_{\text{найб}}\approx 2{,}17550$ при $2\alpha\approx 56{,}36754^\circ\approx 0{,}98380$ рад. (рис. 16).

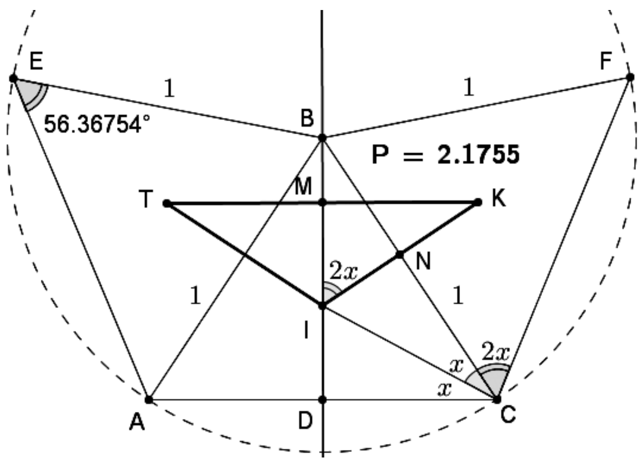

Рис. 16. Найбільший периметр

Побудуємо також графіки функції $f(x)=4(\sin 2x - \operatorname{tg} x)(\sin 2x+1)$ та її похідної (рис. 17). Абсциси точок A і B (точки максимума функції f і нуля її похідної g) збігаються.

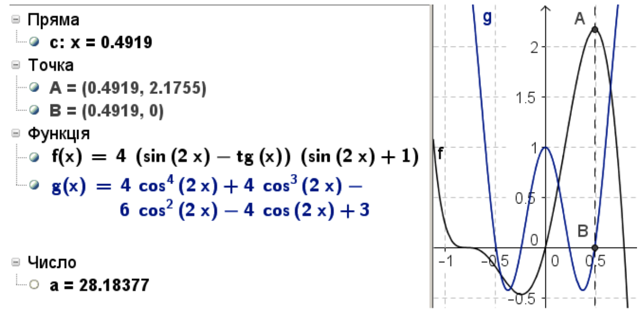

Рис. 17. Графіки функцій

Знаходження координат точки A: **Список команд/Алгебра/Max.**

Знаходження похідної: **Список команд/Функції та математичний аналіз/Похідна.**

Відповідь: $\approx 2{,}17550$ при $2\alpha\approx 0{,}98380$.

4. $S_{IKT}=MK\cdot MI=IK\sin 2\alpha\cdot IK\cos 2\alpha=4\cos^3 2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha\sin 2\alpha=f(\alpha)$, $\alpha\in(0;\ \pi/4)$.

При $\alpha\to 0$: $\cos 2\alpha\to 1$, $\operatorname{tg}\alpha\to 0$, $\sin 2\alpha\to 0$, $f(\alpha)\to 0$.

При $\alpha\to\pi/4$: $\cos 2\alpha\to 0$, $\operatorname{tg}\alpha\to 1$, $\sin 2\alpha\to 1$, $f(\alpha)\to 0$.

За формулою $(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$ одержимо:

$f'(\alpha)=4(3\cos^2 2\alpha(-2\sin\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha\sin 2\alpha+\cos^3 2\alpha\cdot$
$\cdot 2\operatorname{tg}\alpha(2\sin\alpha\cos\alpha/\cos^2\alpha)+\cos^3 2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha\cdot 2\cos 2\alpha)=$
$=4\cos^2 2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha(-6\sin^2 2\alpha+4\cos 2\alpha+2\cos^2 2\alpha)=$
$=8\cos^2 2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha(-3+3\cos^2 2\alpha+2\cos 2\alpha+\cos^2 2\alpha)$.

На $[0;\ \pi/4]$ $f'(б)$ — неперервна.

$\cos 2\alpha\neq 0$, $\operatorname{tg}\alpha\neq 0$, $f'(\alpha)=0$, якщо $4\cos^2 2\alpha+2\cos 2\alpha-3=0$.

Звідси $2\alpha=\dfrac{\sqrt{13}-1}{4}$, $\cos 2\alpha>0$,

$$2\alpha=\arccos\frac{\sqrt{13}-1}{4}\approx 0{,}86138 \text{ рад.}\approx 49{,}35368^\circ.$$

$\alpha\approx 0{,}43069$ — внутрішня критична точка. Можна впевнитись, що при переході через неї похідна змінює знак з мінуса на плюс.

Обчислимо найбільше значення функції.

$$\cos^3 2\alpha=\left(\frac{\sqrt{13}-1}{4}\right)^3=\frac{2\sqrt{13}-5}{8},$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{5-\sqrt{13}}{3+\sqrt{13}},$$

$$\sin 2\alpha=+\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{8}}.$$

$$S_{\text{найб}}=4\frac{2\sqrt{13}-5}{8}\cdot\frac{5-\sqrt{13}}{3+\sqrt{13}}\cdot\sqrt{\frac{1+\sqrt{13}}{8}}=$$

$$=\sqrt{\frac{10881\sqrt{13}-39231}{32}}\approx 0{,}17708.$$

Моделювання і обчислювальний експеримент. На рис. 18 модель, створена для знаходження найбільшого значення площі трикутника.

$S_{\text{найб}}\approx 0{,}17708$ при $2\alpha\approx 49{,}35385^\circ$,

$\alpha\approx 24{,}67692^\circ\approx 0{,}43069$.

На рис. 19 графіки функцій $f(x)$ і $g(x)$. $b=\pi/4\approx 0{,}7854$.

$f(x)$ — непарна функція, $g(x)=f'(x)$ — парна. Графіки мають спільні нулі.

Величини α і $S_{\text{найб}}$ — координати точки A на графіку функції $f(x)$.

Впевнюємось, що значення $S_{\text{найб}}$ одержане при моделюванні з великою точністю збігається з наближеним значенням одержаного ірраціонального числа.

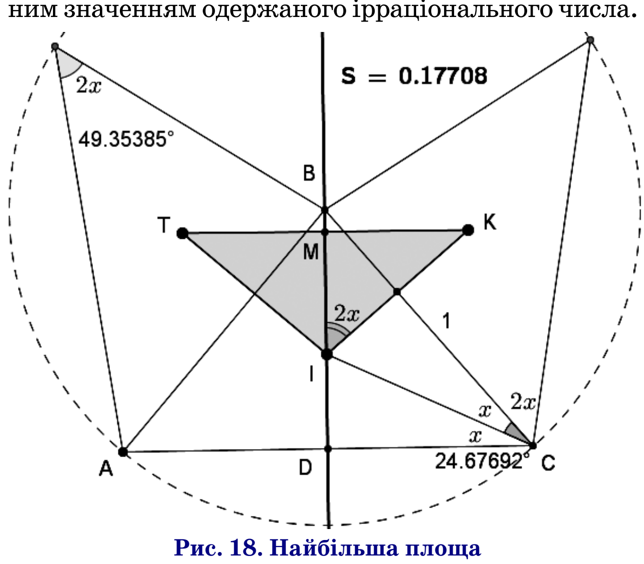

Рис. 18. Найбільша площа

Відповідь:

$$\sqrt{340{,}03125\sqrt{13}-1225{,}96875} \text{ при } 2\alpha=\arccos\frac{\sqrt{13}-1}{4}.$$

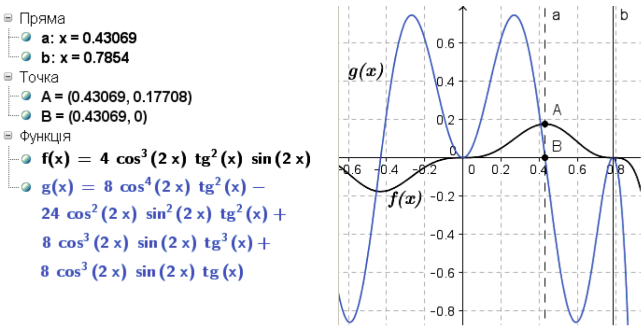

Рис. 19. Графіки функцій

```
Const Eps=0.0000000001;
Var a,b,c: Extended;

Function
f(x:Extended):Extended;
var c: Extended;
begin
 c:=cos(2*x);
 f:=(((4*c+4)*c-6)*c-4)*c+3
end;

BEGIN
 a:=0; b:=pi/4;

 While b-a>2*Eps do
 begin
  c:=0.5*(a+b);
  if f(a)*f(c)<=0 then b:=c
          else a:=c
 end;

 Write(0.5*(a+b):2:10);
ReadLn
END.
```

```
Const step:
Extended=0.000001;
Var a,b,max: Extended;

Function f(x:Extended):
Extended;
var c: Extended;
begin
 c:=sin(x)*cos(2*x);
 f:=8*c*sqr(c)/cos(x)
end;

BEGIN
 a:=0; b:=pi/4;

 max:=f(a);
 Repeat
  a:=a+step;
  if f(a)>max then max:=f(a)
 Until a>b;

 Write(max:2:10); ReadLn
END.
```

Вище наведені програми до пунктів 3 і 4 шостого завдання: уточнення кореня рівняння (*) методом половинного поділу (зліва) та пошуку найбільшого значення неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[0; \pi/4]$. У тілах функцій, виклик яких здійснюється в циклі, записано отримані при дослідженні відповідні формули. c — проміжна змінна. Необхідна точність обчислень досягається підбором значень величин step і eps.

Створення динамічних геометричних конфігурацій у середовищах програмування — чудові творчі вправи! Динамічна модель до задачі «Трикутник *UVW*» [2] використовує як вихідні дані лише три числа — координати центра і радіус кола. Поєднання процесів моделювання і програмування, знайомство учнів з реалізацією окремих функцій динамічних середовищ, забезпечує неізольоване вивчення одного з головних розділів інформатики, пов'язує аналітичні перетворення з геометричними побудовами, не створюючи відчуженості цих процесів.

Задача 7. Правильні трикутники (трикутники *BCF*, *ABE* в умові шостої задачі замінити на правильні).

Щоб оцінити дослідницький потенціал цієї серії задач, створити раціональну технологію застосування в навчанні та набути необхідного власного досвіду пропонуємо читачеві дослідити їх самостійно. Наведемо відповіді і примітку.

Відповіді:

1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ при $2x=\dfrac{\pi}{6}$;

2) $\approx 0{,}63683$ при $2x\approx 0{,}48620$;

3) $\approx 2{,}42799$ при $2x\approx 0{,}50684$;

4) $\approx 0{,}15728$ при $2x\approx 0{,}33536$.

Примітка. У другій задачі серії при знаходженні найбільшої довжини IK для пошуку критичних точок одержується рівняння п'ятого степеня

$$2\sqrt{3}\operatorname{tg}^5x-\operatorname{tg}^4x+4\sqrt{3}\operatorname{tg}^3x-4\operatorname{tg}^2x-2\sqrt{3}\operatorname{tg}x+1=0.$$

Якщо знаходити його корені за допомогою Wolfram Alpha, то «здібності» останнього знову вражають. Після введення команди-запиту виводяться графік і всі п'ять коренів (рис. 20). Два дійсних корені належать проміжку $(0; \pi/4)$. Тому з точністю до 10^{-6} маємо дві критичні точки 0,243102 і 0,678846, в одній з яких функція може набувати найбільшого, а в другій — найменшого значень.

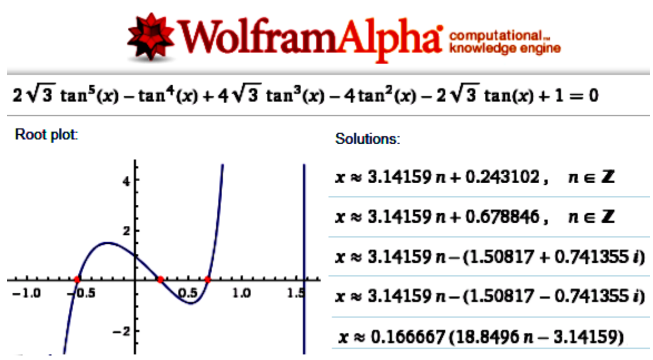

Рис. 20. Корені рівняння (*)

Та після клацання мишкою на кнопці **Approximate forms**, наприклад, при обчисленні меншого додатного кореня на екрані з'являється ще й «компактний» вираз (рис. 21).

$$\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{8\sqrt{\dfrac{3}{-71+2\sqrt[3]{21248-384\sqrt{2766}}+8\sqrt[3]{2\left(166+3\sqrt{2766}\right)}}}}-\frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{71}{24}-\frac{1}{24}\sqrt[3]{21248-384\sqrt{2766}}-\frac{\sqrt[3]{166+3\sqrt{2766}}}{3\times 2^{2/3}}+\frac{177}{8\sqrt{-71+2\sqrt[3]{21248-384\sqrt{2766}}+8\sqrt[3]{2\left(166+3\sqrt{2766}\right)}}}\right)}\right)$$

Рис. 21. Менший корінь на $(0; \pi/4)$

До якого алгоритму у своїй потужній бібліотеці звернувся тут розв'язник?

```
Var a,b,c,d,e: Extended;
BEGIN
 a:= Exp(Ln(21248−384*Sqrt(2766))/3);
 b:= Exp(Ln(332+6*Sqrt(2766))/3);
 c:= Sqrt(−71+2*a+8*b);
 d:= Sqrt(3)/8+c/(8*Sqrt(3));
```

```
e:= 0.5*Sqrt((–71–a)/24–b/6+177/(8*c));
WriteLn(ArcTan(d–e):1:6)
END.
```

Після компіляції дев'яти рядків наведеного коду (гарна вправа для організації раціональних обчислень з використанням проміжних змінних) на екран, дійсно, виводиться 0.243102. Отже, наближені значення кореня і критичної точки збіглись.

Для проектної діяльності з використанням серій взаємозв'язаних міжпредметних задач залежно від рівня підготовки класу і кожного учня вчителеві необхідно структурувати матеріал, визначаючи об'єм роботи для «чистих математиків», «прикладників», «програмістів» і враховуючи, що комп'ютер складно інтегрувати у поурочну структуру навчальних занять. Варто також звернути увагу на засоби й інструменти оцінювання. Найменш підготовлені учні можуть обмежитись написанням окремих процедур, моделюванням конфігурацій, побудовою і читанням графіків функцій та отриманням відповідей засобами середовища GeoGebra.

Література

1. *Зеленяк О.П.* Інтегровані уроки з математики та інформатики в класах з поглибленим вивченням цих предметів // Комп'ютер у школі та сім'ї. — 2006. — №5. — С. 12–15.
2. *Зеленяк О.П.* Моделювання динамічної геометричної конфігурації // Комп'ютер у школі та сім'ї. — 2012. — №4. — С. 33–40.
3. *Зеленяк О.П.* Математичні здібності веб-сервісу Wolfram Alpha // Математика в школах України. — Харків: ВГ Основа, 2012. — №22(358). — С. 23–28.
4. *Зеленяк О.П.* Технологія застосування середовищ динамічної геометрії // Інформаційні технології і засоби навчання. — 2013. — №4. — Режим доступу до журналу: http://journal.iitta.gov.ua.
5. *Биков В.Ю, Овчарук О.В.* Інформаційна підтримка реалізації міжпредметного підходу в шкільній освіті // Інформаційні технології і засоби навчання. — 2013. — №5. — Режим доступу до журналу: http://journal.iitta.gov.ua.
6. *Зеленяк О.П.* Динаміка, моделювання і дослідження в геометрії // Математика в сучасній школі. — 2013. — №10. — С. 39–44.
7. *Зеленяк О.П.* Решение задач по планиметрии. Технология алгоритмического подхода на основе задач-теорем. Моделирование в среде Turbo Pascal. — СПб.: ДиаСофтЮП, М.: ДМК Пресс, 2008. — 330 с.
8. *Зеленяк О.П.* Практикум программирования на Turbo Pascal. Задачи, алгоритмы и решения. — 3-е издание, испр. и доп. — СПб.: ДиаСофтЮП, М.: ДМК Пресс, 2007. — 320 с.

* * *

АЛГОРИТМІЧНІ ПРИНЦИПИ СТВОРЕННЯ ЗАВДАНЬ ЗНО З МАТЕМАТИКИ

Колесніков Сергій Якович,

учитель гімназії №172 «Нивки» м. Києва, tay_9@bk.ru.

Сьогодення вимагає значних зусиль зі створення матеріалів для перевірки рівня знань учнів під час проведення ЗНО. Необхідними умовами, очевидно, є конфіденційність завдань, значна варіативність за умови однакового рівня складності, їх оригінальність й одночасна типовість з точки зору належності до вивченого програмного матеріалу. Звичайно, перед авторами це ставить вимоги досить не прості і навіть ніби суперечливі. Дійсно, як створити завдання, що не виходить за межі шкільного курсу і в той же час оригінальне? Як досягти того, щоб у різних учнів завдання були одного рівня складності і в той же час різноманітні? Відповідь на це запитання турбує не тільки організаторів ЗНО. Локально, на кожному уроці, учитель теж має вирішувати такі питання. І вони постають перед ним протягом усього життя. Для вчителя це значно більш актуально і важливо. Чи існують шляхи подолання цих непростих проблем? Так. Вони теж не прості. Але вершина, якої досягли хоч раз, перестає бути нескореною.

Розглянемо цілком конкретний приклад. Завдання з підручника геометрії для 8-го класу (рис. 1).

Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 32 см і 50 см. Чому дорівнює площа даної трапеції, якщо в неї можна вписати коло?

Цілком очевидно, що $MC=CP$, $ND=DP$, звідки випливає, що $CD=(AD+DC)/2$.

Оскільки $AF=(AD–DC)/2$, то за теоремою Піфагора знаходиться BF — висота трапеції, і для знаходження площі є всі необхідні відомості. Задача розв'язана, числове значення може бути легко встановлено. З іншого боку, проаналізуємо, як пов'язані між собою елементи прямокутного трикутника ABF і основи трапеції AD і BC. Простий аналіз показує, що $AD=AB+AF$, $BC=AB–AF$. Отже, будь-який прямокутній трикутник зі сторонами, довжини яких є цілі числа, може бути основою для подібної задачі. Складаємо такий фрагмент програми:

```
procedure level28;
begin
pifa;
j1:=random(409)+40;
j1:=trunc(j1/10);
sto1:=mc[j1]-ma[j1];
sto2:=mc[j1]+ma[j1];
protv1:=trunc(mb[j1]*
(sto1+sto2)/2);
str(sto1,s1);str(sto2,s2);
s8:='Основи рівнобічної трапеції дорівнюють
      '+s1+' см і '+s2+' см.';
s9:='Чому дорівнює площа даної трапеції,
       якщо в неї можна вписати коло?';
end;
```