

# Визначення пружних характеристик пакету моношарів тонкостінних пластин з композитних волокнистих матеріалів

М.Г. Кришук<sup>1</sup> • Е.І. Овчаренко<sup>1</sup> • Г.О. Ус<sup>1</sup>

Received: 28 April 2023 / Revised: 20 June 2023 / Accepted: 4 September 2023

**Анотація.** Наведено аналітичний метод розрахунку еквівалентних пружних характеристик анізотропних багатошарових пластин з композиційних волокнистих матеріалів. Основні припущення, прийняті під час розрахунку модулів пружності та коефіцієнтів Пуассона, зводяться до того, що волокна – пружні матеріали з ортотропними механічними характеристиками, які при силовому навантаженні багатошарових пластин деформуються разом. Найбільш поширені в практичних додатках прикладної механіки аналітичні методи розрахунку ефективних модулів пружності наведені в переліку цитованих публікацій. До них віднесено правила суміші, модель запропонована Хіллом та Хашином, модель Кільчинського, методи Ваніна та Л.П. Хорошуна. Чисельні методи визначення пружних механічних властивостей армованих односпрямованих та шаруватих композитних матеріалів засновані на інформаційних технологіях скінченно-елементного моделювання представницьких об'єктів композитних матеріалів та вирішення ряду крайових завдань для них. Для конструкцій тонкостінних пластин з волокнистими композиційними матеріалами застосовані традиційні розрахункові схеми, для яких типовим є плоский напружений стан. Співвідношення напруження-деформації для моношару пластин, навантаженого під довільним кутом представлені у вигляді закону Гука для анізотропних матеріалів. Деформації пакета моношарів з композиційними волокнистими матеріалами при плоскому пружно-деформованому стані визначаються, як і для моношару, чотирма незалежними постійними пружними. З використанням універсальної розрахункової моделі на основі рівнянь прикладної механіки отримано результати обчислень еквівалентних модулів пружності та коефіцієнтів Пуассона для пакету моношарів тонкостінних пластин з композиційними волокнистими матеріалами з вуглеканіни та вуглецю. Результати досліджень представлені в аналітичній та графічній формі. Показано вплив структури побудови композиційних волокнистих матеріалів тонкостінних пластин на механічні властивості та їх залежність від кута силового навантаження вектора. Результати досліджень можуть використовуватися для визначення раціональних механічних властивостей багатошарових композиційних пластин з урахуванням їхнього конструктивно-технологічного призначення в різних галузях промисловості.

**Ключові слова:** композиційні матеріали, вуглестрічка, вуглеканіни, багатошарові тонкостінні пластини, модулі пружності, коефіцієнти Пуассона, плоский напружений стан, закон Гука, розрахункові моделі.

## Вступ

Механічна поведінка композитних конструкцій визначається основними конструктивними параметрами: високою міцністю армуючих волокон, жорсткістю матриці та міцністю зв'язку на межі матриця – волокно, схемою та кутами армування. Те чи інше визначення цих параметрів характеризує весь комплекс ме-

ханічних властивостей матеріалу та механізм його руйнування. Працездатність композитних конструкцій забезпечується як правильним вибором вихідних компонентів, так і раціональною технологією їх поєднання, яка має забезпечити міцний зв'язок з поміж них та збереження початкових властивостей.

Конструювання композитних тонкостінних пластин ґрунтується на особливостях технологічної будови їх структури з необхідними механічними властивостями [1] і проектними параметрами міцності [2] композитних волокнистих матеріалів (КВМ). Тип армуючого елемента – одна з найважливіших характеристик КВМ, адже саме через нього в більшій мірі залежать міцність та конструкційні властивості. Податлива матриця, що заповнює міжволоконний простір,

✉ М.Г. Кришук  
krys@ukr.net

<sup>1</sup> КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

забезпечує спільну роботу окремих волокон за рахунок власної жорсткості і силової взаємодії, що існує на межі розділу матриця – волокно.

Найбільш поширеними армуючими волокнами є: скловолокно, вуглецеве волокно, борне волокно, органічне волокно [1, 3]. Вибір кутового напрямку армуючого волокна суттєво впливає на ефективність несучої спроможності конструкцій з КВМ. Матриці, які використовуються в КВМ, слугують для з'єднання армуючих волокон та забезпечення їх спільної роботи при різних видах навантажень. Серед матриць, найбільш поширеними є полімерні матриці, серед яких: поліефірні, епоксидні, фенолоформальдегідні, поліамідні [3].

У розрахунках конструкцій з шаруватих КВМ з орієнтованим армуванням звичайно приймають, що матеріал складається із квазіоднорідних шарів, механічні властивості яких відомі. За таких обставин важливою задачею є визначення ефективних модулів пружності, які є коефіцієнтами, що зв'язують усереднені за об'ємом напруження і деформації багатшарових КВМ. Ефективні модулі залежать від геометричної форми і розташування волокон та їх вмісту в об'ємі матеріалу.

На сьогоднішній день існує багато методів розрахунку ефективних модулів пружності [3–9]. Найбільше поширені методи у практичних застосунках прикладної механіки наведені нижче. Правило суміші використовували Рейс і Фойгт [7]. Модель коаксіальних циліндрів, що складається із волокна розміщеного в коаксіальному циліндрі - матриці, запропонована Хіллом і Хашіном [8]. Модель Кільчинського [7] описує деформування волокна, що міститься в циліндричній матриці, яка в свою чергу знаходиться в необмеженому середовищі. В методі Ваніна [9] ефективні механічні характеристики однонаправлених композитів визначаються з використанням теорії еліптичних функцій Вейерштрасса і спеціальних мероморфних функцій. Обґрунтування методів розрахунку фізико-механічних сталих композиційних матеріалів наведено в наукових доробках Л.П. Хорошуна [10]. Чисельний метод [11, 12] для визначення пружних механічних властивостей армованих односпрямованих і шаруватих композитних матеріалів засновано на інформаційних технологіях скінченно-елементного моделювання представницьких обсягів композитних матеріалів та вирішенні ряду крайових задач для них. Експериментальне визначення пружних констант потребує складних досліджень, тому їх оцінювання за допомогою аналітичних моделей є надзвичайно актуальною задачею.

Елементи конструкцій, виготовлені з КВМ, як правило, є тонкостінними. Вони утворюються з обмеженого числа армованих шарів, причому сумарна товщина цих шарів, навіть досить велика, завжди значно менша принаймні одного з двох інших розмірів елемента. Плоский напружений стан є типовим для багатьох тонкостінних багатшарових конструкцій. В більшості випадків для чисельних розрахунків тут можуть бути

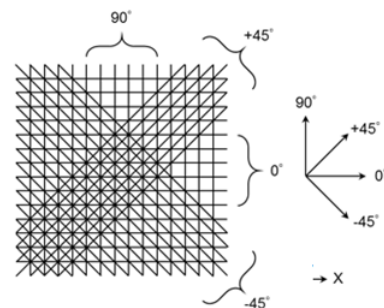
застосовані традиційні розрахункові схеми для тонкостінних пластин. Тому практично важливим є перехід від загальних співвідношень теорії пружності для анізотропного просторового тіла до конкретних форм їх запису для плоского напруженого стану. Особливо важливими є питання, які пов'язані з аналітичними перетвореннями характеристик однонаправленого матеріалу – основного елементу сучасних силових конструкцій у вигляді пластин з КВМ, в характеристики багатшарових матеріалів, що утворені з різноорієнтованих за кутовими напрямками шарів однонаправлених матеріалів.

В даній роботі визначення пружних характеристик пакету моношарів пластин тонкостінних конструкцій проведено на прикладі застосування КВМ армованих вуглеволокном, а саме - вуглетканину і вуглестрічку (табл. 1).

**Таблиця 1.** Пружні ортотропні характеристики моношарів КВМ [1]

Моношар	Модулі пружності і зсуву, МПа			Коефіцієнти Пуассона	
	$E_1$	$E_2$	$G_{12}$	$\mu_{12}$	$\mu_{21}$
Вуглестрічка	143000	8400	5600	0.36	0.02
Вуглетканина	65000	63000	6500	0.070	0.068

По раціональному проектуванню пакетів моношарів композитних пластин тонкостінних конструкцій використано рекомендації, що наведені в літературі [1, 3, 13]. Для ідентифікації моношару в пакеті моношарів КВМ, застосовано конструктивно-технологічну схему, яку визначає кут нахилу моношару до базової осі пакета моношарів  $X$  та число моношарів, що мають заданий кут нахилу. Кожен моношар позначено числом, що показує кутову орієнтацію моношару в градусах між напрямком його волокон і віссю  $X$ . На рис. 1 показана типова орієнтація моношарів  $0^\circ$ ,  $+45^\circ$ ,  $-45^\circ$  і  $90^\circ$  для конструкцій пластин з КВМ.



**Рис. 1.** Типова схема кутової орієнтації моношарів пластини з КВМ

Для односпрямованого моношару КВМ пластин співвідношення величин прикладених напружень  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$  та відповідних деформацій  $\epsilon_1, \epsilon_2, \gamma_{12}$  в декартовій системі координат за умовами плоского напружено-деформованого стану [13] мають вигляд

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^0 & C_{12}^0 & 0 \\ C_{12}^0 & C_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66}^0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix},$$

де  $C_{11}^0 = \frac{E_1}{1-\mu_{12} \cdot \mu_{21}}; C_{12}^0 = \frac{E_1 \cdot \mu_{21}}{1-\mu_{12} \cdot \mu_{21}} = \frac{E_2 \cdot \mu_{12}}{1-\mu_{12} \cdot \mu_{21}};$

$C_{22}^0 = \frac{E_2}{1-\mu_{12} \cdot \mu_{21}}; C_{66}^0 = G_{12}; C_{kl}^0$  – коефіцієнти матриці жорсткості,  $E_1, E_2$  – поздовжній і поперечний модулі пружності моношару;  $G_{12}$  – модуль зсуву моношару;  $\mu_{12}$  – головний коефіцієнт Пуассона;  $\mu_{21}$  – другорядний коефіцієнт Пуассона, який визначається зі співвідношення Максвелла:  $\mu_{12} \cdot E_2 = \mu_{21} \cdot E_1$ .

Закон Гука [13], що описує співвідношення напруження-деформація для моношару, навантаженого під кутом  $\varphi$ , представили у вигляді:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^\varphi & C_{12}^\varphi & C_{16}^\varphi \\ C_{12}^\varphi & C_{22}^\varphi & C_{26}^\varphi \\ C_{16}^\varphi & C_{26}^\varphi & C_{66}^\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix},$$

де коефіцієнти матриці жорсткості моношару, поверненого на кут  $\varphi$

$$C_{11}^\varphi = V_1 + V_2 \cdot \cos 2\varphi + V_3 \cdot \cos 4\varphi;$$

$$C_{12}^\varphi = V_1 - 2 \cdot V_4 - V_3 \cdot \cos 4\varphi;$$

$$C_{16}^\varphi = 0.5 \cdot V_2 \cdot \sin 2\varphi + V_3 \cdot \sin 4\varphi;$$

$$C_{22}^\varphi = V_1 - V_2 \cdot \cos 2\varphi + V_3 \cdot \cos 4\varphi;$$

$$C_{26}^\varphi = 0.5 \cdot V_2 \cdot \sin 2\varphi - V_3 \cdot \sin 4\varphi;$$

$$C_{66}^\varphi = V_4 - V_3 \cdot \cos 4\varphi.$$

Незалежні коефіцієнти  $V_1, V_2, V_3$  і  $V_4$  визначаються співвідношеннями:

$$V_1 = (3 \cdot C_{11}^0 + 2 \cdot C_{12}^0 + 3 \cdot C_{22}^0 + 4 \cdot C_{66}^0) / 8;$$

$$V_2 = (C_{11}^0 - C_{22}^0) / 2;$$

$$V_3 = (C_{11}^0 - 2 \cdot C_{12}^0 + C_{22}^0 - 4 \cdot C_{66}^0) / 8;$$

$$V_4 = (C_{11}^0 - 2 \cdot C_{12}^0 + C_{22}^0 + 4 \cdot C_{66}^0) / 8$$

Коефіцієнти  $V_1$  і  $V_4$  характеризують середні жорсткості моношару при розтягуванні і зсуві, а коефіцієнти  $V_2$  і  $V_3$  характеризують ступінь анізотропії матеріалу. Таким чином, поведінка моношару при плоскому напружено-деформованому стані характеризується чотирма незалежними пружними постійними.

Модулі пружності та коефіцієнти Пуассона моношару КВМ, в декартовому базисі координат за напрямком для довільного кута  $\varphi$

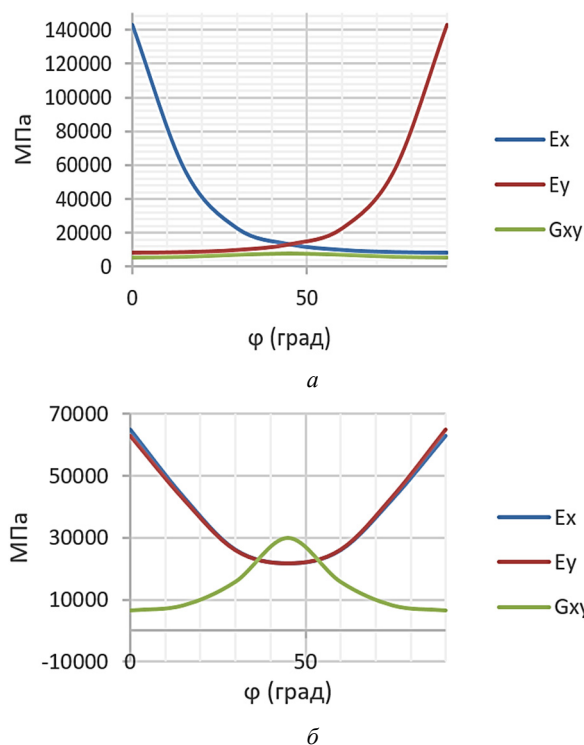
$$E_x = \frac{\Delta C}{C_{22}^\varphi \cdot C_{66}^\varphi - (C_{26}^\varphi)^2}; G_{xy} = \frac{\Delta C}{C_{11}^\varphi \cdot C_{22}^\varphi - (C_{12}^\varphi)^2};$$

$$E_y = \frac{\Delta C}{C_{11}^\varphi \cdot C_{66}^\varphi - (C_{16}^\varphi)^2}; \mu_{xy} = \frac{C_{12}^\varphi \cdot C_{66}^\varphi - C_{16}^\varphi \cdot C_{26}^\varphi}{C_{11}^\varphi \cdot C_{66}^\varphi - (C_{16}^\varphi)^2},$$

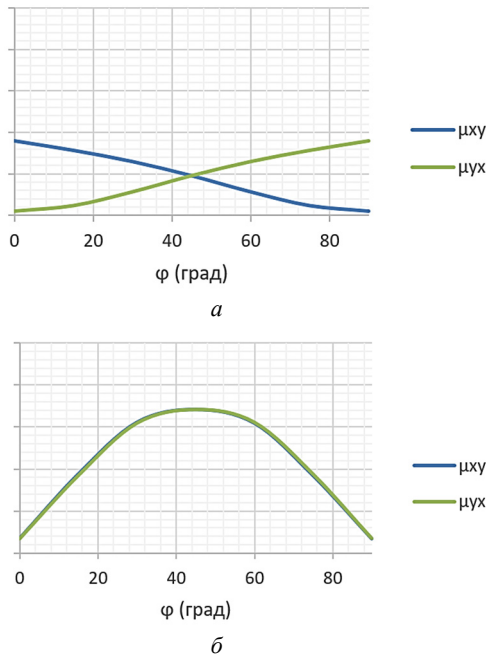
де  $\Delta C$  – визначник матриці жорсткості

$$\Delta C = \det \begin{bmatrix} C_{11}^\varphi & C_{12}^\varphi & C_{16}^\varphi \\ C_{12}^\varphi & C_{22}^\varphi & C_{26}^\varphi \\ C_{16}^\varphi & C_{26}^\varphi & C_{66}^\varphi \end{bmatrix}.$$

Результати розрахунку пружних властивостей для моношару вуглетканини і вуглестрічки навантаженого під кутом  $\varphi$  представлені в графічній формі на рис. 2–3.



**Рис. 2.** Модулі пружності та зсуву для моношару пластин з вуглестрічки (а) та вуглетканини (б) в залежності від кута силового навантаження



**Рис. 3.** Коефіцієнти Пуассона для моношару пластин з вуглестрічки (а) та вуглетканини (б) в залежності від кута силового навантаження

При розгляді пакету моношарів пластини з ортотропними характеристиками в умовах плоского напружено-деформованого стану рівняння зв'язку напружень і деформацій багатшарового КВМ будуть мати вигляд:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}.$$

Коефіцієнти знаходили за формулами:

$$C_{11} = \sum_{i=1}^{2n} C_{11}^i \frac{\delta_m}{s}; \quad C_{12} = \sum_{i=1}^{2n} C_{12}^i \frac{\delta_m}{s};$$

$$C_{22} = \sum_{i=1}^{2n} C_{22}^i \frac{\delta_m}{s}; \quad C_{66} = \sum_{i=1}^{2n} C_{66}^i \frac{\delta_m}{s},$$

де  $\delta_m$  – товщина моношару;  $s$  – товщина пакету моношарів;  $n$  – число моношарів щодо серединної поверхні.

З цього випливає, що порядок чергування моношарів в пакеті не має значення при визначенні його пружних характеристик.

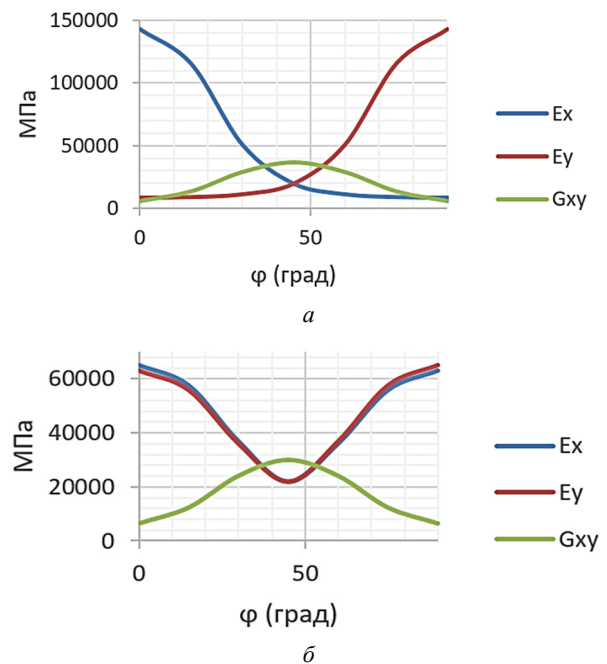
Пружні ортотропні характеристики пакету моношарів пластини представлені співвідношеннями:

$$E_x = C_{11} - \frac{C_{12}^2}{C_{22}}; \quad G_{xy} = C_{66}; \quad E_y = C_{22} - \frac{C_{12}^2}{C_{11}}; \quad \mu_{xy} = \frac{C_{12}}{C_{22}},$$

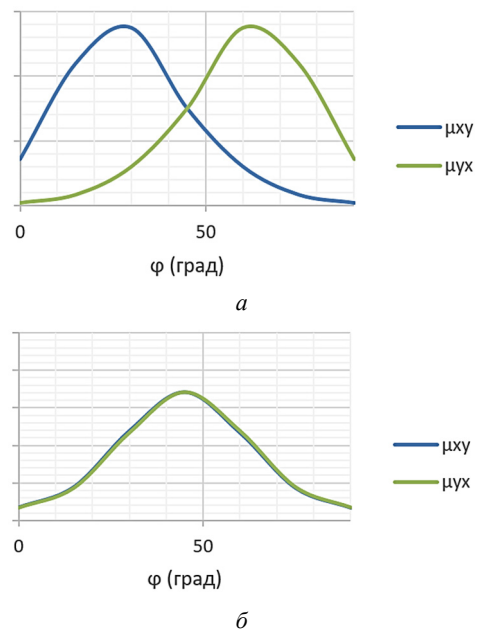
де  $\mu_{yx}$  – визначається з відомого співвідношення Максвелла  $\mu_{xy} \cdot E_y = \mu_{yx} \cdot E_x$ .

Таким чином, поведінка пакету моношарів з КВМ при плоскому пружно-деформованому стані визначається, як і для моношару, чотирма незалежними пружними постійними.

Результати розрахунку пружних властивостей анізотропних пластин з вуглетканини та вуглестрічки з різною орієнтацією двох моношарів з кутовим напруженням армуючого волокна  $\pm 45^\circ$  представлені на рис. 4, 5.



**Рис. 4.** Модулі пружності та зсуву двохшарових анізотропних пластин з вуглестрічки (а) та вуглетканини (б)



**Рис. 5.** Коефіцієнти Пуассона двохшарових анізотропних пластин з вуглестрічки (а) та вуглетканини (б)

## Висновки

1. Наведено метод розрахунку еквівалентних пружних характеристик анізотропних багатошарових пластин із композиційних волокнистих матеріалів.

2. З використанням універсальної розрахункової моделі на основі рівнянь прикладної механіки отримано результати обчислень модулів пружності та коефіцієнтів Пуассона для пакету моношарів тонкостінних пластин з композиційними волокнистими матеріалами із вуглетканини та вуглестрічки.

3. Розрахункові дослідження дозволили показати вплив структури побудови композиційних волокнистих матеріалів тонкостінних пластин на її механічні властивості та їх залежність від кута вектора силового навантаження.

4. Результати досліджень можуть бути використані для визначення раціональних механічних властивостей багатошарових композиційних пластин з урахуванням їх конструктивно-технологічного призначення у різних галузях промисловості.

## References

- [1] Alan Baker, *Composite Materials for Aircraft Structures*, AIAA, 2004, 597p.
- [2] M. Kryshchuk, S. Shukayev and V. Rubashevskiy, "Modeling of Mechanical Properties of Composite Materials Under Different Types of Loads", *Mechanics of Complex Structures From Theory to Engineering Applications*, pp. 39–54, 2021. DOI: 10.1007/978-3-030-75890-5
- [3] L.P. Kollar and G.S. Springer, *Mechanics of composite structures*, Cambridge University Press, 2003, 500p.
- [4] M.Z. Khelifa, M.S. Abdullateef and H.M. Al-Shukri, "Mechanical properties comparison of four models, failure theories study and estimation of thermal expansion coefficients for artificial E-glass polyester composite", *Eng. Technol. J.*, 29, No 2, pp. 278–294, 2011.
- [5] M. Kucher and M. Zarazovsky, "Assessment of micromechanical models of prediction of effective elasticity constants of fibrous composites", *Visnyk mashynobuduvannya*, No. 58, pp. 24–29, 2010.
- [6] V. Rubashevskiy, M. Zarazovskii and S. Shukayev, "Determination of elastic constants of unidirectional layer in composite materials", *Materials for use in extreme conditions*, 6, Kiev, Ukraine, pp. 56–59, 1–2 December, 2016.
- [7] Xu Yingjie, Zhang Pan, LuHuan and Zhang Weihong, "Hierarchically modeling the elastic properties of 2D needled carbon/carbon composites", *Composite Structures*, No 133, pp. 148–156, 2015. DOI: 10.1016/j.compstruct.2015.07.081
- [8] B.W. Rosen, "Thermomechanical properties of fibrous composites", *Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 319, No 1536, pp. 79–94, 1970. DOI: 10.1098/rspa.1970.0167
- [9] A. Kilchinsky, "On a Model for Determining the Thermoelastic Characteristics of Materials Reinforced by Fibers", *Applied Mechanics*, Vol. 1, No. 12, pp. 65–74, 1965.
- [10] L.P. Horoshun, "Statisticheskaya mehanika i effektivnyie svoystva materialov", *Mehanika kompozitov*, A.N. Guzya, Ed., Kyiv: Nauk. dumka, Vol. 3, 1993, 390 p.
- [11] Zade S. Daria, "Numerical method for determining the effective characteristics of orthogonally reinforced composites", *Bulletin of the National Technical University "KhPI"*, Kharkov, NTU "KhPI", Publ. Series "Dynamics and strength of machines", No. 58, pp. 71–77, 2013.
- [12] K. Rudakov & V. Maslyey, "To a procedure of definition of the "equivalent" physico-mechanical characteristics of a honeycomb filler of a composite plate", *Mechanics and Advanced Technologies*, No. 3(84), pp. 75–85, 2018. DOI: 10.20535/2521-1943.2018.84.149780
- [13] N.A. Alfutov et al., *Raschet mnogosloynnyih plastin i obolochek iz kompozitsionnyih materialov*, Moscow: Mashinostroenie, 1984, 264p.

## Determination of elastic characteristics for a package of monolayers thin-walled plates from composite fibrous materials

N. Kryshchuk<sup>1</sup>, E. Ovcharenko<sup>1</sup>, H. Us<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine

**Abstract.** An analytical method for calculating the equivalent elastic characteristics of anisotropic multilayer plates made of composite fibrous materials is laid out. The main assumptions taken into consideration when calculating elastic moduli and Poisson's coefficients are that fibers are elastic materials with orthotropic mechanical characteristics that deform together when multilayer plates are loaded. Analytical methods for calculating effective modulus of elasticity most common in practical applications of applied mechanics are laid out in the list of cited publications. These include the rules of the mixture, the model proposed by Hill and Khashin, the model of Kilchinsky, the methods of Vanin and L.P. Khoroshun. Numerical methods for determining the elastic mechanical properties of reinforced unidirectional and layered composite materials are based on information technologies of finite-element modeling of representative volumes of composite materials and solving a number of boundary value problems for them. For the constructions of thin-walled plates with composite fibrous materials, traditional calculation schemes are used, for which the plane stress state is typical. The stress-strain relationship for a monolayer of plates loaded at an arbitrary angle is presented in the form of Hooke's law for anisotropic materials. Deformations of a package of monolayers with composite fibrous materials in a plane elastic-deformed state are determined, as for a monolayer, by four independent elastic constants. With the use of a universal calculation model based on the equations of applied mechanics, the results of the calculations of elastic moduli and Poisson's coefficients were obtained for a package of monolayers of thin-walled plates with composite fibrous materials made of carbon fiber and carbon fiber. Research results are presented in an analytical and graphic form. The influence of the construction structure of composite fibrous materials of thin-walled plates on its mechanical properties and their dependence on the angle of the force load vector is presented. The research results can be used to determine the rational mechanical properties of multilayer composite plates, taking into account their structural and technological purpose in various industries.

**Keywords:** composite materials, carbon tape, carbon fabric, multilayer thin-walled plates, elastic modulus, Poisson's ratios, plane stress state, Hooke's law, computational models.