

**О. Гачкевич**

Професор, д-р фіз.-мат. наук,  
Інститут прикладних проблем  
механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
м. Львів, Україна;  
Політехніка Опольська,  
м. Ополе, Польща

**Є. Ірза**

Канд. фіз.-мат. наук,  
Інститут прикладних проблем  
механіки і математики  
ім. Я.С.Підстригача НАН України,  
м. Львів, Україна

**З. Касперський**

Д-р фіз.-мат. наук,  
Політехніка Опольська,  
м. Ополе, Польща

УДК 539.3

## ОПТИМАЛЬНІ ЗА ШВИДКОДІЄЮ РЕЖИМИ ТЕРМООБРОБЛЕННЯ СКЛЯНИХ ТІЛ ОБЕРТАННЯ ЗА ОБМЕЖЕНЬ НА ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН

*Ноді оєітаага е дїса'усо'оуіпу сааа-а аеїа-аїгү ііоєі аеіітїаї са оаеаеїа<sup>3р</sup>  
еадбааїгү дааеї іі оади ііадїаеаїгү пееүіео ое іаадбааїгү, іде іаї аааїгү іа  
ооїео<sup>3р</sup> еадбааїгү (оаї іадаоодо іаад<sup>3а-а</sup>)<sup>3</sup> іаї доааїі-ааодї іаїее ндї о о<sup>3е3</sup>.*

оптимізація, термооброблення, локальний нагрів, тіло обертання

Дослідження оптимізації в механіці деформівного твердого тіла можна умовно розділити на два напрями — проектування оптимальних конструкцій і розроблення оптимальних за різними критеріями режимів термооброблення деталей і вузлів виробів широкого технічного застосування.

Розглянута в статті проблема належить до другого напрямку, важливість якого полягає, перш за все, в можливості практичної реалізації режимів у багатьох технологіях.

Скляні тіла обертання в процесі виготовлення й оброблення піддають різним тепловим і механічним діям для надання їм функціональних властивостей, а також підвищення їхньої міцності й надійності. Виникаючи за таких дій температурні напруження міняються в широкому діапазоні в залежності від параметрів температурних полів, умов закріплення, геометричної конфігурації, властивостей матеріалу. Великі рівні напружень можуть призводити до руйнування конструкцій або до погіршення експлуатаційних властивостей за рахунок виникнення залишкових напружень. Тому виникає проблема

оптимізації режимів термооброблення за рівнем напружено-деформівного стану тіла.

Порівняно з існуючими в літературі дослідженнями в цьому напрямі [1 — 3] в статті запропоновано методику побудови оптимальних режимів термооброблення для термочутливих скляних тіл обертання (форма яких відмінна від канонічної) з врахуванням особливостей механічної поведінки скла за підвищених температур.

Математична постановка задач оптимізації режимів термооброблення тіл включає такі етапи: вибір критерію оптимізації; вибір функцій керування, за допомогою яких досягається екстремум функціоналу оптимізації; формування обмежень на параметри стану і функції керування; формулювання залежностей, які описують поведінку тіл за заданих умов термооброблення (вибір адекватної фізико-математичної моделі опису наявних фізико-механічних процесів).

Охарактеризуємо коротко кожен з наведених етапів задачі оптимізації.

Вибір критерію і відповідного функціоналу, який реалізує цей критерій оптимізації, здійснюють виходячи

з основних цільових призначень процесу термооброблення. Найтипівішими функціоналами, які використовуються в задачах термооброблення, є функціонали інтегрального і локального типів [1, 2].

Так, в [1] при побудові оптимальних за напруженнями режимів низькотемпературного термооброблення скляних виробів використано функціонал енергії пружної деформації

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{\tau^*} \int_{(\Omega)} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega d\tau, \quad (1)$$

де  $\tau^*$  — тривалість процесу термооброблення;  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$  — компоненти тензорів напружень і деформацій;  $W$  — область, яку займає тіло.

Цей критерій належить до функціоналів інтегрального типу і характеризує міцність конструкції в цілому протягом процесу термооброблення (його мінімізація дає змогу оптимально понизити рівень напружень у тілі впродовж усього процесу термооброблення).

У праці [2] використано функціонал

$$F = \max_{\tau, \Omega} |\sigma_i - \sigma_d|, \quad i=1, \dots, 3, \quad (2)$$

де  $\sigma_i$  — головні значення компонент тензора напружень;  $\sigma_d$  — рівень допустимих напружень. Цей функціонал належить до функціоналів локального типу і характеризує міцність елементів конструкції в конкретній точці в кожен момент часу термооброблення (його мінімізація дає можливість понизити рівень напружень у тілі в кожен момент часу термооброблення).

Нижче за функціонал оптимізації вибрано тривалість термооброблення

$$J = \tau^*, \quad (3)$$

яка є важливим елементом багатьох технологій. Мінімізація функціоналу (3) дає можливість скоротити час термооброблення. При цьому забезпечення міцності конструкції здійснюється за рахунок обмежень, у межах яких повинні змінюватися параметри наявних процесів (у розглядуваному випадку компоненти напружень).

Цей функціонал дає змогу формулювати задачу оптимізації для реальних технологій скляного виробництва і можливість врахувати обмеження як технологічного характеру, так і пов'язані з властивостями матеріалу при підвищених температурах.

Вибір функції керування здійснюється виходячи з технологічних можливостей керування наявними фізико-механічними процесами в конкретній технології термооброблення. Так функцією керування може бути температура навколишнього середовища, коефіцієнт теплопровідності, тепловий потік тощо.

Третім важливим етапом у постановці задачі оптимізації є вибір обмежень на параметри наявних фізико-механічних полів і функції керування. Вибір обмежень на параметри полів здійснюється в залежності від цілей термічного оброблення. Типовими обмеженнями в таких задачах є обмеження на напружений стан тіла:

$$\max_{\tau, \Omega} |\sigma_i| \leq \sigma_d(t), \quad i=1, \dots, 3, \quad (4)$$

де  $\sigma_d(t)$  — рівень допустимих напружень, який змінюється в залежності від температури конкретної точки тіла (зокрема поверхні).

До типових обмежень можна також віднести такі обмеження на температуру тіла під час процесу термооброблення [2]:

$$t_1 \leq t(M, \tau) \leq t_2, \quad (5)$$

обмеження на функцію керування

$$h_1 \leq h(\tau) \leq h_2 \quad (6)$$

і обмеження на швидкість зміни функції керування

$$v_1 \leq \frac{dh(\tau)}{d\tau} \leq v_2. \quad (7)$$

Кількість додаткових умов на параметри розглянутих полів і функції керування в процесі термооброблення в цій схемі оптимізації є неістотною.

Одним з головних етапів у постановці задачі оптимізації займає вибір термомеханічної моделі тіла при термообробленні, яка б максимально відображала особливості його механічної поведінки як у процесі термічного оброблення, так і після його завершення.

Запропонована у статті модель термомеханічної поведінки скляного тіла ґрунтується на дослідженнях, які проведено в [4] для пластин і в цій статті розвинуто на випадок тіла обертання при осесиметричному тепловому навантаженні.

При постановці прямої задачі на етапі охолодження, де можуть виникати злишкові напруження, зумовлені зміною структури скла (склуванням), розглядається скляне тіло обертання з локальним осесиметричним розподілом температури  $t(r, z, 0) = t_0(r, z)$  (яка є вищою за температуру склування  $t_g$  [4]). Тіло займає область  $W$  евклідового простору  $R^3$  і обмежене неперервною за Ліпшицем поверхнею  $\Gamma$ . Воно віднесене до циліндричної системи координат  $O\rho\varphi z$ . Тіло охолоджується зовнішнім середовищем з температурою  $t_c(\tau)$  через частину поверхні  $\Gamma_t((r, z) \in \Gamma_t)$  і тепловим потоком  $q(r, z, \tau)$  через частину поверхні  $\Gamma_q((r, z) \in \Gamma_q; \Gamma_t \cup \Gamma_q = \Gamma)$ , а також розподіленими джерелами тепла потужності  $Q(r, z, \tau)$ ,  $(r, z) \in W$  до кінцевого стану з максимальною температурою  $t_k$ .

Приймаємо, що на частині  $(\Gamma_u)$  поверхні тіла  $\Gamma$  задані переміщення  $u = (u_r^0, u_z^0)$ , а на частині  $(\Gamma_\sigma)$  — силове навантаження, яке характеризується вектором  $\bar{p} = (p_r, p_z)$ ,  $(\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \Gamma)$ . Температурне поле в тілі описується рівнянням теплопровідності [5]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rk \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial t}{\partial z} \right) + Q = c\rho \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad (8)$$

за таких початкових і граничних умов

$$t(r, z, 0) = t_0(r, z); \quad (9)$$

$$\left[ k \left( \frac{\partial t}{\partial r} n_r + \frac{\partial t}{\partial z} n_z \right) + \alpha (t - t_c) \right]_{\Gamma_r} = 0;$$

$$\left[ k \left( \frac{\partial t}{\partial r} n_r + \frac{\partial t}{\partial z} n_z \right) + q \right]_{\Gamma_q} = 0. \quad (10)$$

Тут  $k$  — коефіцієнт теплопровідності;  $c$  — питома теплоємність;  $\rho$  — густина;  $\alpha$  — коефіцієнт тепловіддачі;  $n_r, n_z$  — компоненти зовнішньої нормалі до поверхні тіла.

Зв'язок між компонентами тензора напружень і тензора деформацій приймаємо у вигляді [5]

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_t\} - \{\varepsilon_0\}), \quad (11)$$

де  $\{\sigma\}$  — тензор напружень;  $[D]$  — матриця пружних характеристик;  $\{\varepsilon\}$  — тензор деформацій;  $\{\varepsilon_t\}$  — тензор температурної деформації;  $\{\varepsilon_0\}$  — тензор залишкової деформації, яка визначається відповідно до модифікованої гіпотези “заморожування” [5].

В області  $\Omega$  повинні виконуватись також рівняння рівноваги і механічні граничні умови:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0; \quad (12)$$

$$n_r \sigma_{rr} + n_z \sigma_{rz} - p_r = 0,$$

$$n_r \sigma_{rz} + n_z \sigma_{zz} - p_z = 0 \text{ на } \Gamma_\sigma;$$

$$u_r = u_r^0, u_z = u_z^0 \text{ на } \Gamma_u. \quad (13)$$

Обмежимося випадком малих деформацій. При цьому зв'язок між компонентами тензора деформацій і компонентами вектора переміщень буде таким:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r},$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}. \quad (14)$$

Математичну модель опису механічної поведінки тіла при термообробленні сформульовано в квазістатичній постановці і в переміщеннях. Залежності (8) — (14) складають повну систему співвідношень для визначення температурного поля, компонент вектора переміщень, компонент тензорів деформацій і напружень при заданих температурі навколишнього середовища  $t_c$ , тепловому потоці  $q$ , зовнішньому силовому навантаженні  $\bar{p}$  і потужності внутрішніх джерел тепла  $Q$  (повну систему вихідних співвідношень прямої задачі на стадії охолодження).

У такій постановці задача оптимального за швидкістю керування режимами охолодження є задачею на умовний екстремум (мінімум) функціоналу (3), при обмеженнях (4) — (7) і в'язях (8) — (14).

Розв'язок сформульованої екстремальної задачі будемо на основі принципу поетапної параметричної оптимізації [6]. В рамках запропонованого підходу мінімізація функціоналу (3) зводиться до задачі нелінійного програмування з пошуку мінімуму відповідної функції  $J = J(h_1, \dots, h_n)$ , аргументами якої є значення  $h_i$  функції керування  $h$  у дискретні моменти часу  $t_s$ .

Таким чином, задача оптимального за швидкістю керування режимами термооброблення елементів скляних конструкцій зводиться до розв'язання задачі на умовний екстремум функції  $J$  при обмеженнях (4) — (7) і в'язях (8) — (14). При цьому побудова розв'язку задачі оптимального керування розбивається на два етапи. На першому етапі, який відповідає охолодженню тіла до температури склування (коли закінчуються формуватись залишкові деформації і відповідні їм залишкові напруження) оптимальний розв'язок знаходимо на множині сталих функцій за допомогою методу прямого пошуку на основі відомих розв'язків прямої задачі. На другому етапі, який відповідає охолодженню тіла від температури склування  $t_g$  до кінцевої (натуральної), коли тіло веде себе як пружне зі сформованими залишковими деформаціями і відповідними їм напруженнями, оптимальний розв'язок знаходимо на множині лінійних функцій з використанням того ж методу прямого пошуку.

Важливою в застосованій схемі оптимізації є побудова розв'язку прямої задачі (8) — (14). Оскільки геометрична конфігурація області є часто досить складною, а система диференціальних рівнянь — нелінійною, при розв'язанні прямої задачі використовуємо метод зважених нев'язок у поєднанні з скінченноелементним підходом [6]. При цьому систему диференціальних рівнянь (8) — (14) піддаємо просторово-часовій дискретизації і зводимо до системи нелінійних алгебричних рівнянь, які розв'язуємо за допомогою відповідних ітераційних методів [6].

З використанням запропонованої методики побудовано оптимальний режим охолодження за допомогою температури навколишнього середовища  $t_c(\tau)$  скляного порожнистого циліндра висотою 0,250 м, внутрішнім радіусом 0,03 м і товщиною 0,01 м за початкової температури 850 °С, температури склування  $T = 690$  °С, при коефіцієнті тепловіддачі  $\alpha = 150$  Вт/м<sup>2</sup>·К (за  $Q=0$ ,  $q=0$ ). Циліндр виготовлений зі скла з теплофізичними характеристиками, які наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Теплофізичні характеристики скла

Параметр	Значення параметра			
	20	200	400	900
$t, ^\circ\text{C}$	20	200	400	900
$k, \text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$	0.65	0.75	0.77	0.82
$\rho, \text{кг}/\text{м}^3$	2560	2560	2560	2560
$c, \text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$	795	900	1020	1040
$E, \text{МПа}$	65400	63200	61100	5012
$\nu$	0.215	0.215	0.215	0.215
$\alpha, \text{К}^{-1} \cdot 10^{-6}$	9.9	11.2	13.1	15.3

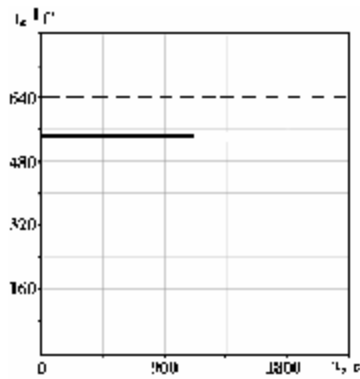


рис. 1

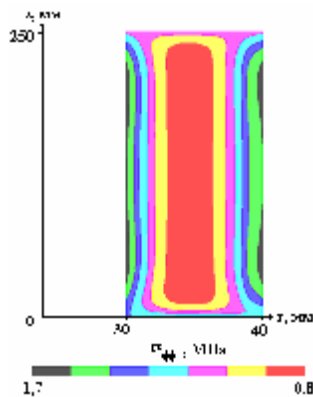


рис. 2

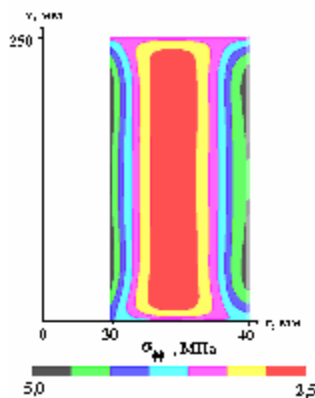


рис. 3

На рис. 1 показано існуючий у багатьох технологіях скляного виробництва режим охолодження, який здійснюється за рахунок температури зовнішнього середовища (нульове наближення) — штрихова лінія і знайдений оптимальний режим (суцільна лінія).

На рис. 2 і рис. 3 проілюстровано розподіл залишкових напружень в осьовому перерізі циліндра (з врахуванням умов симетрії наведено половину перерізу циліндра) при цих режимах охолодження відповідно.

На рис. 4 подано існуючий режим охолодження (крива 1) і оптимальний режим охолодження (крива 2) на другому етапі охолодження (в діапазоні температур нижчих за температуру склування, коли завершилися струк-

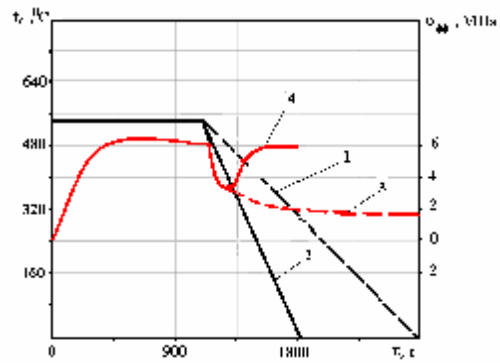


рис. 4

турні перетворення в склі). Кривими 3, 4 показано відповідну зміну максимальних напружень у циліндрі.

З рис. 4 видно, що тривалість оптимального процесу охолодження менша приблизно на половину від існуючого на виробництві.

Отже, запропонована числова методика знаходження оптимального за швидкістю керування режимами термооброблення дає можливість розв'язати широкий клас задач, які пов'язані з дослідженням параметрів, що характеризують теплові і механічні процеси в скляних конструкціях при різного типу обмеженнях теплової і механічної природи й істотно скоротити тривалість режимів термічного оброблення.

## Література

1. Григолюк Э.И., Подстригач Я.С., Бурак Я.И. Оптимизация нагрева оболочек и пластин. — К.: Наук. думка, 1979. — 364 с.
2. Гачкевич О.Р., Гачкевич М.Г., Гуменчук О.Б., Касперський З. Методика оптимізації режимів нагріву конвективним способом і електромагнітним випромінюванням кусково-орднорідних оболонок обертання // *Машинознавство*. — 2000. — №4—5 (34—35). — С. 3—10.
3. Вугак В.М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. — К.: Наук. думка, 1988. — 312 с.
4. Бартечев Г.М. Механические свойства и тепловая обработка стекла. — М.: Стройиздат, 1960. — 283 с.
5. Гачкевич О.Р., Будз С.Ф., Ірза С.М., Пеер-Касперська А. Визначення напружено-деформованого стану скляної сферичної оболонки при локальному нагріві // *Вісник Донецького університету*. — 2002. — №2. Серія А. — С. 76—78.
6. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. *Finite Element Method: Vol 1. The Basis*. — London: Butterworth Heinemann, 2000. — 689 p.

Отримана 23.05.07

O.Hachkevych<sup>1,2</sup>, E. Irza<sup>1</sup>, Z. Kasperski<sup>2</sup>

**Optimal by duration of thermal processing of glass rotating bodies at constraints imposed on thermostressed state**

<sup>1</sup>*Pidstryhach Institute for Applied Problems in Mechanics and Mathematics of Ukrainian National Academy of Sciences, Lviv, Ukraine;*

<sup>2</sup>*Technical University of Opole, Opole, Poland*

*The problem of optimal (by duration of control of thermal processing of glass rotating bodies) is solved. The heater temperature is chosen as a control function. Constraints on thermostressed state are to be observed.*