

УДК 681.5.015.73:519.711

Л. Костинюк

Доцент, канд. техн. наук

В. Мороз

Доцент, канд. техн. наук

Національний університет
"Львівська політехніка",
м. Львів

АНАЛІТИЧНО-ЧИСЛОВИЙ МЕТОД МОДЕЛЮВАННЯ МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ З ПРУЖНИМИ ЗВ'ЯЗКАМИ

Ця робота присвячена аналізу динаміки механічних систем з нелінійними елементами (наприклад, сухого тертя), які описуються розривними функціями. У той же час класичні числові методи апроксимують розв'язок обмеженим розкладом у ряд Тейлора, що існує лише для неперервних диференційованих функцій і непридатний для опису функцій з розривами. Приклади незадовільної поведінки відомих числових методів у традиційних задачах показано в [3, 4], а при розрахунках сучасних електромеханічних систем з імпульсними елементами — в [5].

інтеграл згортки, звичайне диференціальне рівняння, комп'ютерне моделювання, механічна система, перехідний процес, пружний зв'язок

Широке застосування комп'ютерних методів розрахунку перехідних процесів у механічних і електромеханічних системах зумовлене двома причинами: зростанням потужності апаратної частини персональних комп'ютерів (ПК) — швидкодії та обсягу пам'яті (вже декілька років тому стандартний ПК перейшов раніше недосяжну межу мільярду — операцій за секунду (за стандартним тестом Whetstone для операцій з плаваючою комою) та байт оперативної пам'яті; вдосконаленням програмного забезпечення, яке стає щораз „приятнішим” до пересічного користувача, позбавляючи його потреби ґрунтовно вивчати програмування та числові методи.

Меншою мірою прогрес торкнувся математичного підґрунтя, що використовується в типовому програмному забезпеченні. Традиційними для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь залишаються методи Адамса (опубліковані в середині XIX ст.), методи Рунге-Куты (опубліковані наприкінці XIX ст.), а також сучасніші числові методи 70-х років минулого століття з виразами для оцінки локальної похибки [1, 2] з метою реалізації процедури автоматичного вибору кроку розв'язування.

Іншою причиною, що змушує шукати альтернативу числовим методам у комп'ютерному дослідженні динаміки механічних систем, є принципова непридатність класичних числових методів до аналізу сучасних розробок. Це пов'язано з тим, що у більшості сучасних

досліджень аналізуються механічні системи з нелінійними елементами (наявність зазорів, сухого тертя), які описуються розривними функціями.

У той же час класичні числові методи апроксимують розв'язок обмеженим розкладом у ряд Тейлора, що існує лише для неперервних диференційованих функцій і непридатний для опису функцій з розривами. Приклади незадовільної поведінки відомих числових методів у традиційних задачах показано в [3, 4], а при розрахунках сучасних електромеханічних систем з імпульсними елементами — в [5].

Як альтернатива, для аналізу динаміки механічних та електромеханічних систем пропонується застосування аналітично-числових методів, які позбавлені недоліків традиційних.

Динамічні процеси у механічній системі описують переважно системою диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} T_1 \frac{dy_1}{dt} + y_1 = f_1(t, x_1, \mathbf{L}, x_m, y_1, \mathbf{L}, y_n); \\ \mathbf{M} \\ T_n \frac{dy_n}{dt} + y_n = f_n(t, x_1, \mathbf{L}, x_m, y_1, \mathbf{L}, y_n), \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{де } \begin{cases} y_{10} = y_1(0); \\ \mathbf{M} \\ y_{n0} = y_n(0), \end{cases} \text{ — початкові умови для кожної змінної;}$$

T_1, \mathbf{L}, T_n — власні сталі часу механічної системи (відповідають кореням характеристичного рівняння системи); y_1, \mathbf{L}, y_n — проміжні координати стану механічної системи; x_1, \mathbf{L}, x_n — зовнішні збурення механічної системи; f_1, \mathbf{L}, f_n — відповідні функції збурення від x_1, \mathbf{L}, x_n .

Розв'язок кожного з диференціальних рівнянь системи (1) за нульових початкових умов зводиться до знаходження інтегралу згортки

$$\begin{cases} y_1(t) = \int_0^t w_1(t-\tau) \cdot f_1(\tau, x_1, \mathbf{L}, x_m, y_1, \mathbf{L}, y_n) d\tau; \\ \mathbf{M} \\ y_n(t) = \int_0^t w_n(t-\tau) \cdot f_n(\tau, x_1, \mathbf{L}, x_m, y_1, \mathbf{L}, y_n) d\tau, \end{cases} \quad (2)$$

де w_1, \mathbf{L}, w_n — відповідні диференціальним рівнянням імпульсні перехідні функції (у термінах теорії автоматичного регулювання) — реакції відповідної складової

на δ -імпульс Дірака, для якого $\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{для } t=0; \\ 0 & \text{для } t \neq 0 \end{cases}$,

причому $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$.

Звичайному диференціальному рівнянню першого порядку $T \cdot y' + y = f(t)$ відповідає імпульсна перехідна

функція $w(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$, яка може бути знайдена за

допомогою прямого та зворотного перетворень Лапласа [6, 7]. У цьому випадку система (2), за наявності ненульових початкових умов $y_1(0), \mathbf{L}, y_n(0)$, доповнюється відповідними складовими проміжних координат (реакціями на ненульові початкові умови) [8, 9] і зводиться до такого вигляду:

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1(0) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \\ + \frac{1}{T_1} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} f_1(\tau, x_1, \mathbf{L}, x_m, y_1, \mathbf{L}, y_n) d\tau; \\ \mathbf{M} \\ y_n(t) = y_n(0) \cdot e^{-\frac{t}{T_n}} + \\ + \frac{1}{T_n} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T_n}} f_n(\tau, x_1, \mathbf{L}, x_m, y_1, \mathbf{L}, y_n) d\tau. \end{cases} \quad (3)$$

Спростити вирази в отриманій системі (3) можна заміною доволі складних функцій f_1, \mathbf{L}, f_n їхніми поліно-

міальними апроксимаціями, порядок яких визначається потрібною точністю. Якщо не вдаватися у подробиці, що виходять за межі цієї статті, з точки зору компромісу між простотою результуючих виразів та їхньою точністю, заміна функцій f_1, \mathbf{L}, f_n їхніми апроксимаціями за допомогою поліномів першого, щонайбільше, другого порядку, буде достатньо вдалим вибором.

Розглянемо для прикладу апроксимацію функцій поліномами першого порядку. Тоді, в залежності від виду обчислювальної схеми, явної чи неявної, на проміжку $t_i \leq t < t_{i+1}$ кожна функція апроксимуватиметься лінійною

залежністю $f(t) = \frac{f_i - f_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \cdot t + f_i$ — для явної схеми та

$f(t) = \frac{f_{i+1} - f_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot t + f_i$ — для неявної схеми, де

f_{i-1}, f_i, f_{i+1} — значення функції відповідно в точках t_{i-1}, t_i, t_{i+1} .

Отримані вирази підставляємо в (4), після чого для проміжку $t_i \leq t < t_{i+1}$ матимемо:

— для явної обчислювальної схеми

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1(0) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \\ + \frac{1}{T_1} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} \cdot \left(\frac{f_{1i} - f_{1i-1}}{t_i - t_{i-1}} \cdot \tau + f_{1i} \right) d\tau; \\ \mathbf{M} \\ y_n(t) = y_n(0) \cdot e^{-\frac{t}{T_n}} + \\ + \frac{1}{T_n} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T_n}} \cdot \left(\frac{f_{ni} - f_{ni-1}}{t_i - t_{i-1}} \cdot \tau + f_{ni} \right) d\tau; \end{cases} \quad (5)$$

— для неявної обчислювальної схеми:

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1(0) \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} + \\ + \frac{1}{T_1} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T_1}} \cdot \left(\frac{f_{1i+1} - f_{1i}}{t_{i+1} - t_i} \cdot \tau + f_{1i} \right) d\tau; \\ \mathbf{M} \\ y_n(t) = y_n(0) \cdot e^{-\frac{t}{T_n}} + \\ + \frac{1}{T_n} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{T_n}} \cdot \left(\frac{f_{ni+1} - f_{ni}}{t_{i+1} - t_i} \cdot \tau + f_{ni} \right) d\tau. \end{cases} \quad (6)$$

де $f_{1i-1}, \mathbf{L}, f_{ni-1}$ — значення відповідних функцій у моменти часу t_{i-1} ; $f_{1i}, \mathbf{L}, f_{ni}$ — значення відповідних функцій у моменти часу t_i ; $f_{1i+1}, \mathbf{L}, f_{ni+1}$ — значення відповідних функцій у моменти часу t_{i+1} .

Після введення позначень $t_{i+1} - t_i = t_i - t_{i-1} = h$, прийнявши $t_i = 0$, аналітичним інтегруванням виразів у (5) і (6) отримуємо розв'язки системи диференціальних рівнянь (1) у вигляді таких систем рекурентних рівнянь:

— для явної обчислювальної схеми, позначено верхнім індексом “я”

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{1\ i+1}^{(я)} = y_{1i} e^{-\frac{h}{T_1}} + (1 - e^{-\frac{h}{T_1}}) \cdot f_{1i} + \\ \quad + \left(1 - \frac{T_1}{h} \cdot (1 - e^{-\frac{h}{T_1}}) \right) \cdot (f_{1i} - f_{1i-1}); \\ \quad \quad \quad \mathbf{M} \\ y_{n\ i+1}^{(я)} = y_{ni} e^{-\frac{h}{T_n}} + (1 - e^{-\frac{h}{T_n}}) \cdot f_{ni} + \\ \quad + \left(1 - \frac{T_n}{h} \cdot (1 - e^{-\frac{h}{T_n}}) \right) \cdot (f_{ni} - f_{ni-1}); \end{array} \right. \quad (7)$$

— для неявної обчислювальної схеми, позначено верхнім індексом “н”

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{1\ i+1}^{(н)} = y_{1i} e^{-\frac{h}{T_1}} + f_{1i+1} - f_{1i} e^{-\frac{h}{T_1}} - \\ \quad - \frac{T_1}{h} \cdot (f_{1i+1} - f_{1i}) \cdot (1 - e^{-\frac{h}{T_1}}); \\ \quad \quad \quad \mathbf{M} \\ y_{n\ i+1}^{(н)} = y_{ni} e^{-\frac{h}{T_n}} + f_{ni+1} - f_{ni} e^{-\frac{h}{T_n}} - \\ \quad - \frac{T_n}{h} \cdot (f_{ni+1} - f_{ni}) \cdot (1 - e^{-\frac{h}{T_n}}). \end{array} \right. \quad (8)$$

Отримані рекурентні рівняння є стійкими для будь-якого кроку розв’язування і мають властивість сильної стійкості, як показано в [9]. Внаслідок цього величина кроку розв’язування системи (1) за допомогою системи рекурентних рівнянь (7) і (8) визначається вже не умовами стійкості застосованого числового методу, а потрібним рівнем точності й деталізації процесу. Наслідком властивості сильної стійкості запропонованих рекурентних рівнянь є відсутність явища накопичення похибки на довгих дистанціях розв’язування. Іншою позитивною властивістю запропонованих рекурентних моделювальних формул є можливість розв’язування рівнянь, що містять функції з розривами першого роду, наприклад, моделі люфтів та сухого тертя.

У випадку нескінченно великої сталої часу T_i (відповідає операції чистого інтегрування) рекурентні рівняння (7) і (8) вироджуються відповідно в явні та неявні формули Адамса другого порядку. Такий випадок можливий, наприклад, у процесі знаходження переміщення внаслідок інтегрування швидкості тощо.

Перевагами використання явної та неявної схем є [1, 4, 10]:

— можливість позбутися проблем внаслідок неявності в отриманій системі моделювальних рекурентних рівнянь і таким чином уникнути потреби в застосуванні числового методу для розв’язування отриманої системи алгебричних

рівнянь; у такому випадку, як відомо [1, 2, 10], процедура знаходження розв’язку проводиться у два кроки: знаходження розв’язку за явною обчислювальною схемою (“прогноз”); уточнення розв’язку за неявною обчислювальною схемою (“корекція”);

— можливість використання простої процедури оцінювання похибки на кроці розв’язування шляхом знаходження різниці між значеннями координат, що отримані за явною та неявною схемами [4, 10].

Прикладом коливної механічної частини електроприводу є модель (рис. 1), що описується диференціальним рівнянням другого порядку

$$m \cdot x'' + \beta \cdot x' + C \cdot x = F, \quad (9)$$

де m — маса рухомої частини механічної системи; β — коефіцієнт демпфування; C — коефіцієнт пружності; F — зовнішня сила; x — переміщення рухомої частини системи.

Диференціальне рівняння другого порядку для розв’язування числовими та аналітично-числовими методами потрібно звести до системи диференціальних рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = V; \\ m \frac{dV}{dt} + \beta \cdot V = F - C \cdot x; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = V; \\ \frac{m}{\beta} \frac{dV}{dt} + V = \frac{F - C \cdot x}{\beta}, \end{cases} \quad (10)$$

де V — лінійна швидкість маси рухомої частини.

Використовуючи загальний розв’язок (7) і (8), запишемо систему (10) у такому вигляді:

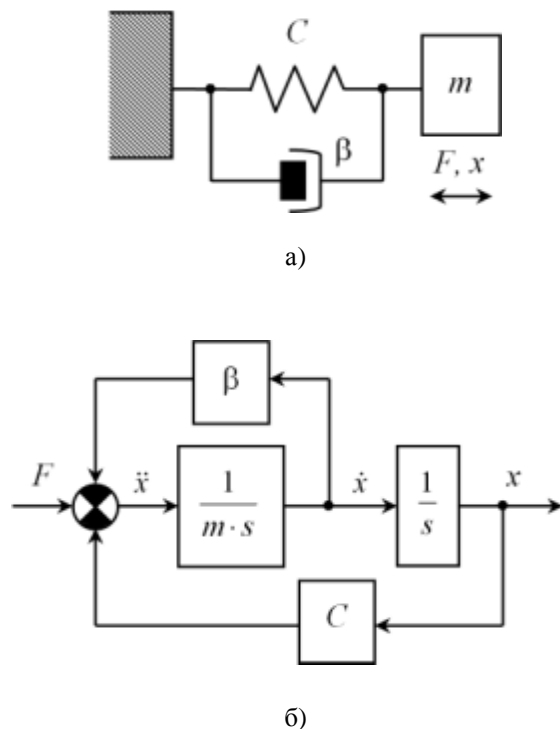


Рис. 1. Найпростіша коливна механічна система: а — функціональна схема; б — структурна модель

$$\begin{cases} x_{i+1}^{(я)} = x_i + \frac{h}{2}(3V_i - V_{i-1}); \\ V_{i+1}^{(я)} = V_i e^{-\frac{h\beta}{m}} + \frac{F_i - C \cdot x_i}{\beta} \cdot \left(1 - e^{-\frac{h\beta}{m}}\right) + \\ + \left(\frac{F_i - C \cdot x_i}{\beta} - \frac{F_{i-1} - C \cdot x_{i-1}}{\beta}\right) \cdot \left(1 - \frac{m}{h \cdot \beta} \left(1 - e^{-\frac{h\beta}{m}}\right)\right); \end{cases}$$

— неявна обчислювальна схема (уточнення розв'язку)

$$\begin{cases} x_{i+1}^{(н)} = x_i + \frac{h}{2} \cdot (V_i + V_{i+1}^{(н)}); \\ V_{i+1}^{(н)} = V_i \cdot e^{-\frac{h\beta}{m}} + \frac{F_{i+1} - C \cdot x_{i+1}^{(я)}}{\beta} \cdot \left(1 - \frac{m}{h \cdot \beta} \left(1 - e^{-\frac{h\beta}{m}}\right)\right) + \\ + \frac{F_i - C \cdot x_i}{\beta} \cdot \left(\frac{m}{h \cdot \beta} \left(1 - e^{-\frac{h\beta}{m}}\right) - e^{-\frac{h\beta}{m}}\right). \end{cases}$$

Деяко складнішою є модель дводвигунного механізму обертання кар'єрного екскаватора-лопати, яка може бути подана еквівалентною розгалуженою тримасною системою з функціональною моделлю (рис. 2) і врахуванням таких нелінійностей, як люфти у передачах і момент сухого тертя:

$$\begin{cases} T_{a\Sigma} \frac{di_a}{dt} + i_a = \frac{u_a - C_1 \cdot \omega_{M1} - C_2 \cdot \omega_{M2}}{R_{a\Sigma}}; \\ M_1 = C_1 \cdot i_a; \\ M_2 = C_2 \cdot i_a; \\ \frac{d\omega_{M1}}{dt} = \frac{M_1 - M_{np1} - \beta \cdot (\omega_{M1} - \omega_2)}{J_{M1}}; \\ \frac{d\omega_{M2}}{dt} = \frac{M_2 - M_{np2} - \beta \cdot (\omega_{M2} - \omega_2)}{J_{M2}}; \\ \varphi_1^{(1)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |\varphi_1| \leq \Delta\varphi/2; \\ \varphi_1 - \Delta\varphi/2 \cdot \text{sign}(\varphi_1), & \text{якщо } |\varphi_1| > \Delta\varphi/2; \end{cases} \\ \varphi_2^{(2)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } |\varphi_2| \leq \Delta\varphi/2; \\ \varphi_2 - \Delta\varphi/2 \cdot \text{sign}(\varphi_2), & \text{якщо } |\varphi_2| > \Delta\varphi/2; \end{cases} \\ M_{np1} = C_{11} \cdot \varphi_1^{(1)}; \\ M_{np2} = C_{12} \cdot \varphi_2^{(2)}; \\ \frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_{M1} - \omega_2; \\ \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_{M2} - \omega_2; \\ \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{M_{np1} + M_{np2} - M_{c2} \cdot \text{sign}(\omega_2)}{J_2}, \end{cases} \quad (12)$$

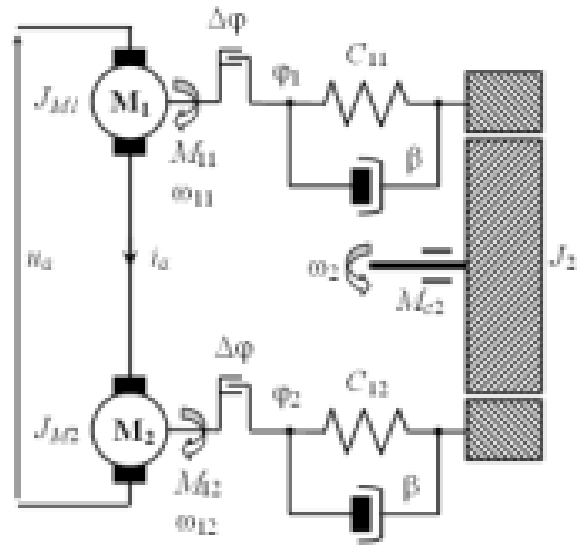


Рис. 2. Функціональна модель приводу обертання кар'єрного екскаватора

де i_a — струм якорного кола двигунів; u_a — напруга живлення якорного кола двигунів; C_1, C_2 — сталі за моментом першого і другого двигуна; $R_{a\Sigma}, T_{a\Sigma}$ — відповідно сумарний опір та електромагнітна стала часу якорного кола двигунів; M_1, M_2 — електромагнітні моменти першого і другого двигуна; M_{np1}, M_{np2} — пружні моменти в першому та другому валах; J_{M1}, J_{M2} — моменти інерції першого і другого двигунів; ω_{M1}, ω_{M2} — кутові швидкості першого і другого двигунів; φ_1, φ_2 — кути скручування першого і другого валів; $\Delta\varphi$ — величина зазору; C_{11}, C_{12} — пружності першого і другого валів; M_{c2} — величина моменту сухого тертя; ω_2 — кутова швидкість веденої ланки механізму; J_2 — момент інерції веденої ланки механізму.

Результуючі рекурентні моделювальні рівняння не наведено через їхню очевидність. Для оцінки похибки запропонованого аналітично-числового підходу застосовано вже згаданий спосіб — використовується з відповідним коефіцієнтом різниця між явною та неявною обчислювальними схемами.

Як середовище для експериментальної перевірки моделі приводу обертання (рис. 2) використано міжнародний стандарт у галузі числових обчислень — пакет числової математики MATLAB (використовувалася версія 6.5) [11], в якому реалізовано у вигляді стандартних функцій методи для розв'язування звичайних диференціальних рівнянь, причому зі стратегією автоматичного вибору кроку інтегрування [12]:

ode23 — реалізація однокрокової формули Богацкі-Шемпайна (*Bogacki-Shampine*) порядку 2(3) з автоматичним вибором кроку інтегрування, автори пакету MATLAB рекомендують її як ефективнішу за ode45 для невисокої точності та для слабжорстких систем;

ode45 — реалізація формули Дормана-Прінса (*Dormand-Prince*) порядку 5(4) з автоматичним вибором кроку інтегрування. Рекомендується авторами пакету як універсальний метод, який може застосовуватися у першій

спробі для розв'язування системи диференціальних рівнянь і є особливо ефективний для високої точності (10^{-6} і вище);

ode113 — реалізує метод „прогноз — корекція” за формулами Адамса-Бешфорта-Малтона (*Adams-Bashforth-Moulton*) 1 — 13 порядків з автоматичним вибором порядку методу і кроку інтегрування. Рекомендоване значення точності — не нижче 10^{-4} . Ця функція особливо ефективна для складних моделей, що вимагають довготривалих обчислень;

ode23s — реалізує модифікований метод Розенброка (*Rosenbrock*) другого порядку для жорстких систем диференціальних рівнянь. Рекомендується для невисокої точності. Може застосовуватися для жорстких задач, для яких функція ode15s не є ефективною;

ode15s — універсальна функція, що реалізує два методи розв'язування жорстких систем диференціальних рівнянь з автоматичним вибором кроку розв'язування: з використанням формул диференціювання назад (ФДН) порядку 1 — 5; з використанням родини формул числового диференціювання, запропонованих Клопфенштайном (*Klopfenstein*) і Райхером (*Reiher*) порядку 1 — 5, дещо ефективніших за ФДН;

ode23t — функція базується на методі трапецій і призначена для систем зі середньою жорсткістю і ефективна для невисокої точності розв'язку;

ode23tb — реалізує метод TR-BDF2, що подібний до методу Рунге-Куты, в якому на першому кроці застосовується формула трапецій, а на другому — формула диференціювання назад другого порядку; ефективна для невисокої точності.

Потрібно зазначити, що за наявності нелінійностей типу зазорів та сухого тертя функції для розв'язування жорстких систем диференціальних рівнянь (ode15s, ode23t, ode23tb) розв'язували задачу з істотними похибками навіть після задання точності на рівні 10^{-6} або взагалі відмовлялися працювати.

Для визначення часу обчислень використовувалась стандартна функція таймера, що наявна у програмі. Як приклад, моделювався пуск дводвигунного приводу обертання реального кар'єрного екскаватора ЕКГ-5А до 0,1 номінальної швидкості з плавним наростанням напруги на двигунах протягом 0,5 с запропонованим аналітично-числовим методом і стандартними функціями MATLAB. Час розрахунку для точності 10^{-4} на комп'ютері з процесором Celeron-1400 з 512 МБайт оперативної пам'яті типу SDRAM-100 для запропонованого аналітично-числового методу (зі стратегією автоматичного вибору кроку розв'язування) складав 0,05 с, а для функцій ode113, ode23, ode45 — відповідно 65,3 с, 46,5 с і 59 с.

Результуючі графіки кутових швидкостей двигунів та веденої ланки механізму і пружних моментів у валах під час пуску показано відповідно на рис. 3 і рис. 4.

Як еталонна, для порівняння використовувалась стандартна функція MATLAB ode113, що реалізує методи Адамса, із заданою точністю 10^{-6} . Середньоквадратична похибка аналітично-числового методу стосовно еталонного розрахунку для пружних моментів не перевищувала 0,25 %, а для кутових швидкостей — не більше 0,18 %.

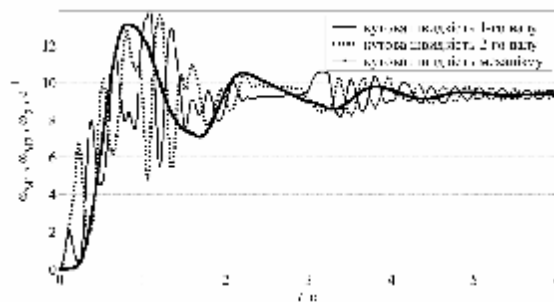


Рис. 3. Значення кутових швидкостей у приводі обертання кар'єрного екскаватора під час пуску

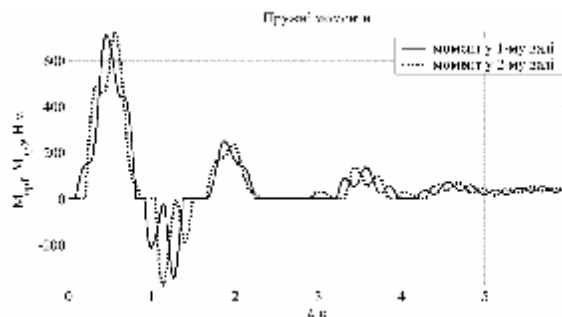


Рис. 4. Значення пружних моментів у приводі обертання кар'єрного екскаватора під час пуску

Додаткові числові експерименти показали, що заміна функцій f_1, \mathbf{L}, f_n поліноміальними апроксимаціями другого порядку в рекурентних формулах (5) і (6) дає змогу знизити відносні похибки до рівня 0,09 % за пружними моментами і до 0,065 % — за кутовими швидкостями за незначного збільшення часу розрахунку (приблизно на третину). Оскільки, на думку авторів, така точність для інженерних розрахунків є надлишковою (числові значення параметрів моделі відомі зазвичай з точністю 5 — 10 %), отримані для цього випадку результати в статті не наведено.

Розглянутий аналітично-числовий спосіб із запропонованою в статті заміною функцій f_1, \mathbf{L}, f_n їхніми поліноміальними апроксимаціями першого порядку, як показали подальші числові експерименти, забезпечує точність розв'язування звичайних диференціальних рівнянь на рівні неявних формул Адамса та ФДН третього-четвертого порядків і є стійким для будь-якого кроку розв'язування [9].

Висновки. Застосування аналітично-числового підходу дає змогу отримати низку переваг у комп'ютерному моделюванні механічних та електромеханічних систем: розв'язок існує за наявності розривних функцій у проміжних координатах стану системи, що дає змогу без ускладнень для числового процесу моделювати зазори та сухе тертя в механічних передачах; вирішена проблема числової стійкості результуючої комп'ютерної моделі; вища швидкодія (практично на 2 — 3 порядки) моделювальних рекурентних рівнянь порівняно з класичними числовими методами розв'язування звичайних диференціальних рівнянь, що дає можливість їхнього застосування у системах реального часу.

Література

1. *The MathWorks, Inc. Numerical Computing with MATLAB.* — 2004. — <http://www.math-works.com/mo-ler>.
2. *Netlib Repository* (a collection of mathematical software, papers and databases). — 2007. — <http://www.net-lib.org/ode/>.
3. *Козлов О. С., Скворцов Л. М., Ходаковский В. В.* Решение дифференциальных и дифференциально-алгебраических уравнений в программном комплексе “МВТУ”. — 2005. — <http://model.su-su.ru/-mvtu/20051121.html>.
4. *Shampine L., Reichelt M.* The MATLAB ODE Suite. — 1997. — http://-www.mathworks.com/access/help-desk/-help/pdf_doc/other-docs/ode_suite.pdf.
5. *Мороз В.* Особливості застосування числових методів у моделюванні сучасних електроприводів // Теоретична електротехніка. — 2005. — Вип. 58. — С. 130—137.
6. *Макаров И.М., Менский Б.М.* Линейный автоматические системы (элементы теории, методы расчета и справочный материал). 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Машиностроение, 1982. — 504 с.
7. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. — М.: Наука, 1971. — 288 с.

8. *Мороз В.* Застосування інтегралу згортки для синтезу цифрових систем // Вісник Хмельницьк. нац. ун-ту. Т. 2. Технічні науки. — 2007. — №2. — С. 75—78.

9. *Мороз В.* Ефективні рекурентні формули для комп'ютерного моделювання електромеханічних систем // Вісник Нац. ун-ту “Львівська політехніка” “Електроенергетичні та електромеханічні системи”. — 2007. — №597. — С. 3—11.

10. *Арушанян О. Б., Залёткин С. Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений. — 2002. — http://www.srcc.msu.su/num_an-al/list_-wrk/sb3_-doc/part6.htm.

11. *MATLAB 6.5. Rel. 13. User's Guide. Getting Started with MATLAB.* — 2002.

12. *Костинюк Л., Мороз В., Паранчук Я.* Моделювання електроприводів: Навч. посібник. — Львів: Вид-во Нац. ун-ту “Львівська політехніка”, 2004. — 404 с.

Отримана 20.04.08

L. Kostynjuk, V. Moroz

Semi-analytic computer simulation method of the elastic joints mechanical systems

National University “Lvivska Politechnika”, Lviv

The semi-analytic method for computer simulation of the transient of the mechanical systems with the elastic joints based on convolution integral with nonzero initial conditions was described in this paper. The advantage of this method was demonstrated using many-mass elastic joint computer model.

ЗІ ОІ ДІ А О З Ю

1-а Міжнародна науково-технічна конференція **ТЕОРІЯ ТА ПРАКТИКА РАЦІОНАЛЬНОГО ПРОЕКТУВАННЯ, ВИГОТОВЛЕННЯ І ЕКСПЛУАТАЦІЇ МАШИНОБУДІВНИХ КОНСТРУКЦІЙ**

Мінісимпозіуми:

„Проблеми проектування, ресурсу та безпеки експлуатації конструкцій, споруд і машин”

„Стан і перспективи впровадження комп'ютерно-інтегрованого виробництва у машинобудуванні”

22 — 24 жовтня 2008 р., м. Львів, Україна

Тематика конференції:

1. Конкурентоспроможність продукції машинобудування України в умовах глобалізації.
2. Автоматизація проектування, підготовки і управління виробництвом.
3. Моделювання механічних систем.
4. Структурно-параметричний синтез і оптимізація машинобудівних конструкцій.
5. Теорія машин і механізмів.
6. Динаміка та міцність машин.
7. Теорія коливань і захист від вібрацій.
8. Матеріалознавство.
9. Трибологія.
10. Механіка руйнування матеріалів та міцність конструкцій.

11. Новітні технології у машинобудуванні.
12. Проектування і технологія виготовлення зварних конструкцій.
13. Діагностика та прогнозування залишкового ресурсу конструкцій та споруд тривалої експлуатації.
14. Проблеми якості та контролю в машинобудуванні.

Адреса для кореспондування:

Кіндрацькому Б. І.
А/с 6758, м. Львів, 79058, Україна
E-mail: me@in.lviv.ua
<http://znc.com.ua/ukr/conf/index.php>
Тел.: 38 (032) 258-23-81; 38 (032) 231-92-99;
(38) 0679998734