М. Дудик

Доцент, канд. фіз.-мат. наук,
Уманський державний
педагогічний університет,
м. Умань

В. Дякон

Доцент, канд. фіз.-мат. наук,
Європейський університет,
м. Умань

А. Красільніков

Механік

Уманський державний
педагогічний університет,
м. Умань

УДК 539.375

РОЗРАХУНОК ПЛАСТИЧНОЇ ЗОНИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ В КІНЦІ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ З ГЛАДКИМ КОНТАКТОМ БЕРЕГІВ

У рамках моделі Комніноу методом Вінера-Хопфа виконано розрахунок початкової пластичної зони передруйнування в кінці міжфазної тріщини з гладким контактом берегів. Пластична зона моделюється лінією ковзання, що виходить з вершини тріщини під кутом до межі поділу матеріалів. Отримані характеристичне рівняння задачі і вирази для довжини пластичної зони та швидкості дисипації в ній енергії. Досліджені різні критерії вибору кута напряму поширення зони.

пластина, міжфазна тріщина, пластична зона

Розв'язок задачі теорії пружності для кусково-однорідного тіла з тріщиною, розташованою на межі поділу двох різних середовищ, отриманий вперше М. Вільямсом [1], виявив просторові осциляції напружень і зміщень, які при наближенні до вершини тріщини призводять до фізично некоректного взаємного перекриття берегів і нескінченої кількості зміни знаків напружень. Для розв'язання цієї проблеми М. Комніноу запропонував модель [2], згідно з якою в кінці тріщини виникає мала область контакту берегів, що усуває вказані осциляції. Проте при цьому у вершині тріщини зберігається концентрація напружень, яка повинна приводити до виникнення і розвитку в її околі зони передруйнування. В [3] виконано розрахунок початкової пластичної зони передруйнування в кінці тріщини у кусково-однорідному пружно-пластичному тілі на етапі, коли її розмір істотно менший за довжину тріщини, але достатньо великий, щоб областю контакту берегів можна було знехтувати.

Мета статті — дослідити початковий етап розвитку пластичної зони передруйнування у пружно-пластичному тілі, коли її розмір істотно менший за довжину контактної зони.

1. Постановка задачі. В умовах плоскої деформації розглядається задача про розрахунок початкової пластичної зони передруйнування в околі тріщини, розташованої на межі поділу двох різних однорідних ізотропних пружно-пластичних матеріалів.

У рамках моделі Комніноу тріщина з контактуючими без тертя берегами подана математичним розрізом, на якому допускається лише розрив дотичних зміщень. Відповідно до гіпотези локалізації [4] пластична зона моделюється нахиленою під деяким кутом α до межі поділу лінією розриву дотичного зміщення, на якій дотичне напруження дорівнює межі текучості при зсуві σ_s матеріалу, в якому вона розвивається.

На початковому етапі розвитку зони передруйнування її довжина l значно менша не лише від довжини тріщини й інших характерних розмірів тіла в її околі, але й довжини контактної зони. Оскільки для дослідження зони передруйнування достатньо знати напружено-деформований стан в її околі, це дає змогу в якості розв'язку відповідної статичної задачі теорії пружності розглядати розв'язок задачі для кусково-однорідної ізотропної пружно-пластичної площини, що складається з двох півплощин і містить на їхній межі півнескінченний розріз з гладким контактом берегів, з кінця якого виходить бічна лінія розриву у напрямі пластичнішого матеріалу з пружними сталими E_1, $í_1$.

На нескінченості головні члени розкладу напружень в асимптотичні ряди збігаються з домінуючим поблизу вершини тріщини розв'язком аналогічної задачі без зони передруйнування, який містить довільну сталу k_{II} — коефіцієнт інтенсивності напружень, що характеризує інтенсивність зовнішнього поля і вважається заданим за умовою задачі.

Граничні умови задачі мають такий вигляд:

$$\theta=0,\ <\sigma_\theta>=<\tau_{r\theta}>=0,\ \ <u_\theta>=<u_r>=0;$$
$$\theta=\alpha,\ <\sigma_\theta>=<\tau_{r\theta}>=0,\ \ <u_\theta>=0;$$
$$\theta=\pm\pi,\ <\sigma_\theta>=0,\ \tau_{r\theta}=0,\ \ <u_\theta>=0; \qquad (1.1)$$
$$\theta=\alpha,\ r<l,\ \tau_{r\theta}=\pm\tau_s;\ \theta=\alpha,\ \ r>l,\ \ <u_r>=0; \quad (1.2)$$
$$\theta=\alpha,\ r\to\infty,\ \tau_{r\theta}=\frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi r}}F(\alpha)+o\left(1/r\right)\ , \quad (1.3)$$

де

$$F(\alpha)=\frac{1}{4(1+e\chi_2)}\Big\{(1+e\chi_2)\cos\left(\alpha/2\right)+$$
$$+\left[2(e+\chi_1)+(1+e\chi_2)\right]\cos\left(3\alpha/2\right)\Big\},$$
$$e=\frac{1+\nu_2}{1+\nu_1}e_0, e_0=\frac{E_1}{E_2},\chi_{1(2)}=3-4\nu_{1(2)};$$

$\langle f\rangle$ — стрибок величини f; E_1,E_2 та ν_1, ν_2 — модулі Юнга і коефіцієнти Пуасона з'єднаних матеріалів.

Біля вільного кінця пластичної лінії в силу загальних положень про поведінку напружень в околі кутових точок пружних тіл [5, 6] реалізується асимптотика, яка являє собою задовольняючий умову неперервності зміщень асимптотично найбільший розв'язок однорідної задачі теорії пружності для площини, що містить півнескінченну пряму лінію розриву дотичного зміщення. Зокрема, існують асимптотики:

$$\theta=\alpha,\ r\to l+0,\ \tau_{r\theta}\sim\frac{K}{\sqrt{2\pi(r-l)}};$$
$$\theta=\alpha,\ r\to l-0,\ \left\langle\frac{\partial u_r}{\partial r}\right\rangle\sim-\frac{4\left(1-\nu_1^2\right)}{E_1}\frac{K}{\sqrt{2\pi(l-r)}}, \quad (1.4)$$

де K — коефіцієнт інтенсивності напружень у кінці лінії розриву, який визначають у ході розв'язання задачі.

Розв'язок сформульованої крайової задачі теорії пружності подамо у вигляді суми розв'язків таких двох задач. Перша відрізняється тим, що в (1.2) замість першої умови візьмемо

$$\theta=\alpha,\ r<l,\ \tau_{r\theta}=\tau_1-\frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi r}}F(\alpha)\ \ (\tau_1=\pm\tau_s), \quad (1.5)$$

а на нескінченності напруження затухають як $o(1/r)$.

Друга задача — аналогічна задача без лінії розриву, розв'язок якої відомий, тому достатньо знайти розв'язок першої задачі.

2. Розв'язок рівняння Вінера-Хопфа і розрахунок початкової пластичної зони. Для знаходження розв'язку задачі скористаємось методом Вінера-Хопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Меліна [7, 8].

Застосувавши перетворення Меліна до рівнянь рівноваги, умови спільності деформацій, закону Гука, умов (1.1) та врахувавши умову (1.5) і другу умову (1.2), приходимо до функціонального рівняння Вінера-Хопфа першої задачі:

$$\Phi^+(p)+\frac{\tau_1}{p+1}+\frac{\tau_2}{p+1/2}=ctg\,p\pi G(p)\Phi^-(p),$$
$$\Phi^+(p)=\int_1^\infty\tau_{r\theta}(\rho l,\alpha)\rho^p d\rho,$$
$$\Phi^-(p)=\frac{E_1}{4\left(1-\nu_1^2\right)}\int_0^1\left\langle\frac{\partial u_r}{\partial r}\right\rangle\Bigg|_{\substack{r=\rho l\\ \theta=\alpha}}\rho^p d\rho,$$
$$\tau_2=-\frac{k_{II}F(\alpha)}{\sqrt{2\pi l}},\ G(p)=\frac{D_1(p,\alpha)}{D_0(p)},$$
$$D_0(p)=2(e+\chi_1)(1+e\chi_2)\left[(e+\chi_1)+(1+e\chi_2)\right]\cos^2 p\pi,$$
$$D_1(p,\alpha)=(1+\chi_1)^3\delta_1+e(1+\chi_2)(1+\chi_1)^2\delta_2+$$
$$+(1-e)(1+\chi_1)^2\delta_3+(1-e)^2(1+\chi_1)\delta_4+$$
$$+e^2(1+\chi_2)^2(1+\chi_1)\delta_5+e(1+\chi_2)(1-e)^2\delta_6+$$
$$+e^2(1+\chi_2)^2(1-e)\delta_6+e(1+\chi_2)(1+\chi_1)(1-e)\delta_7,$$
$$\delta_1=\sin^2\alpha-\sin^2 p(\pi-\alpha),$$
$$\delta_2=p\sin 2\alpha\sin 2p\alpha+2\left[\sin^2\alpha\cos 2p\alpha+\right.$$
$$\left.+\sin^2 p\alpha-\sin^2 p\pi\right],$$
$$\delta_3=4\sin^2 p\alpha\left[\sin^2 p(\pi-\alpha)-\sin^2\alpha\right]+$$
$$+\sin 2p\alpha\left[p\sin 2\alpha-\sin 2p(\pi-\alpha)\right],$$
$$\delta_4=4\left[\sin^2\alpha\sin^2 p\alpha+\sin p\alpha\sin p(\pi-\alpha)\cos p\pi-\right.$$
$$\left.-p^2\sin^2\alpha\cos^2 p(\pi-\alpha)\right]-p\sin 2\alpha\left[\sin 2\alpha-\right.$$
$$\left.-\sin 2p(\pi-\alpha)\right],$$
$$\delta_5=-4p^2\sin^2\alpha\sin^2 p\alpha+p\sin 2\alpha\sin 2p\alpha+\sin^2\alpha-$$
$$-\sin p(\pi-\alpha)\left[\sin p\pi\cos p\alpha+3\cos p\pi\sin p\alpha\right],$$
$$\delta_6=2\cos p\pi\left[2\sin p(\pi-\alpha)\sin p\alpha+p\sin 2\alpha\times\right.$$
$$\left.\times\sin p(\pi-2\alpha)-2p^2\sin^2\alpha\cos p(\pi-2\alpha)\right],$$
$$\delta_7=-4p^2\sin^2\alpha\left[\sin^2 p\alpha+\cos^2 p(\pi-\alpha)\right]+$$
$$+p\sin 2\alpha\sin 2p(\pi-\alpha)+4\sin^2\alpha\sin^2 p\alpha.$$

Тут $-\varepsilon_1 < Re\,p < \varepsilon_2$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — достатньо малі додатні числа.

Виконавши факторизацію коефіцієнта рівняння Вінера-Хопфа на уявній осі за формулою Гахова і використовуючи принцип аналітичного продовження, отримаємо, аналогічно [9], точний розв'язок рівняння, який має такий вигляд:

$$\Phi^+(p) = -K^+(p)G^+(p)\left\{\frac{\tau_1}{p+1}\left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)} - \right.\right.$$

$$\left.-\frac{1}{K^+(-1)G^+(-1)}\right] + \frac{\tau_2}{p+\tfrac{1}{2}}\left[\frac{1}{K^+(p)G^+(p)} - \right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{K^+\left(-\tfrac{1}{2}\right)G^+\left(-\tfrac{1}{2}\right)}\right]\right\} \quad (Re\,p < 0);$$

$$\Phi^-(p) = \frac{pG^-(p)}{K^-(p)}\left\{\frac{\tau_1}{(p+1)K^-(-1)G^-(-1)} + \right.$$

$$\left.+\frac{\tau_2}{\left(p+\tfrac{1}{2}\right)K^+\left(-\tfrac{1}{2}\right)G^+\left(-\tfrac{1}{2}\right)}\right\} \quad (Re\,p < 0);$$

$$exp\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{ln\,G(z)}{z-p}dz\right] = \begin{cases} G^+(p), Re\,p < 0 \\ G^-(p), Re\,p > 0\end{cases};$$

$$K^\pm(p) = \frac{\Gamma(1\mp p)}{\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\mp p\right)}, \qquad (2.1)$$

де $\Gamma(z)$ — гамма-функція Ейлера.

Використовуючи теорему абелевого типу [7] і асимптотики (1.4) разом з (2.1), знаходимо асимптотику трансформанти $\Phi^-(p)$ при $p \to \infty$:

$$\Phi^-(p) \sim -\frac{K}{\sqrt{2pl}} = \frac{1}{\sqrt{p}}\left\{\frac{\tau_1}{K^-(-1)G^-(-1)} + \right.$$

$$\left.+\frac{\tau_2}{K^+\left(-\tfrac{1}{2}\right)G^+\left(-\tfrac{1}{2}\right)}\right\},$$

звідки знаходимо коефіцієнт інтенсивності напружень у кінці пластичної лінії:

$$K = -\sqrt{2l}\left\{\frac{\tau_1}{K^-(-1)G^-(-1)} + \frac{\tau_2}{K^+\left(-\tfrac{1}{2}\right)G^+\left(-\tfrac{1}{2}\right)}\right\}. \quad (2.2)$$

Прирівнюючи його до нуля, внаслідок вимоги обмеженості напружень у кінці пластичної лінії, отримаємо вираз для визначення її дожини:

$$l = \left(\frac{k_{II}}{\tau_s}\right)^2 R, \quad R = \frac{8}{\pi^3}\left[\frac{F(\alpha)G_1}{G_2}\right]^2,$$

$$G_1 = exp\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{ln\,G(it)}{t^2+1}dt\right], \quad G_2 = exp\left[\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{ln\,G(it)}{4t^2+1}dt\right]. \quad (2.3)$$

Згідно з (2.3) довжина пластичної зони передруйнування залежить від зовнішнього навантаження тільки через коефіцієнт інтенсивності напружень k_{II} у кінці контактної зони. Довжина пластичної лінії обернено пропорційна межі текучості матеріалу, в якому відбувається її розвиток.

3. Порівняльний аналіз критеріїв вибору напряму поширення пластичної зони. На сьогодні немає загальноприйнятих критеріїв визначення напряму поширення ліній пластичності. У зв'язку з цим, для знаходження кута нахилу початкової пластичної зони розглянемо і проаналізуємо такі критерії:

1) критерій максимальних дотичних напружень у кінці тріщини перед утворенням зони. Йому відповідає максимум функції $F(\alpha)$;

2) критерій максимальної швидкості дисипації енергії в пластичній зоні;

3) критерій максимуму довжини зони передруйнування;

4) критерій максимуму коефіцієнта інтенсивності напружень у кінці зони при прямуванні її довжини до 0;

5) критерій максимуму показника ступеня сингулярності в кінці тріщини після утворення зони.

Для використання другого критерію обчислимо величину дисипації пружної енергії в пластичній зоні [10], яка виявляється пов'язаною з трансформантою $\Phi^-(1)$:

$$W(t,\alpha) = \int_0^l \tau_{r\theta}\langle u_r\rangle\Big|_{\theta=\alpha} dr = -\frac{4\left(1-\nu_1^2\right)}{E_1}l^2\tau_s\Phi^-(1).$$

Використовуючи знайдений вище розв'язок, отримаємо

$$W(t,\alpha) = \frac{4^4\left(1-\nu_1^2\right)k_{II}^4(t)}{3\pi^3E_1\tau_s^2}\left[\frac{F(\alpha)^2G_1}{G_2^2}\right]^2.$$

Звідси знаходимо швидкість дисипації енергії

$$\frac{dW(t,\alpha)}{dt} = \frac{4^5\left(1-\nu_1^2\right)k_{II}^2}{3\pi^3E_1\tau_s^2}\left[\frac{F(\alpha)^2G_1}{G_2^2}\right]^2 k_{II}\frac{dk_{II}}{dt}.$$

Надалі припускається, що коефіцієнт інтенсивності напружень k_{II} є зростаючою додатною або спадаючою від'ємною функцією навантаження.

Виконання граничного переходу $l \to 0$ у формулі (2.2) дає такий вираз для застосування критерію 4:

$$\lim_{l\to 0} K = k_{II}\sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{F(\alpha)}{G_2}.$$

Таблиця 1

Значення кута

Пара-метр	E_0/E_1				
	0,2	0,6	1	1,4	1,8
$\alpha°$	73,6	71,5	70,5	72,3	74,1
Λ	-0,482	-0,495	-0,5003	-0,537	-0,565
R	123,03	221,68	360,27	511,93	697,13

Нарешті, показник ступеня сингулярності в кінці тріщини після утворення початкової пластичної зони є коренем характеристичного рівняння задачі $D_1\left(-1-\lambda,\alpha\right)=0$.

Розрахунок кута нахилу початкової пластичної зони за критеріями 1 — 4 приводить до передбачення її утворення на межі поділу середовищ, що суперечить експериментальним даним для тріщини в однорідному тілі в умовах плоскої деформації [11]. Критерій 5 для різних поєднань матеріалів приводить до кутів нахилу початкової пластичної зони в межах 70 — 75° і краще узгоджується з експериментом та аналогічними результатами Райса, Черепанова та інших дослідників для тріщини в однорідному середовищі (див. огляд в [4]), але не дає залежності кута від величини і характеру прикладеного навантаження.

У табл. 1 наведені значення кута, що відповідає максимальному значенню найменшого кореня характеристичного рівняння, величина цього кореня, який свідчить про збереження концентрації напружень після утворення пластичної лінії, та множника R, який входить у вираз для довжини лінії. Розрахунки виконані для однакових значень коефіцієнтів Пуасона з'єднаних матеріалів $\nu_1=\nu_2=0{,}25$.

Незадовільні висновки за критеріями 1 — 4 свідчать про обмеженість розглянутої моделі початкової пластичної зони в кінці міжфазної тріщини з гладким контактом берегів. Її удосконалення можливе, перш за все, шляхом врахування тертя берегів тріщини в області контакту.

Література

1. *Williams M.L.* The Stresses Around a Fault or Crack in Dissimilar Media // Bulletin of the Seismological Society of America. — 1959. — V. 49. — P. 199—204.

2. *Comninou M.* The interface crack // J. Appl. Mech. — 1977. — V. 44, №4. — P. 631—636.

3. *Каминский А.А., Дудик М.В., Кипнис Л.А.* О направлении развития тонкой пластической зоны предразрушения в вершине трещины на границе раздела различных сред // Прикл. механика. — 2006. — Т. 42, №2. — С. 14—23.

4. *Панасюк В.В., Саврук М.П.* Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування // Фіз.-хім. механіка матеріалів. — 1992. — №1. — С. 49—68.

5. *Партон В.З., Перлин П.И.* Методы математической теории упругости. — М.: Наука, 1981. — 688 с.

6. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. — М.: Наука, 1974. — 640 с.

7. *Нобл Б.* Применение метода Винера-Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 279 с.

8. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. — Л.: Наука, 1967. — 402 с.

9. *Дудик М.В., Кипнис Л.А., Павленко А.В.* Расчет пластических линий скольжения в конце трещины, выходящей на границу раздела различных сред // Прикл. механика. — 2002. — Т. 38, №2. — С. 90—95.

10. *Черепанов Г.П.* К общей теории разрушения // Физ.-хим. механика материалов. — 1986. — №1. — С. 36—44.

11. *Ярема С.Я., Манюк З.М.* Пластическая деформация у кольцевой трещины в цилиндрических образцах при различных температурах и скоростях нагружения // Физ.-хим. механика материалов. — 1971. — №2. — С.15—18.

Отримана 25.05.08

Dudik M., Diakon V., Krasilnikov A.

The calculation of the plastic prefracture zone at the end of the interfacial crack with smooth contact of the lips

Uman State Pedagogical University, Uman

The calculation of the initial plastic prefracture zone near the end of the interfacial crack with smooth contact between the crack lips in piece-homogeneous isotropic body under plane strain by the Wiener-Hopf method is carried out. The prefracture zone is modeled by the slip line emerging from the end of the crack at the angle to interface. The various criteria of the choice of the prefracture zone direction are investigated.

² í ô î ð ì àö³ÿ

Міжнародна науково-технічна конференція

ПОШКОДЖЕННЯ МАТЕРІАЛІВ ПІД ЧАС ЕКСПЛУАТАЦІЇ, МЕТОДИ ЙОГО ДІАГНОСТУВАННЯ І ПРОГНОЗУВАННЯ, IC-DMDP

21 — 24 вересня 2009 р. м. Тернопіль, Україна

Тематика конференції:

1. Розсіяне і локалізоване пошкодження матеріалів.
2. Діагностування пошкоджень.
3. Методи описування і прогнозування пошкоджуваності матеріалів.
4. Оцінювання залишкового ресурсу елементів конструкцій.

Адреса Оргкомітету:

ТДТУ імені Івана Пулюя,
вул. Руська, 56, Тернопіль, 46001, Україна
Тел.: +380 (352) 25 35 09; Факс: +380 (352) 25 49 83
e-mail: snt@tu.edu.te.ua
http//www.tu.edu.te.ua/dmdp/