

УДК 539.3

## ЗАДАЧІ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТІЛ ПРИ МАГНІТНО-ІМПУЛЬСНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

**Д. Лавінський**

Доцент, канд. техн. наук,  
Національний технічний  
університет «ХПІ»,  
м. Харків

*Запропоновано математичну постановку задачі пружного-пластичного деформування системи контактної взаємодіючих тіл при магнітно-імпульсному навантаженні. Рівняння стану визначено за законами пластичної течії. Методом розв'язування обрано метод скінченних елементів у переміщеннях. Розв'язано, як приклад, задачу пружно-пластичного деформування кутової заготовки при дії плоскої системи сил імпульсного магнітного поля. Досліджено технологічні операції виправлення заокруглення, що виникло в результаті згину тонкої листової заготовки. Одержані величини зовнішнього тиску і зроблені рекомендації для проведення подібних технологічних операцій.*

**імпульсне магнітне поле, пружно-пластичне деформування, пластична течія, метод скінченних елементів**

**Вступ.** Широкий клас технологічних процесів, пов'язаних з необоротним пластичним деформуванням, умовно об'єднаний назвою: обробка металів тиском (ОМТ). В останні десятиліття, крім традиційних методів ОМТ, усе ширше застосування знаходять альтернативні процеси обробки, коли на металеву заготовку діють імпульсні електромагнітні поля. Такий клас технологічних процесів відомий як магнітно-імпульсна обробка металів (МІОМ). МІОМ має низку переваг перед традиційними методами ОМТ, основним з яких є відсутність контактної впливу (з боку пуансона) на оброблювану заготовку. Таким чином, з'являється можливість обробляти поверхні з уже готовими покриттями. Цей факт відкриває широкі можливості для використання МІОМ в автомобільній, авіаційній, радіотехнічній, хімічній та іншій галузях промисловості.

При проектуванні технологічних операцій МІОМ виникають задачі аналізу напружено-деформованого стану (НДС). Це аналіз НДС систем, що збуджують

магнітне поле, так званих індукторів, з метою оцінювання їхньої міцності та жорсткості, й аналіз НДС заготовок, що деформуються. У першому випадку умовою працездатності індукторів є незмінність їхньої форми та розмірів, тобто необхідно розв'язувати задачі магніто-пружності, у другому випадку потрібно також аналізувати пластичне деформування заготовки.

Слід зазначити, що багато вітчизняних та закордонних вчених у різні часи приділяли особливу увагу проблемам аналізу термомеханіки за наявності електромагнітного поля. Вагомий внесок зробили С.А. Амбрацумян, Я.Й. Бурак, О.С. Вольмір, О.Р. Гачкевич, О.М. Гузь, С.А. Калосеров, Я.С. Підстригач, Л.А. Фільштинський та інші. Проте переважна більшість подібних досліджень спрямована на аналіз пружної поведінки матеріалу, а розв'язки, зазвичай, наведені для тіл канонічної форми.

Таким чином, проблема створення ефективних методів розрахунку магнітопружності для тіл довільної форми сьогодні є досить актуальною.

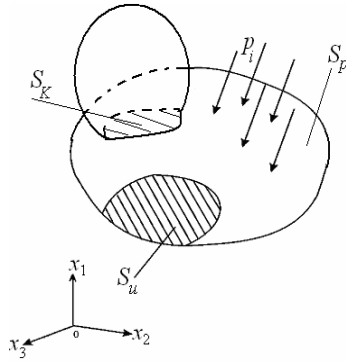


Рис. 1

**Математична постановка задачі.** Розглянемо загальну постановку задачі пружно-пластичного деформування системи контактної взаємодіючих тіл при магнітно-імпульсному навантаженні. Нехай система взаємодіючих тіл задана в декартових координатах  $x_i, i=1,2,3$ . Тіло об'ємом  $V_j$  має поверхню  $S_j: S_j = S_{jp} \cap S_{ju} \cap S_{jk}$ , де  $S_{jp}, S_{ju}$  та  $S_{jk}$  – частини поверхні тіла, на яких задані зовнішні розподілені сили, умови закріплення та умови контактної взаємодії (рис. 1).

Електромагнітні процеси МІОМ при відсутності вільних зарядів описуються такою системою фундаментальних рівнянь Максвелла [1]:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \varepsilon_c \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{j}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_c \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\vec{j}, \vec{E}, \vec{H}$  – густина струму, напруженості електричного й магнітного полів у підобласті,  $\mu_c, \varepsilon_c$  – магнітна й електрична проникність.

Нехтуючи конвекційними струмами, рівняння (1) можна доповнити матеріальними співвідношеннями:

$$\vec{D} = \varepsilon_c \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_c \vec{H}, \quad \vec{j} = \gamma_c \vec{E} + \gamma_c \left[ \dot{\vec{u}} \times \vec{B} \right], \quad (2)$$

де  $\vec{D}, \vec{B}$  – вектори індукції електричного й магнітного полів у підобласті,  $\gamma_c$  – питома електрична провідність матеріалу підобласті.

Повна система рівнянь щодо компонентів тензорів напружень, деформацій і вектора переміщень, при заданих об'ємних і поверхневих силах, запишеться в такому вигляді. Рівняння рівноваги

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad x_1, x_2, x_3 \in V, \quad (3)$$

де  $s_{ij}$  – компоненти тензора напружень,  $f_i$  – компоненти вектора об'ємних пондеромоторних сил Лоренца, вектор яких у цьому випадку може бути обчислений так:

$$\vec{F}_b(x_i) = \mu_c [\vec{j} \times \vec{H}].$$

Геометричні співвідношення Коші для малих деформацій

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (u_{j,i} + u_{i,j}), \quad (4)$$

де  $e_{ij}$  – компоненти тензора деформацій,  $u_i$  – компоненти вектора переміщень.

Умови на поверхні, в припущенні відсутності поверхневих струмів і зарядів, набувають вигляду:

$$\sigma_{ij} n_j = p_{in}, \quad \forall x \in S_p, \quad (5)$$

Величини, що характеризують електромагнітний вплив, які входять у рівняння (3), визначаються шляхом інтегрування фундаментальних рівнянь Максвелла (1). Конкретний вид розв'язку для напруженості сильно залежить від умов геометрії розглянутого тіла. У багатьох випадках є можливість зведення об'ємних пондеромоторних сил до розподілених поверхневих тисків, що задовольняють умови статичної еквівалентності в рамках постановки задачі. Зокрема, таке спрощення можливо й виправдане при розгляді пластичного деформування тонкостінних заготовок.

У певних випадках деформування заготовки потрібно розглядати разом з матрицею, у цьому випадку для точок тіл, які безпосередньо взаємодіють, формулюються умови спряження:

$$u_n^{m-1} + u_n^{m+1} - \delta_{on}^m \leq 0, \quad \sigma_{nn}^m \leq 0, \quad (6)$$

де  $u_n^{m-1}, u_n^{m+1}, \delta_{on}^m$  – нормальні переміщення точок поверхонь тіл і початковий зазор (натяг),  $\sigma_{nn}^m$  – нормальне напруження на контактуючих поверхнях (лініях).

Умови фрикційної взаємодії на  $S_k$  приймаються у формі закону Кулона. При цьому компоненти поверхневих нормальних і дотичних контактних напружень зв'язані відомими співвідношеннями, що відображають «ковзання» контактуючих ділянок підобластей:

$$|\sigma_{nt}| = f_{mn} \sigma_{nn}, \quad (7)$$

де  $f_{mn}$  – коефіцієнт тертя ковзання, що залежить від матеріалів тіл, які контактують.

Узагальнені рівняння стану, що встановлюють зв'язок між напруженнями й деформаціями в точках тіл, які деформуються пружно, можуть бути представлені тензорно-лінійними співвідношеннями виду

$$\varepsilon_{ij} = A_{ijkl} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} \Delta T, \quad (8)$$

де  $\varepsilon_{ij}, \sigma_{kl}$  – компоненти тензорів деформацій і напружень,  $A_{ijkl}$  – компоненти тензора, прийнятого для опису властивостей матеріалу,  $\alpha_{ij}$  – компоненти тензора властивостей температурного розширення матеріалу.

У межах лінійної пружності матеріалу співвідношення (8) відповідають узагальненому закону Гука. Для ізотропного матеріалу тензор матеріальних сталей визначається так:

$$A_{ijkl} = \frac{1}{E} [(1 + \nu) \delta_{ik} \delta_{jl} - \nu \delta_{ij} \delta_{kl}], \quad (9)$$

де  $E, \nu$  – модуль пружності й коефіцієнт Пуасона.

Рівняння стану визначено за законами пластичної течії – рівняннями Прандтля-Рейса [2], де залежність між інтенсивностями напружень і деформацій приймається у вигляді  $\sigma_i = H(\int d\varepsilon_i^p, T)$ . Ці рівняння у приростах пластичних деформацій і напружень подаються у вигляді

$$d(\varepsilon_{ij})_p = \frac{1}{2G} \left[ d\sigma_{ij} - \delta_{ij} \frac{3\nu}{1+\nu} d\sigma_0 \right] + \frac{1}{\sigma_i} \sqrt{\frac{3}{2}} d(\varepsilon_{ij})_p d(\varepsilon_{ij})_p (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0), \quad (10)$$

де  $\sigma_0 = 1/3\sigma_{kl}\delta_{kl}$ ,  $\varepsilon_0 = 1/3\varepsilon_{kl}\delta_{kl}$  – середні напруження й деформації.

Закон пластичної течії для ізотропного матеріалу з трансляційним лінійним зміцненням приймаємо асоційованим з умовою пластичності:

$$\frac{3}{2} \left[ s_{ij} - \frac{2}{3} \frac{EE_T}{E - E_T} (\varepsilon_{ij})_p \right] \times \left[ s_{ij} - \frac{2}{3} \frac{EE_T}{E - E_T} (\varepsilon_{ij})_p \right] - \sigma_T^2 = 0, \quad (11)$$

де  $s_{ij}$  – девіатор напружень;  $E_T$  – модуль зміцнення.

У розглянутому випадку зв'язок між приростами деформацій і напружень для неізотермічної течії можна записати так:

$$d\varepsilon_{ij} = A_{ijkl} d\sigma_{ij} + \phi_{ij} dT, \quad (12)$$

$$A_{ijkl} = A_{ijkl}^e + A_{ijkl}^p, \quad A_{ijkl}^p = \frac{3}{2\sigma_i} F_\sigma(\sigma_i, T) s_{ij} s_{kl},$$

$$\phi_{ij} = \phi_{ij}^e + \phi_{ij}^p, \quad (13)$$

$$\phi_{ij}^e = \delta_{ij} \frac{d\varepsilon^T}{dT} - \frac{1}{E^2} \frac{dE}{dT} [(1+\nu)\sigma_{ij} - 3\nu\delta_{ij}\sigma_0] + \frac{1}{E} \frac{d\nu}{dT} (\sigma_{ij} - 3\delta_{ij}\sigma_0),$$

$$\phi_{ij}^p = -F_\sigma(\sigma_i, T) \frac{\partial F_\sigma}{\partial T} s_{ij}, \quad F_\sigma(\sigma_i, T) = \frac{3}{2\sigma_i} \left( \frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right).$$

У цих рівняннях  $A_{ijkl}^e$  – тензор пружних властивостей матеріалу, що обчислюють за формулою (9),  $E_k$  – дотичний модуль.

Для тіл складної геометрії при різноманітних способах закріплення та навантаження найефективніше використовувати числові методи розв'язування поставленої задачі. Одним з найуніверсальніших методів є метод скінчених елементів (МСЕ). В основу методу покладене варіаційне рівняння Лагранжа, що зводить пошук розв'язку вихідної задачі до пошуку мінімуму повної потенціальної енергії системи:

$$\delta(\Pi - A_V - A_{II}) = 0, \quad (14)$$

де  $\Pi$  – потенціальна енергія деформації системи,  $A_V$  – робота об'ємних сил,  $A_{II}$  – робота поверхневих сил.

**Приклад розрахунку.** Окремий клас технологічних операцій спрямований на одержання виробів з тонких листових заготовок шляхом згинання. Практика показує, що в результаті згинання в зонах кутів з'являються заокруглення, розміри яких є неприпустимими з погляду технології. Задача виправлення подібних заокруглень у практиці обробки матеріалів відома як задача «заповнення кутів» [3]. Ключовим моментом при створенні технологічної операції є розроблення схеми прикладання тиску безпосередньо в кутовій зоні. У [4] обговорювалося питання використання магнітно-імпульсного впливу на заготовку з метою «заповнення кута». Було показано, що можна отримати тиск, рівнодійна якого спрямована по бісектрисі кута, причому вплив відбувається тільки в кутовій зоні. Також було з'ясовано, що проведення такої технологічної операції неможливо без використання матриці, що допомагає зберегти прямолінійні сторони кута [5]. Крім цього, використання матриці дозволяє не закріплювати заготовку, бо в зонах закріплення виникають значення інтенсивності напружень сумірні зі значеннями, які спостерігаються в зоні заокруглення.

Як приклад розрахунку НДС розглянемо пружно-пластичне деформування тонкостінної заготовки при магнітному впливі. На рис. 2 наведена принципова схема «заготовка-матриця» для подібної технологічної операції. Щоб виключити вплив матриці на електромагнітний стан заготовки, вона повинна виконуватися з непровідних матеріалів, наприклад зі склотекстоліту або деревини. Жорсткість матриці повинна бути значно вищою, ніж у заготовки. У цьому випадку це може бути досягнуто, якщо виконувати матрицю більш масивною ніж заготовка. Дослідження показали, що при товщині склотекстолітової матриці в 50 разів більшій ніж товщина сталеві заготовки, матриця практично не деформується.

Розглянемо процес деформування з метою визначення величини зовнішнього тиску, при якому в заготовці будуть спостерігатися пластичні деформації. Нехай потрібно виправити заокруглення, що виникло в результаті згину на кут  $\pi/2$  тонкої листової заготовки. Будемо вважати, що заготовка є досить протяжною вздовж ребра кута порівняно зі сторонами кута. У силу того, що тиск прикладається в площині, перпендикулярній до ребра кута, і що вздовж цього ребра тиск незмінний, задача може розглядатися в рамках плоскої деформації [2].

Задача розв'язувалась чисельно з використанням схеми МСЕ, реалізованої у вигляді розрахункового модуля для програмного комплексу SPACE-T [7]. Для побудови скінченноелементної моделі використовувався плоский

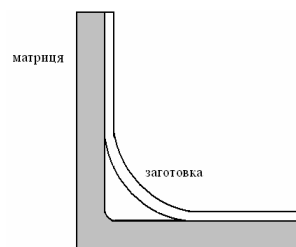


Рис. 2

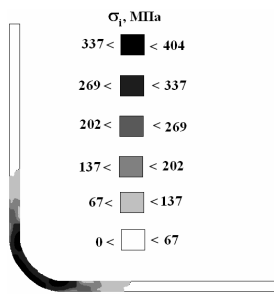


Рис. 3

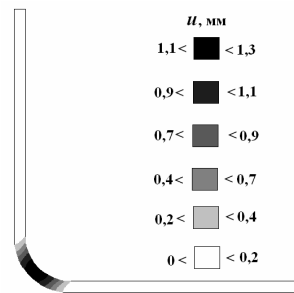


Рис. 4

восьмивузловий скінченний елемент з квадратичною апроксимацією переміщень. Матеріал заготовки сталь Ст10 (модуль пружності  $E = 200$  ГПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,27$ , межа текучості  $\sigma_r = 220$  МПа, дотичний модуль  $E_K = 20$  ГПа, межа міцності  $\sigma_B = 520$  МПа). Матриця приймалася виконаною з умовного матеріалу (модуль пружності  $E = 400$  ГПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,1$ ). Такі механічні характеристики забезпечили поведінку матриці як тіла, що не деформується, міцність матриці не оцінювалась. Геометричні розміри заготовки були прийняті такими: радіус первісного заокруглення – 4 мм, товщина – 2 мм, довжина сторони кута – 10 мм. Для матриці були прийняті такі розміри: товщина – 20 мм, довжина сторони кута – 10 мм. Зовнішні сторони матриці розглядалися жорстко закріпленими:  $u_x = u_y = 0$ . Заготовка розглядалася незакріпленою, що вільно лежить на матриці в умовах однобічного контакту. Для адекватного відображення процесів контактного деформування використовувався метод введення шару контактних скінченних елементів (КСЕ) [5]. У цьому випадку КСЕ з погляду геометричного подання вибиралася такими ж як і базові СЕ, але властивості матеріалу задавалися так, щоб КСЕ у напрямку спільної нормалі до межі контакту «опиралися» стисканню й «не опиралися» розтягу. Крім цього, жорсткість на зсув матеріалу КСЕ задавалася відповідно до (7) для коефіцієнта тертя 0.2. Спочатку був зроблений розрахунок, коли зовнішній тиск прикладався безпосередньо в області заокруглення. Виявилось, що в цьому випадку сторони заготовки відходять від відповідних поверхонь матриці. Ця обставина може призвести до викривлення форми оброблюваної заготовки. Щоб цього уникнути, очевидно потрібно прикласти зовнішній тиск на сторони кута, величина цього тиску може бути знайдена з розгляду умов рівноваги, і вона залежить від величини тиску в кутовій області.

Далі розглянемо результати деформування з метою визначення величини тиску в кутовій зоні. Виявилось, що явища виникнення пластичних деформацій у матеріалі заготовки спостерігаються при величині тиску понад 30 МПа. На рис. 3 наведений розподіл інтенсивності напружень у заготовці, коли величина тиску в кутовій області становить 100 МПа. Як видно з рисунка, вся область заокруглення перебуває в пластичному стані, максимальні значення інтенсивності становлять близько 400 МПа. Для цього матеріалу подібне значення є близьким до межі міцності, тобто зовнішнє навантаження, що прикладається, близьке до критичного, подальше збільшення зовнішнього тиску може призвести до руйнування матеріалу. На рис. 4 наведена картина розподілу результуючих перемі-

щень у заготовці. Як видно з рисунка, переміщення відмінні від нульових безпосередньо в області заокруглення, а їхні величини досить значні.

Слід зазначити, що для подібних технологічних операцій досить проблематично сформулювати загальні вимоги й умови, які б однозначно визначали кількісну картину деформування, тому що багато чого залежить від характеристик матеріалу й розмірів заготовки.

**Висновки.** Наведено математичну постановку задачі пружно-пластичного деформування системи контактної взаємодіючих тіл при магнітно-імпульсному навантаженні. Рівняння стану визначено за законами пластичної течії. Методом розв'язування задач обрано метод скінченних елементів у переміщеннях. Розглянуто приклад задачі пружно-пластичного деформування вигнутої під кутом заготовки при дії плоскої системи сил імпульсного магнітного поля. Досліджено технологічні операції виправлення заокруглення, що виникло в результаті згину тонкої листової заготовки. Отримані величини зовнішнього тиску та зроблені загальні рекомендації для проведення подібних технологічних операцій.

### Література

1. Maxwell J.C. A Treatise on Electricity and Magnetism / In 2 vol.: Vol. II. / Maxwell J.C. – Oxford: Clarendon Press, 1873. – XXIV, 445 p.
2. Зубчанинов В.Г. Основы теории упругости и пластичности: Учеб. для машиностроит. спец. вузов / Зубчанинов В.Г. – М.: Высш. шк., 1990. – 368 с.
3. Белый И.В. Справочник по магнитно-импульсной обработке металлов / Белый И.В., Фертик С.М., Хименко Л.Т. – Харьков: Вища школа. 1977. – 189 с.
4. Бондарь С.В. Определение магнитного давления в углах при деформировании листовых заготовок / Бондарь С.В., Лавинской Д.В. // Вісник Нац. техн. ун-ту «ХПІ». – Харків: НТУ „ХПІ”, 2009. - №42 – С.11-14.
5. Лавинский Д.В. Анализ упруго-пластического деформирования при моделировании операции «заполнения углов». Часть 1 / Лавинский Д.В. // Вісник Нац. техн. ун-ту «ХПІ». – Харків: НТУ „ХПІ”. – 2010. – №37. – С. 100 – 104.
6. Бондарь С.В. Программный комплекс SPACE-T для решения термоупругопластических контактных задач / Бондарь С.В., Зубатый С.С., Киркач Б.Н., Лавинский В.И. // Динамика и прочность машин. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2000. – №57. – С. 24-34.
7. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций / [Подгорный А.Н., Гонтаровский П.П., Киркач Б.Н. и др.]. – К.: Наук/ думка, 1989. – 232 с.

Отримана 02.08.11

D. Lavinsky

**Problems of solid elastic-plastic deformation under pulse-magnetic loading**

National Technical University «KhPI», Kharkiv

*Mathematical problem statement of system elastic-plastic deformation of interacting solids involving pulse-magnetic loading has proposed in this article. State equations accepted correspondingly plastic yielding theory. The finite-element method in displacements has chosen as solution method. The problem of elastic-plastic deformation of corner preform by plane force system of pulse magnetic field has solved. The technological operations for curve correction were investigated. The general recommendations for carrying out of similar technological operations have made and data of external pressure by which conditions of the technological operation achieved have obtained.*