

# СИНТЕЗ ПОЛІГАРМОНІЙНОГО ВИМІРЮВАЛЬНОГО СИГНАЛУ З БУДЬ-ЯКОЮ КІЛЬКІСТЮ ТОЧОК ПЕРЕМИКАННЯ

## SYNTHESIS OF POLIHARMONICH MEASURING SIGNAL WITH AN ARBITRARY NUMBER OF FLIP POINTS

Герасимов<sup>1</sup> С. В., д-р техн. наук., ст. наук. співр.; Дакі<sup>2</sup> О. А., канд. пед. наук, доц.;  
Яковлев<sup>3</sup> М. Ю., д-р техн. наук, ст. наук. співр.

<sup>1</sup>Харківський національний університет Повітряних сил імені Івана Кожедуба

<sup>2</sup>Державний університет інфраструктури та технологій, м. Київ

<sup>3</sup>Національна академія Національної гвардії України, м. Харків

<https://doi.org/10.23939/istcmtm2018.02.073>

**Анотація.** Показано особливості застосування полігармонійних вимірювальних сигналів для контролю технічного стану динамічних об'єктів. Реалізація традиційного підходу до оцінювання характеристик амплітудно-частотного спектра динамічних об'єктів, що ґрунтується на застосуванні генераторів сигналів синусоїдної форми, потребує дуже трудомістких вимірювань, оскільки необхідно послідовно задавати на генераторі контрольні частоти об'єкта, технічний стан якого контролюють. Показано, що уникнути цього недоліку можна за рахунок використання полігармонійних вимірювальних сигналів. Обґрунтовано, що найбільші функціональні можливості з управління спектральним складом надають полігармонійні сигнали зі складним законом модуляції тривалості імпульсів, коли необхідний спектр сигналу отримують за рахунок зміни моментів перемикання його рівнів. Мета статті полягає в отриманні аналітичного співвідношення, що зв'язує спектр амплітуд гармонійних складових полігармонійного вимірювального сигналу із набором його моментів перемикання. Запропоновано методологію синтезу параметрів полігармонійних вимірювальних сигналів. Отримано квадратурні формули для визначення амплітудного спектра полігармонійного сигналу із довільним законом модуляції тривалості його імпульсів. З метою узагальнення одержаних рівностей запропоновано універсальну формулу для розрахунку нижньої межі індексу підсумовування для парної або непарної кількості точок перемикання. Поставлено та розв'язано задачу знаходження аналітичного апарату, що пов'язує характеристики амплітудно-частотного спектра полігармонійного сигналу з довільним законом модуляції тривалості імпульсів із набором значень точок перемикання. Наведено кінцевий вираз для розрахунку амплітуди полігармонійного вимірювального сигналу, а також форми полігармонійного сигналу з парною та непарною кількістю точок перемикання.

**Ключові слова:** полігармонійний вимірювальний сигнал, спектральний склад, точки перемикання.

**Annotation.** Application of polar harmonic measuring signals for control of the technical state of dynamic objects is shown. Implementation of the traditional approach to the evaluation of the characteristics of the amplitude-frequency spectrum of dynamic objects, based on the application of signal generators of sinusoidal form, requires a considerable complexity of measurements, since it is necessary to sequentially set the control frequency of the object, technical state of which is monitored. Eliminating of this shortcoming can be performed by application of polar harmonic measuring signals. It is proved that the polar-harmonic signals with complex law of modulation of pulse duration possess the greatest functional capabilities for controlling the spectral composition, when the obtaining the necessary spectrum of the signal is achieved by changing the moments of switching its levels. The purpose of the paper is to obtain an analytical relation that binds the spectrum of the amplitudes of the harmonic components of a polar harmonic measuring signal with a set of its switching moments. The methodology of synthesis of polar harmonic measuring signals parameters is proposed. Quadrature formulas are obtained for determining the amplitude spectrum of a polar harmonic signal with arbitrary law of modulating its pulses duration. In order to generalize the resulting equations, we propose an universal formula for calculating the lower limit of the summation index for even or odd number of switch points. The article presents and solves the problem of finding an analytical apparatus that binds the characteristics of the amplitude-frequency spectrum of a polar harmonic signal inherent in an arbitrary law of pulse duration modulation, with a set of values of switching points. The final equation for computing the amplitude of a polar harmonic measuring signal is obtained. The forms of polar harmonic signal with a even and odd number of switching points are given.

**Key words:** polar harmonic measuring signal, spectral composition, switching points.

### Вступ

Реалізація традиційного підходу до вимірювання характеристик амплітудно-частотного спектра динамічних об'єктів, що ґрунтується на застосуванні генераторів синусоїдних коливань, потребує доволі трудомістких вимірювань, оскільки потрібно послідовно задавати на генераторі контрольні частоти досліджуваного об'єкта. Уникнути цього недоліку можна за рахунок використання

полігармонійних вимірювальних сигналів. Формулювання задачі отримання оптимальних параметрів полігармонійних вимірювальних сигналів передбачає визначення конкретних критеріїв синтезу, основними з яких є максимізація коефіцієнта використання потужності, досягнення задовільного рівня найменшої за амплітудою корисної гармоніки у спектрі, мінімізацію розкиду амплітуд спектральних складових на частотах аналізу тощо [1–4].

Крім наведених показників спектра сигналів, метод синтезу полігармонійних вимірвальних сигналів може так само враховувати інші показники, наприклад, коефіцієнт амплітуди, що визначається як відношення максимального за модулем значення сигналу до його середньоквадратичного значення. Оптимізація таких сигналів з метою мінімізації коефіцієнта амплітуди приводить до збільшення "відношення сигнал/шум" та, відповідно, забезпечує підвищену перешкодозахищеність вимірювань характеристик амплітудно-частотного спектра динамічних об'єктів [4, 5].

Періодичні сигнали полігармонійної форми, що мають нормовані параметри амплітудного спектра, широко застосовують у метрологічній практиці [1–5]. Вибір таких сигналів як вимірвальних впливів для ідентифікації технічного стану динамічних об'єктів у частотній області дає змогу досягти високої перешкодозахищеності контролю, оскільки у кожен момент часу полігармонійні сигнали набувають значення або  $F_0$ , або  $-F_0$ , забезпечуючи за будь-якого рівня перешкоди високий показник "відношення сигнал/шум". Крім того, апаратна реалізація калібраторів полігармонійних сигналів найпростіша, що забезпечує їм економічну ефективність [5].

Найбільші функціональні можливості з управління спектральним складом надають полігармонійні сигнали зі складним законом модуляції тривалості імпульсів, коли отримання необхідного спектра сигналу досягається за рахунок зміни моментів перемикання його рівнів [4].

Аналітичне задання сигналу з метою подальшого його спектрального аналізу класичним апаратом перетворення Фур'є вже за кількості точок перемикання, більшої від десяти, – доволі трудомістке завдання навіть для сучасних систем комп'ютерної математики [6]. Крім того, деякі ітераційні алгоритми оптимізації сигналів передбачають багаторазове перебування амплітуд гармонік за різних значень моментів перепаду рівнів. Як вирішення завдання запропоновано знайти залежність, що дає змогу обчислювати спектр амплітуд полігармонійного сигналу за відомим набором його точок перемикання.

### Недоліки

Серед полігармонійних сигналів найвідоміші меандр, прямокутні імпульси та їх комбінації у пакетах, а також полігармонійні послідовності максимальної довжини [7, 8]. Однак їх застосування під час вимірювання характеристик амплітудно-частотного спектра динамічних об'єктів обмежується

значною нерівномірністю гармонік та неефективним розподілом потужності сигналів, оскільки велика її частина опиняється поза зоною аналізу. Кращих результатів можна досягти, якщо оптимізувати складний полігармонійний вимірвальний сигнал з довільним набором точок перемикання [9], який наближається у середньоквадратичному відношенні в часовій області до заданого сигналу. Але, як і в попередніх аналізованих роботах, низька гнучкість управління спектральним складом, спричинена у цьому випадку залежністю цільової функції оптимізації від фаз гармонічних складових, не дає змоги отримати бажані значення нерівномірності гармонік і корисної потужності.

Більшість джерел з питань радіотехнічних ланцюгів і сигналів розглядають найпростіші види полігармонійних сигналів, такі як послідовність прямокутних імпульсів з довільною шпаруватістю або меандр, і наводять кінцеві співвідношення для визначення їхніх спектральних складових [7, 8]. У роботі [9] подано розрахункові формули перетворення Фур'є для деяких класів функцій. Огляд різних адаптивних квадратур для обчислення певних інтегралів від довільних функцій здійснено в [10].

### Мета статті

**Мета статті** полягає в отриманні аналітичного співвідношення, що зв'язує спектр амплітуд гармонійних складових полігармонійного вимірвального сигналу із набором його моментів перемикання.

### Матеріали та методи

Розглянемо полігармонійний сигнал  $f(\alpha)$  із довільним законом модуляції тривалості імпульсів. На інтервалі одного періоду  $T=2\pi$  він має  $M$  точок перемикання  $\{a_i\}$ , де  $\alpha=\omega_0 t$ ;  $\omega_0$  – основна частота сигналу;  $i=\overline{1, M}$ , причому  $\alpha_{i-1} < a_i < \alpha_{i+1}$ ,  $a_1=0$ ,  $a_M=2\pi$ . Мінімальне значення кількості точок перемикання  $M=3$ , що справедливо для послідовності прямокутних імпульсів або меандра.

Отримаємо залежність амплітудного спектра цього сигналу від вектора точок його перемикання  $\{a_i\}$  для двох різних випадків: за парного та непарного значення  $M$ .

Запишемо аналітичний вираз для визначення сигналу  $f(\alpha)$ , коли  $M$  – будь-яке непарне число:

$$f_1(\alpha) = \begin{cases} F_0, & \text{якщо } \alpha_1 \leq \alpha < \alpha_2, \dots, \alpha_{M-2} \leq \alpha < \alpha_{M-1} \\ -F_0, & \text{якщо } \alpha_2 \leq \alpha < \alpha_3, \dots, \alpha_{M-1} \leq \alpha < \alpha_M \end{cases} \quad (1)$$

Форму сигналу (1) наведено на рис. 1.

Аналогічно аналітичний запис полігармонійного сигналу, у якого  $M$  – парне число, матиме вигляд:

$$f_2(\alpha) = \begin{cases} F_0, & \text{якщо } \alpha_1 \leq \alpha < \alpha_2, \dots, \alpha_{M-1} \leq \alpha < \alpha_M \\ -F_0, & \text{якщо } \alpha_2 \leq \alpha < \alpha_3, \dots, \alpha_{M-2} \leq \alpha < \alpha_{M-1} \end{cases} \quad (2)$$

а його форму показано на рис. 2.

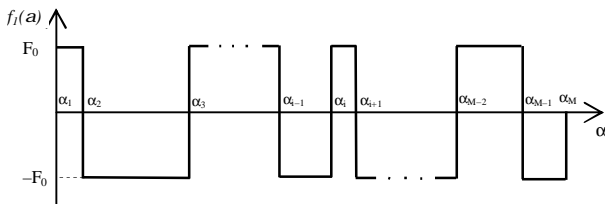


Рис. 1. Полігармонійний сигнал з непарною кількістю точок перемикавання

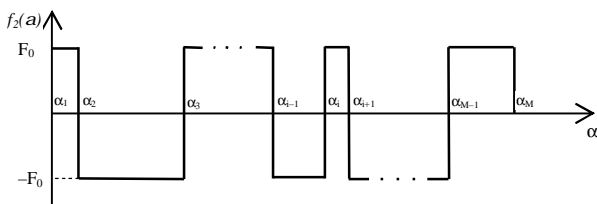


Рис. 2. Полігармонійний сигнал з парною кількістю точок перемикавання

Знайдемо комплексні коефіцієнти Фур'є сигналів (1) і (2), використовуючи таку рівність [7]

$$\mathcal{F}_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) e^{-jn\alpha} d\alpha = \frac{1}{2} c_n e^{j\psi_n}, \text{ якщо } n \neq 0, \quad (3)$$

де  $c_n$  і  $\psi_n$  – амплітуда та початкова фаза  $n$ -ї гармоніки.

Із виразу (3) після перетворення [11] випливає, що амплітуда  $n$ -ї гармоніки визначається як

$$c_n = 2|\mathcal{F}_n| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(\alpha) e^{-jn\alpha} d\alpha \right|. \quad (4)$$

Постійна складова сигналу  $c_0$  дорівнює

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) d\alpha. \quad (5)$$

Квадратурні формули (4) і (5) визначають амплітудний спектр полігармонійного сигналу із довільним законом модуляції тривалості його імпульсів, однак, якщо відомий вектор точок перемикавання сигналу  $\{a_i\}$ , безпосередньо використати співвідношення (4) і (5) неможливо. Тому доцільно перейти від інтегралів до записів із використанням кінцевих сум.

Для цього, підставляючи в формулу (4) вирази (1) і (2), отримуємо відповідно амплітудний спектр сигналу  $f_1(a)$

$$c_{1n} = \frac{2F_0}{\pi n} \left| e^{-jn\alpha_1} - e^{-jn\alpha_2} + e^{-jn\alpha_3} - \dots - \right.$$

$$\left. - e^{-jn\alpha_{M-1}} \right| = \frac{2F_0}{\pi n} \left| \sum_{i=1}^{M-1} (-1)^{i+1} e^{-jn\alpha_i} \right| \quad (6)$$

й амплітудний спектр сигналу  $f_2(a)$

$$c_{2n} = \frac{2F_0}{\pi n} \left| -e^{-jn\alpha_2} + e^{-jn\alpha_3} - \dots - \right. \\ \left. - e^{-jn\alpha_{M-1}} \right| = \frac{2F_0}{\pi n} \left| \sum_{i=2}^{M-1} (-1)^{i+1} e^{-jn\alpha_i} \right| \quad (7)$$

Відмінність між формулами (6) і (7) полягає лише у нижніх межах індексу підсумовування. Для непарної кількості точок перемикавання величина набуває значення від 1 до  $M-1$ , а для парної кількості – від 2 до  $M-1$ . З метою узагальнення рівностей (6) і (7) наведемо універсальну формулу для розрахунку нижньої межі індексу підсумовування, позначивши його  $M_0$ , що дасть змогу для будь-яких  $M$  (парних або непарних) отримувати відповідні значення нижніх меж сум:

$$M_0 = \frac{|(-1)^{M+1} - 1|}{2} + 1. \quad (8)$$

Елемент  $(-1)^{i+1}$  у співвідношеннях (6) і (7) визначає знакозмінний ряд, запишемо його у вигляді  $(-1)^i$ , оскільки збереження показника степеня, який дорівнює  $(i+1)$ , необхідне тільки для обчислення фаз гармонійних складових  $\psi_n$ .

Розклавши комплексні експоненти виразів (6) і (7) за формулою Ейлера [12] з урахуванням виразу (8), одержимо аналітичне співвідношення, що зв'яже спектр амплітуд полігармонійного сигналу із набором його точок перемикавання  $\{a_i\}$ :

$$c_n = \frac{2F_0}{\pi n} \sqrt{\left[ \sum_{i=M_0}^{M-1} (-1)^i \cdot \cos(n\alpha_i) \right]^2 + \left[ \sum_{i=M_0}^{M-1} (-1)^i \cdot \sin(n\alpha_i) \right]^2}. \quad (9)$$

Зазначимо, що формула (9) справедлива й у разі  $f_1(a) = -f_1(a), f_2(a) = -f_2(a)$ .

Водночас перетворення формули (5) для обчислення постійної складової сигналу потребує урахування значення, а точніше знака  $f(a)$  на першому інтервалі аналізу ( $a_1 \leq a < a_2$ ). Наведемо остаточний вираз для розрахунку величини  $c_0$ :

$$c_0 = \frac{F_0}{2\pi} \sum_{i=1}^{M-1} (-1)^{i+1} \cdot (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \cdot \text{sign}(f(\alpha)) \Big|_{\alpha_1 \leq \alpha < \alpha_2}. \quad (10)$$

### Результати й обговорення

У роботі запропоновано та досліджено методологію синтезу параметрів полігармонійних вимірювальних сигналів, які дають змогу отримувати перешкодозахищені вимірювальні сигнали із потрібними показниками спектра, зокрема, коефіцієнтами корисної потужності та нерівномірності, середнього значення гармонік у корисному діапазоні частот.

## Висновки

Отже, у статті поставлено та розв'язано задачу знаходження аналітичного апарату, що пов'язує амплітудний спектр полігармонійного сигналу з довільним законом модуляції тривалості імпульсів із набором значень точок перемикання. Причому амплітуди гармонік з номерами 1 і вище однозначно визначаються вектором точок перемикань  $\{a_i\}$  і значенням рівня сигналу  $F_0$ , а обчислення постійної складової потребує, крім цього, додатково знати знак сигналу на першому інтервалі аналізу (знак першого імпульсу). Подальші дослідження необхідно зосередити на використанні отриманих виразів у програмах синтезу полігармонійних сигналів, що передбачають формування такого набору точок перемикання, за якого забезпечується необхідний спектральний склад.

## Подяка

Автори висловлюють вдячність колективам Метрологічного центру військових еталонів, кафедри інформаційно-вимірjувальних технологій Національного університету «Львівська політехніка» за надану допомогу та сприяння у підготовці статті.

## Список літератури

1. Павленко Ю. Ф., Славинський С. І. (1999). *Вопросы метрологического обеспечения анализаторов спектра // Український метрологічний журнал. № 3. С. 35–42.*
2. Herasimov S., Shapran Yu. and Stakhova M. (2018). *Measures of efficiency of dimensional control under technical state designation of radio-technical facilities, Information Processing Systems, Issue (152), pp. 148–154, DOI: 10.30748/soi.2018.152.21.*
3. Чинков В. Н., Крихтін Ю. О. (2002). *Аналіз сучасного стану та перспективні напрямки синтезу оптимальних полігармонічних сигналів з нормованим спектром для контролю технічного стану зразків озброєння та військової техніки. Системи обробки інформації. Вип. 5(21). С. 214–217.*
4. Bractslavska A., Herasimov S., Zubrytskyi H., Tymochko A. and Timochko A. (2017). *Theoretical basic concepts for formation of the criteria for measurement signals synthesis optimality for control of complex radio engineering systems technical status, Information Processing Systems. Issue 5 (151). P. 151–157.*
5. Herasimov S. V., Timochko O. I. and Khmelevskiy S. I. (2017). *Synthesis method of the optimum structure of the procedure for the control of the technical status of complex*

*systems and complexes, Scientific Works of Kharkiv National Air Force University. Issue 4 (53). P. 148–152.*

6. Кудрявцев Е. М. *Mathcad 2000 Pro (2001). Москва: ДМК Пресс. 576 с.*
7. Гоноровский И. С., Демин М. П. (1994). *Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Радио и связь. – 481 с.*
8. Баскаков С. И. (2000). *Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Высшая школа. 462 с.*
9. Задирака В. К. (1983). *Теория вычисления преобразования Фурье. К.: Наукова думка. 216 с.*
10. Gander W., Gautschi W. (2000). *Adaptive Quadrature – Revisited, BIT. Vol. 40. P. 84–101.*
11. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. (1981). *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука. 720 с.*

## References

1. Pavlenko Yu. F., Slavinsky S. I. (1999). *Questions of metrological support of spectrum analyzers, Ukrainian metrological journal. Issue 3. P. 35–42.*
2. Herasimov S., Shapran Yu. and Stakhova M. (2018). *Measures of efficiency of dimensional control under technical state designation of radio-technical facilities. Information Processing Systems. Issue (152). P. 148–154, DOI: 10.30748/soi.2018.152.21.*
3. Chinkov V. N., Krichtin Yu. O. (2002). *An analysis of the current state and perspective directions of synthesis of optimal polar harmonic signals with a normalized spectrum for the control of the technical condition of samples of weapons and military equipment, Information Processing Systems. Issue 5(21). P. 214–217.*
4. Bractslavska A., Herasimov S., Zubrytskyi H., Tymochko A. and Timochko A. (2017). *Theoretical basic concepts for formation of the criteria for measurement signals synthesis optimality for control of complex radio engineering systems technical status, Information Processing Systems. Issue 5 (151). P. 151–157.*
5. Herasimov S. V., Timochko O. I. and Khmelevskiy S. I. (2017). *Synthesis method of the optimum structure of the procedure for the control of the technical status of complex systems and complexes. Scientific Works of Kharkiv National Air Force University. Issue 4 (53). P. 148–152.*
6. Kudryavtsev E. M. *Mathcad 2000 Pro (2001). Moscow: DMC Press. 576 p.*
7. Honorovsky I. S., Demin M. P. (1994). *Radiotechnical circuits and signals. Moscow: Radio and communications. 481 p.*
8. Baskakov S. I. (2000). *Radio technical circuits and signals. Moscow: Higher school. 462 p.*
9. Zadiraka V. K. (1983). *Theory of calculating the Fourier transform. Kiev Scientific thought. 216 p.*
10. Gander W., Gautschi W. (2000). *Adaptive Quadrature – Revisited, BIT. Vol. 40. P. 84–101.*
11. Bronshtein I. N., Semendyaev K. A. (1981). *Handbook of Mathematics for Engineers and Students of Technical Schools. Moscow: Science. 720 p.*