

УДК 531.534

DOI: <http://dx.doi.org/10.20535/0203-377129201563837>

**Балабанов И. В.<sup>1</sup>**, доцент, **Балабанова Т. В.<sup>2</sup>**, доцент,  
**Гавваза О. Ю.<sup>3</sup>**, бакалавр

## **МЕТОДИКА РАСЧЕТА ХАРАКТЕРИСТИК КРЫЛА САМОЛЕТА С УЧЕТОМ АЭРОУПРУГОСТИ**

**En** Aeroelasticity is important in many areas of engineering, especially in aviation, where the resulting large size and velocity of the aircraft aeroelasticity is the most significant (negative) factor taken into account when creating the new aircraft. When designing the wing one of the objectives is to eliminate and reduce the harmful effects of aeroelasticity his design during the flight. This makes it necessary to study many variations of designs, hence the relevance of using new computer methods of calculation. In this article introduce new technique that ensures the creation of a mathematical model of elastic wings under aerodynamic and mass loads, which will describe the interaction of the wings of the air flow in an analytical way. The technique is to divide the wings into sections and replacing them with the corresponding finite elements, characterized by its rigidity, strength and weight lifting. These characteristics are described by the matrices aerodynamic impact, stiffness and mass, in analytical form, which are oriented in their element coordinate systems. Each individual section is characterized by the provisions of the cen-

---

<sup>1</sup> *Національний технічний університет України "КПІ", кафедра приборов и систем управления летательными аппаратами*

<sup>2</sup> *Національний технічний університет України "КПІ", кафедра приборов и систем управления летательными аппаратами*

<sup>3</sup> *Національний технічний університет України "КПІ", кафедра приборов и систем управления летательными аппаратами*

ters of mass and stiffness of pressure that used to bring all the elements into one global coordinate system. Based on this design model is constructed wing that looks consistent and characteristic elements connected in parallel, with subsequent transformation and analysis.

There have been several studies on its use for finding the critical velocity divergence wing aircraft and computing console wing movements under load. The method has proven quite high efficiency and accuracy of the results.

This calculation method can be used during the preliminary design of the aircraft, it will help to simplify the automation of this process through the widespread use of computer algebra, increase economic efficiency by reducing design time costs, human and machine resources. Will open new opportunities to simplify the process of optimizing mass characteristics of the aircraft projected. Also, the technique will allow a simple interpretation of interim results and further analytical studies.

**Уа** В даній статті описується методика, яка забезпечує створення математичної моделі пружного крила під дією аеродинамічного та масового навантаження, що дозволяє описати взаємодію крила з потоком повітря, в аналітичному вигляді. Приведенно приклад її застосування для визначення критичної швидкості дивергенції спрощеного крила літака Ла-5 ФН.

## **Введение**

В настоящее время аэроупругость имеет большое значение во многих отраслях инженерного дела, особенно в авиации, где в результате больших размеров и скоростей самолета аэроупругость является наиболее весомым (отрицательным) фактором, который учитывается при создании нового летательного аппарата (ЛА). При проектировании крыла одной из задач является снижение вредного влияния аэроупругости на динамику полета. Эта задача обуславливает необходимость проработки множества вариантов возможных конструкций.

Анализ литературы показал, что на сегодняшний день для расчета широко применяются численные методы [1], а расчеты в аналитическом виде базируются на теории несущей полосы [2]. Однако указанный расчет не дает полного понимания поведения конструкции крыла в воздушном потоке, что необходимо при создании эффективной конструкции. Данное обстоятельство обуславливает актуальность разработки новых методов для расчета конструкций ЛА с применением систем компьютерной алгебры.

## **Постановка задачи**

Целью настоящего исследования является проверка новой методики, которая обеспечивает создание математической модели упругого крыла при действии аэродинамической и массовой нагрузки.

В основе применяемой методики взят метод конечно-элементной аппроксимации (МК-ЭА) [3], что позволяет в аналитическом виде провести исследование взаимодействия крыла с потоком воздуха.

### Объект исследования

Для проверки применения разработанной на основе МК-ЭА методики проводится определение критической скорости дивергенции упрощенного крыла самолета Ла-5 ФН.

### Обобщенная конструкция базового конечного элемента

Полагаем, что исследуемая конструкция, например, крыло ЛА, имеет достаточно правильную структуру, позволяющую разделить его на ряд конечно-элементных участков.

В общем случае каждый из участков содержит три следующих типа конструктивных элементов с различным влиянием на формирование аэродинамических свойств крыла:

- упругие элементы, обуславливающие возникновение упругих восстанавливающих сил;
- инерционные элементы, вызывающие действие сил инерции;
- аэроупругие элементы специальной формы, создающие подъемную силу.

На всех участках размещаем локальные базовые системы координат  $O_i x_i y_i z_i$ , оси которых совпадают с главными центральными осями инерции конечного элемента. Ось  $O_i z_i$  направляется вертикально вверх, а оси  $O_i x_i$  и  $O_i y_i$  формируют горизонтальную плоскость. Причем ось  $O_i y_i$  размещается навстречу набегающему воздушному потоку, а ось  $O_i x_i$  направлена вдоль размаха крыла так, что в результате образуется правая система координат  $O_i x_i y_i z_i$  (рис. 1).

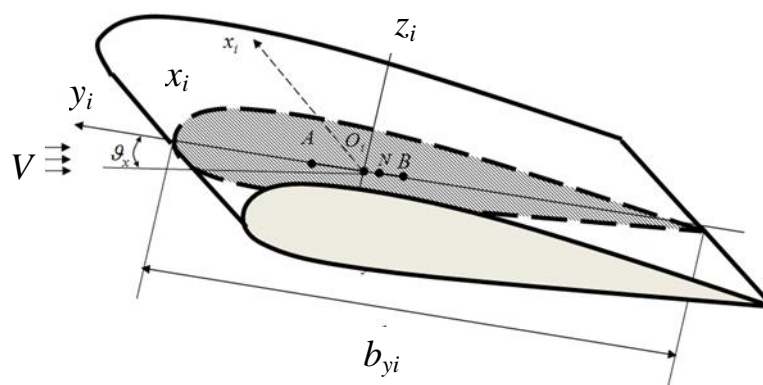


Рис. 1. Обобщенный конечный элемент крыла самолета

Введем в рассмотрение глобальную базовую систему координат  $Ox_0y_0z_0$ , расположенную таким образом, чтобы ее начало (точка  $O$ ) занимало удобное для расчета координат место на крыле, чтобы ось  $Oz_0$  была направлена вертикально вверх, а горизонтальная плоскость  $x_0Oy_0$  совпадала со срединной поверхностью крыла (рис. 2).

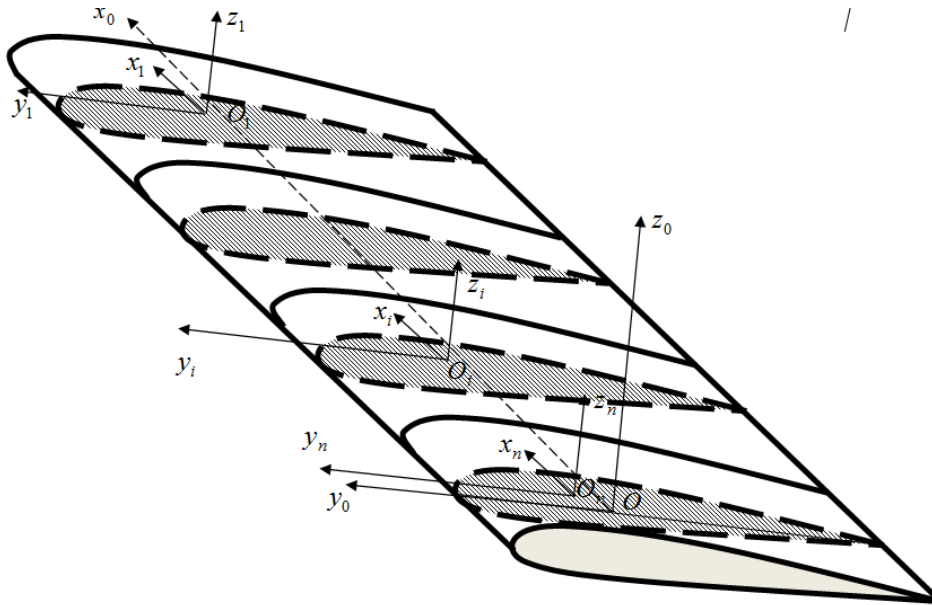


Рис. 2. Относительное расположение базовых систем координат

Обобщенному конечному элементу (рис. 1) соответствует базовый фрагмент расчетной схемы МК-ЭА, состоящий из упругого, а также аэроупругого и инерционного элементов, соединяющих  $i$ -ый узел соответственно с предыдущим ( $i-1$ )-ым узлом, а также с основанием (рис. 3).

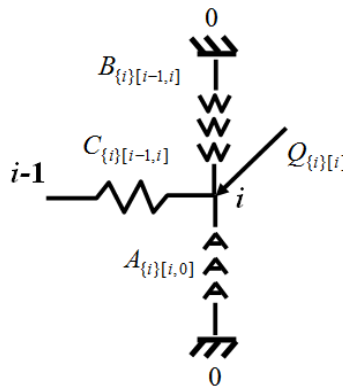


Рис. 3. Базовый фрагмент расчетной схемы

### Упрощения в математической модели базового конечного элемента

Полагаем конструкцию крыла и соответственно его конечно-элементных участков симметричной относительно горизонтальной плос-

кости  $x_0Oy_0$ . Введенное допущение симметрии конструкции относительно плоскости дает возможность понизить размер решаемой задачи, разделяя ее на две независимые (симметричную и антисимметричную) части и рассматривая решение только одной из них, обуславливая, например, в матрицах жесткости следующую структуру [4]:

$$C = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & 0 & 0 & 0 & c_{1,6} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & 0 & 0 & 0 & c_{2,6} \\ 0 & 0 & c_{3,3} & c_{3,4} & c_{3,5} & 0 \\ 0 & 0 & c_{4,3} & c_{4,4} & c_{4,5} & 0 \\ 0 & 0 & c_{5,3} & c_{5,4} & c_{5,5} & 0 \\ c_{6,1} & c_{6,2} & 0 & 0 & 0 & c_{6,6} \end{bmatrix}.$$

В свою очередь матричная структура (1) позволяет использовать при расчетах усеченные матрицы жесткости  $C_{\{i\}}$ , а также сокращенные векторы обобщенных сил  $Q_{\{i\}}$  и перемещений  $q_{\{i\}}$  с меньшим числом компонент:

$$C_{\{i\}} = \begin{bmatrix} c_{\{i\}3,3} & c_{\{i\}3,4} & c_{\{i\}3,5} \\ c_{\{i\}4,3} & c_{\{i\}4,4} & c_{\{i\}4,5} \\ c_{\{i\}5,3} & c_{\{i\}5,4} & c_{\{i\}5,5} \end{bmatrix}, \quad Q_{\{i\}} = \begin{bmatrix} P_{zi} \\ M_{xi} \\ M_{yi} \end{bmatrix}, \quad q_{\{i\}} = \begin{bmatrix} u_{zi} \\ \vartheta_{xi} \\ \vartheta_{yi} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где в нижнем индексе указан номер локальной базовой системы координат ( $O_i x_i y_i z_i$ ).

Помимо перечисленного вводимые допущения позволяют, в рамках решаемых задач, значительно упростить матрицы преобразования координат [3], применяемые при переходе от одной базовой координатной системы к другой, например, от локальной  $O_i x_i y_i z_i$  к глобальной  $O x_0 y_0 z_0$ :

$$\Lambda_{0,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_{y0}^{(i)} & \cos \varphi_{z0}^{(i)} & -\sin \varphi_{z0}^{(i)} \\ -r_{x0}^{(i)} & \sin \varphi_{z0}^{(i)} & \cos \varphi_{z0}^{(i)} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где  $\varphi_{z0}^{(i)}$  – угол между горизонтальными осями  $Ox_0$  и  $O_i x_i$ ,  $r_{x0}^{(i)}$  и  $r_{y0}^{(i)}$  соответствующие координаты начала (точки  $O_i$ ) локальной системы координат в глобальной базовой системе координат  $Ox_0 y_0 z_0$ .

В частности, в случае ( $\varphi_{z0}^{(i)} = 0$ ), согласно выражениям (2) и (3), расчет усеченных матриц жесткости  $C_{\{0\}}$ , а также сокращенных векторов обобщенных сил  $Q_{\{0\}}$  и перемещений  $q_{\{0\}}$  в глобальной базовой системе координат  $Ox_0 y_0 z_0$  может проводиться по следующим формулам [3]:

$$\begin{aligned}
C_{\{0\}} &= \Lambda_{0,i} C_{\{i\}} \Lambda_{0,i}^T \\
&= \begin{bmatrix} c_{\{i\}3,3} & c_{\{i\}3,4} + r_{y0}^{(i)} c_{\{i\}3,3} & c_{\{i\}3,5} - r_{x0}^{(i)} c_{\{i\}3,3} \\ c_{\{i\}4,3} + r_{y0}^{(i)} c_{\{i\}3,3} & c_{\{i\}4,4} + (r_{y0}^{(i)})^2 c_{\{i\}3,3} + & c_{\{i\}4,5} - r_{x0}^{(i)} c_{\{i\}4,3} + \\ & + r_{y0}^{(i)} (c_{\{i\}3,4} + c_{\{i\}4,3}) & + r_{y0}^{(i)} (c_{\{i\}3,5} - r_{x0}^{(i)} c_{\{i\}3,3}) \\ c_{\{i\}5,3} - r_{x0}^{(i)} c_{\{i\}3,3} & c_{\{i\}5,4} - r_{x0}^{(i)} c_{\{i\}3,4} + & c_{\{i\}5,5} + (r_{x0}^{(i)})^2 c_{\{i\}3,3} - \\ & + r_{y0}^{(i)} (c_{\{i\}5,3} - r_{x0}^{(i)} c_{\{i\}3,3}) & - r_{x0}^{(i)} (c_{\{i\}3,5} + c_{\{i\}5,3}) \end{bmatrix} \quad (4) \\
Q_{\{0\}} = \Lambda_{0,i} Q_{\{i\}} &= \begin{bmatrix} P_{zi} \\ M_{xi} + r_{y0}^{(i)} P_{zi} \\ M_{yi} - r_{x0}^{(i)} P_{zi} \end{bmatrix}, \quad q_{\{0\}} = \Lambda_{0,i}^T q_{\{i\}} = \begin{bmatrix} u_{zi} + r_{y0}^{(i)} \vartheta_{xi} - r_{x0}^{(i)} \vartheta_{yi} \\ \vartheta_{xi} \\ \vartheta_{yi} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Жесткостные характеристики каждой упругой связи расчетной схемы описываются матрицами жесткости. В частности, матрица жесткости  $r$ -ой упругой связи, проходящей от узла  $k$  к узлу  $m$ , описывается следующим выражением:

$$C_{\{d\}[k,m]}^{(r)} = \left[ c_{\{d\}[k,m]i,j}^{(r)} \right], \quad (i, j = \overline{3,5}).$$

Здесь введены следующие обозначения:

- $c_{\{d\}[k,m]i,j}^{(r)}$  ( $i, j = \overline{3,5}$ ) – элементы матрицы жесткости, представляющие собой соответствующие коэффициенты пропорциональности между обобщенными силами и перемещениями в уравнениях равновесия, записанных в координатной форме;
- в верхнем индексе ( $r$ ) матрицы жесткости записан номер упругой связи;
- в нижних индексах  $\{d\}$  и  $[k,m]$  указан номер базовой координатной системы  $O_d x_d y_d z_d$ , в которой данная матрица жесткости определена, и номера узлов, между которыми находится рассматриваемая упругая связь.

В свою очередь характеристики аэроупругих и инерционных связей расчетной схемы описываются матрицами  $A_{\{d\}[m,0]}^{(r)}$  и  $B_{\{d\}[m,0]}^{(r)}$ , индексы, в обозначениях которых имеют смысл аналогичный знакам, введенным для матриц жесткости  $C_{\{d\}[m,0]}^{(r)}$ .

### Математическая модель аэроупругих сил базового конечного элемента

Опишем теперь действующие на конечно-элементный участок крыла аэродинамические силы [5].

В общем случае на  $i$ -ый конечный элемент в полюсе  $A_i$  действует подъемная сила, пропорциональная углу атаки ЛА, с коэффициентом пропорциональности  $a_{\{i\}3,4} \equiv -a_i$ , определяемым по формуле

$$a_i = c'_{zi} b_{yi} l_{xi} \rho \frac{V^2}{2}, \quad (5)$$

где  $V$  – скорость полета ЛА;  $c'_{zi}$  – производная (по углу атаки) коэффициента подъемной силы крыла;  $\rho$  – плотность воздуха;  $b_{yi}$  – длина хорды профиля крыла;  $l_{xi}$  – длина участка крыла.

Очевидно, что коэффициент  $a_{\{i\}3,4}$  представляет собой элемент матрицы  $A_{\{Ai\}[i,0]}$ , определенной в базовой системе псевдонормальных координат  $A_i x_{Ai} y_{Ai} z_{Ai}$ . При этом матрица аэроупругости  $A_{\{Ai\}[i,0]}$  характеризует опрокидывающие аэроупругие силы, возникающие в  $i$ -ом конечно-элементном участке крыла (рис. 1),

$$A_{\{Ai\}[i,0]} = \begin{bmatrix} 0 & -a_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

При переходе в локальную базовую систему координат  $O_i x_i y_i z_i$  матрица  $A_{\{Ai\}[i,0]}$  теряет свою первоначальную форму, приобретая следующий вид:

$$A_{\{i\}[i,0]} = \Lambda_{i,A} A_{\{Ai\}[i,0]} \Lambda_{i,A}^T = \begin{bmatrix} 0 & -a_i & 0 \\ 0 & -h_{yi} a_i & 0 \\ 0 & h_{xi} a_i & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где  $\Lambda_{i,A}$  – матрица преобразования координат,

$$\Lambda_{i,A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h_{yi} & 1 & 0 \\ -h_{xi} & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (7)$$

$h_{xi}$  и  $h_{yi}$  – координаты центра действия аэродинамической подъемной силы в базовой системе координат  $O_i x_i y_i z_i$ .

### Математическая модель обобщенных сил инерции базового конечного элемента

Полагаем для удобства оси базовой локальной системы координат  $O_i x_i y_i z_i$  совпадающими с главными центральными осями инерции  $i$ -ого конечно-элементного участка крыла. Тогда записанная в операторной форме матрица инерции  $B_{\{i\}[i,0]}$ , при ее определении в базовой координатной системе  $O_i x_i y_i z_i$ , будет иметь соответствующий диагональный вид:

$$B_{\{i\}[i,0]} = \Lambda_{i,B} B_{\{Bi\}[i,0]} \Lambda_{i,B}^T = \text{diag}(m_i p^2 \quad J_{xi} p^2 \quad J_{yi} p^2), \quad (8)$$

где  $\Lambda_{i,B}$  – матрица преобразования координат,

$$\Lambda_{i,B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$m_i$  и  $J_{xi}$ ,  $J_{yi}$  – масса и соответствующие осевые моменты инерции  $i$ -ого конечного элемента;  $p \equiv \frac{d}{dt}$  – оператор дифференцирования.

### Преобразование расчетной схемы МК-ЭА

На рис. 4 показано проводимое в соответствии с МК-ЭА квазирекуррентное преобразование исходной системы, состоящее в исключении  $l$ -го узла. Здесь при обозначении обобщенных матриц в преобразованной системе (например,  $S_{\{0\}[k,m](l)}$ ) в нижних индексах после фигурных и квадратных скобок, содержащих соответствующие данные, вводится индекс в круглых скобках с указанием номеров всех узлов, исключенных в рассматриваемой преобразованной системе.

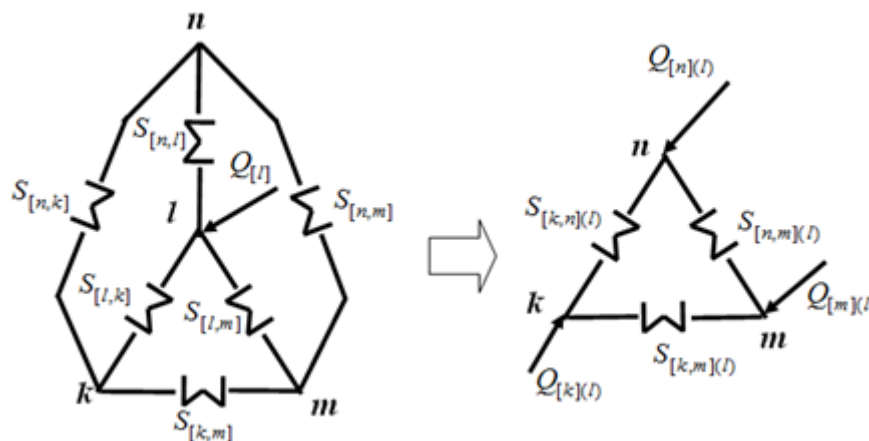


Рис. 4. Преобразование упругой системы в соответствии с МК-ЭА



Рекуррентная формула МК-ЭА представляет собой формулу для расчета обобщенных матриц межузловых связей и узловых нагрузок, получаемых при эквивалентных преобразованиях исходной системы. Например, при преобразовании, состоящем в исключении  $l$ -го узла (рис. 4), обобщенная матрица  $S_{\{0\}[k,m](l)}$  и узловая нагрузка  $Q_{\{0\}[k](l)}$  определяются по следующим квазирекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} S_{\{0\}[k,m](l)} &= S_{\{0\}[k,m]} + S_{\{0\}[k,l]} (S_{\{0\}[l]})^{-1} S_{\{0\}[l,m]}, \\ Q_{\{0\}[k](l)} &= Q_{\{0\}[k]} + S_{\{0\}[k,l]} (S_{\{0\}[l]})^{-1} Q_{\{0\}[l]}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $S_{\{0\}[l]} \equiv \sum_{(\forall s)} S_{\{0\}[l,s]}$  – сумма матриц всех межузловых связей, непосредственно примыкающих к  $l$ -му узлу.

Исследуя квазирекуррентные формулы (10) необходимо отметить, что обязательным условием работы алгоритма МК-ЭА является невырожденность матрицы  $S_{\{0\}[l]}$ , свидетельствующая об устойчивости исследуемой конструкции.

### **Пример определения критической скорости дивергенции летательного аппарата методом конечно-элементной аппроксимации**

Для снижения громоздкости расчетов введем ряд упрощений, связанных со спецификой решаемых задач и очевидными особенностями конструкции крыла.

Во-первых, определяя по условию задачи критическую скорость дивергенции, можем исключить из рассмотрения факторы, связанные с инерционностью.

Во-вторых, полагая конструкцию крыла и соответственно его конечно-элементных участков квазисимметричными относительно горизонтальной плоскости  $x_0 O y_0$  и продольной оси крыла  $O x_0$ , можем исследовать углы разворота конечных элементов относительно оси  $O x_0$  независимо от других смещений, понижая в результате до одномерного случая размер векторов обобщенных координат.

В-третьих, в рамках решаемой задачи пренебрегая влиянием сил упругости и аэроупругости от нетипичных элементов его конструкции (различных рулей, сигнальных фонарей и т.д.), рассматриваем конструкцию крыла, описываемую типовой расчетной схемой (рис. 5).

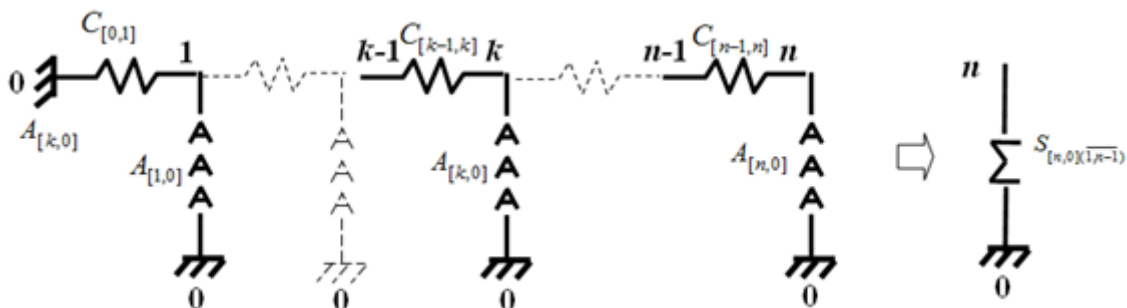


Рис. 5. Типовая расчетная схема идеализированной конструкции крыла

В результате получили идеализированную конструкцию крыла, разделенную на  $n$  участков. Затем, согласно требований МК-ЭА, составим расчетную схему (рис. 5), где матрица жесткости  $C_{[k-1,k]}^{(n)}$  обуславливается действием упругих восстанавливающих сил, а матрица аэроупругости  $A_{[k-1,k]}^{(n)}$  характеризует влияние опрокидывающих аэроупругих сил на  $k$ -ом участке крыла.

Определив результирующую обобщенную матрицу  $S_{[0,n](1,n-1)}^{(n)}$  ( $n \geq 2$ ), находим искомую скорость дивергенции из уравнения

$$\det(S_{[0,n](1,n-1)}^{(n)}) = 0, \quad (n \geq 2). \quad (11)$$

Согласно расчетной схеме можем представить, аналогично формуле (10), выражение для искомой эквивалентной матрицы межузловой связи в виде:

$$S_{[n,0](1,n-1)} = C_{[n,n-1]} (S_{[n-1,0](1,n-2)} + C_{[n-1,n]})^{-1} S_{[n-1,0](1,n-2)} + A_{[n,0]}, \quad (12)$$

где эквивалентная матрица  $S_{[n-1,0](1,n-2)}$  определяется по следующим квази-рекуррентным формулам:

$$S_{[n-1,0](1,n-2)} = C_{[n-1,n-2]} (S_{[n-2,0](1,n-3)} + C_{[n-2,n-1]})^{-1} S_{[n-2,0](1,n-3)} + A_{[n-1,0]},$$

$$S_{[n-2,0](1,n-3)} = C_{[n-2,n-3]} (S_{[n-3,0](1,n-4)} + C_{[n-3,n-2]})^{-1} S_{[n-3,0](1,n-4)} + A_{[n-2,0]},$$

$$S_{[3,0](1,2)} = C_{[3,2]} (S_{[2,0](1)} + C_{[2,3]})^{-1} S_{[2,0](1)} + A_{[3,0]},$$

$$S_{[2,0](1)} = C_{[2,1]} (S_{[1,0]} + C_{[1,2]})^{-1} S_{[1,0]} + A_{[2,0]},$$

$$S_{[1,0]} = C_{[1,0]} + A_{[1,0]}.$$





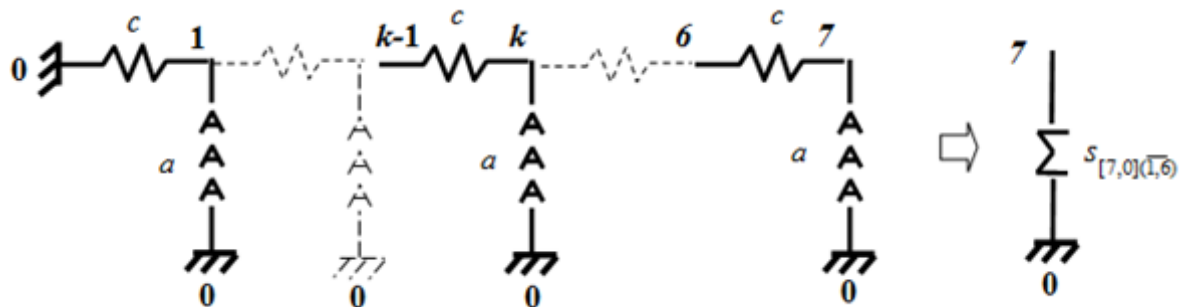


Рис. 7. Расчетная схема рассмотренной конструкции крыла

Приравняв  $s_{[7,0](1,6)}$  к нулю, получим полиномиальное уравнение 7-ой степени, решая который находим искомое минимальное значение  $a_{\min}$ . Располагая величиной угловой жесткости (14), получим численное значение величины  $a_{\min}$

$$a_{\min} = 0,044c = 1,81 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}. \quad (15)$$

Проводя в свою очередь численный расчет коэффициента аэроупругости согласно выражению (5), запишем численные значения характеристик, влияющих на аэроупругость:

- производная (по углу атаки) коэффициента подъемной силы крыла  $c'_{(a)z} = 10$ ;
- плотность воздуха  $\rho = 1 \text{ кг} / \text{м}^3$ ;
- длина хорды профиля крыла  $b_{(a)y} = 1,6 \text{ м}$ ;
- расстояние от аэродинамического центра до упругой оси  $h_{(a)y} = 0,4 \text{ м}$ ;
- длина участка крыла  $l_{(a)x} = 0,4 \text{ м}$ .

Взяв численное значение  $a_{\min}$  из выражения (15), в соответствии с формулой (5) получим следующую величину критической скорости дивергенции:

$$V_{\text{див}} = \sqrt{\frac{2a_{\min}}{c'_{(a)z} b_{(a)y} l_{(a)x} h_{(a)y} \rho}} = 352 \text{ м} / \text{с}. \quad (16)$$

Отметим, что полученный результат (16) не противоречит данным по легким истребителям Второй мировой войны.

## Выводы

Полученные в результате исследования расчетные данные самолета Ла-5 ФН показывают их полное соответствие эксплуатационным характеристикам самолета, что доказывает адекватность применяемой методики. При этом разработанная методика демонстрирует высокую эффектив-

ность, связанную, прежде всего, с простотой интерпретации промежуточных результатов и дальнейшей возможностью проведения аналитических исследований, особенно важных на этапе предварительного проектирования.

### Список использованной литературы

1. *Образцов И. Ф.* Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов / И. Ф. Образцов, Л. М. Савельев, Х. С. Хазанов. – Москва: Высшая школа, 1985. – 392 с.
2. *Белоцерковский С. М.* Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа / Сергей Михайлович Белоцерковский. – Москва: Наука, 1965.
3. *Балабанов И. В.* Метод конечно-элементной аппроксимации для исследования дивергенции крыла самолета / И. В. Балабанов, Т. В. Балабанова, Ю. И. Бондарь // Аналітична механіка та її застосування: Збірник праць інституту математики НАН України, -К.: Ін-т математики НАН України, 2014. Т.11 №5 – С.18-36.
4. *Балабанов И. В.* Анализ свойств межузловых связей в симметричных упругих системах / И. В. Балабанов, Т. В. Балабанова // Аналітична механіка та її застосування: Збірник праць інституту математики НАН України, -К.: Ін-т математики НАН України, 2010. Т.7 №3 – С.30-45.
5. *Фын Я. Ц.* Введение в теорию аэроупругости / Я. Ц. Фын. – Москва: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 523 с.