УДК 512.64

Дельфас Юлія Миколаївна
канд. *фіз..-мат. наук*
доцент кафедри фундаментальних наук
Державний університет телекомунікацій

Дельфас Юлия Николаевна
канд. *физ..-мат наук*
доцент кафедры фундаментальных наук
Государственный университет телекоммуникаций

Delfas Julia N.
cand. Physical and Mathematical Sciences
State University of Telecommunications

P-ГРАНИЧНІ ЧИСЛА КВАДРАТИЧНИХ ФОРМ ПРИ СТАБІЛЬНИХ ЛІНІЙНІЙНИХ ПЕРЕТВОРЕННЯХ

P-ГРАНИЧНЫЕ ЧИСЛА КВАДРАТИЧЕСКИХ ФОРМ ПРИ СТАБИЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ

P-NUMBERS OF QUADRATIC FORMS AT A STABLE LINEAR TRANSFORMATIONS

Анотація: *Досліжено поведінку P-граничних чисел квадратичних форм при s-стабільному лінійному перетворенні.*

Ключові слова: *квадратичні форми, локальна деформація, P-граничне число, стабільне перетворення.*

Анотация: *Исследовано поведение P-граничных чисел квадратических форм при s-стабильном линейном преобразовании.*

Ключевые слова: *квадратическая форма, локальная деформация, P-граничное число, стабильное преобразование.*

Summary: *The behavior of the P-numbers of quadratic forms with s-stably linear transformation .*

Key words: *quadratic forms, local deformation, P-numbers, stable transformation.*

Квадратичні форми виникають при розгляді багатьох задач в різних галузях математики. Під квадратичною формою будемо розуміти довільну квадратичну форму над полем дійсних чисел R:

$$f(z) = f(z_1,...,z_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j \,.$$

Множину всіх таких квадратичних форм позначимо через $\Re$, а множину всіх $f(z) \in \Re$ з одиничними коефіцієнтами $f_1,...,f_n$ — через $\Re_0$.

Нагадаємо деякі означення.

Нехай $f(z) \in \Re_0$ і $s \in \{1,...,n\}$; s-деформацією форми $f(z)$ називається форма

$$f^{(s)}(z,a) = f^{(s)}(z_1,...,z_n,a) = az_s^2 + \sum_{i \neq s} z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j \,,$$

де a-параметр [1, с. 893].

Позначимо через $F_+^{(s)}$ множину всіх $b \in R$, таких що форма $f^{(s)}(z,b)$є додатною, і покладемо $F_-^{(s)} = R \setminus F_+^{(s)}$. Іншими словами, $b \in F_-^{(s)}$ тоді і лише тоді, коли існує ненульовий вектор $r = (r_1,...,r_n) \in R^n$ такий, що $f^{(s)}(r_1,...,r_n,b) \leq 0$.

Далі, покладемо $m_f^{(s)} = \sup F_-^{(s)} \in R \cup \infty$ (оскільки із $x \in F_-^{(s)}$ випливає, що $y \in F_-^{(s)}$ для будь-якого $y < x$, то цей супремум є граничною точкою). Число $m_f^{(s)}$ називається s-им P-граничним числом форми $f(z)$ [1, с.894; 2, 475].

Нехай $f(z)$ — квадратична форма від n змінних над полем дійсних чисел з симетричною матрицею $F = M(f)$:

$$f(z) = f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} f_{ii} z_i^2 + \sum_{i<j} f_{ij} z_i z_j = zFz^T = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

Якщо в квадратичній формі $f(z)$ виконується невироджене лінійне перетворення

$$z_1 = a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{n1}y_n,$$
$$z_2 = a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{n2}y_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$z_n = a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n,$$

або в матричному вигляді

$$(z_1, z_2, \dots, z_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

тобто $z = yA$, то отримаємо квадратичну форму

$$\bar{f}(y) = \bar{f}(y_1, \dots, y_n) = (yA)F\,(A^T y^T) = y\,(AFA^T)y^T.$$

Для $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ лінійне перетворення $z = yA$ назвемо *s-стабільним*, якщо s-ий стовпець матриці A співпадає з s-им стовпцем одиничної матриці E розмірності $n \times n$ (це означає, що $z_s = y_s$ у вказаній заміні змінних). Матрицю, з вказаною властивістю, будемо називати також *s-стабільною.*

Теорема. *Нехай $f(z)$ додатно означена. Якщо перетворення $z = yA$ s-стабільно, то s-те P-граничне число квадратичної форми $\bar{f}(y)$ співпадає з s-им P-граничним числом квадратичної форми $f(z)$.*

Доведення. Випадок n=1 очевидний, а при n>1 можна вважати, що s=1 (інакше перенумеруємо змінні квадратичної форми). Якщо N — квадратна матриця, то матрицю, яку отримуємо з неї викреслюванням першого рядка та першого стовпця будемо позначати через $\tilde{N}$. Блоки матриці, явний вигляд яких нас не цікавить, будемо позначати символом $*$. Тоді для матриці $\bar{F} = M(\bar{f})$ маємо:

$$\bar{F} = M(\bar{f}) = AFA^T = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} * & * \\ * & \tilde{F} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & \tilde{A}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & \tilde{A}\tilde{F}\tilde{A}^T \end{pmatrix}$$

і значить, з одного боку,

$$\mathcal{D}(f) = |F| = |AFA^T| = |A|^2|F| = |A|^2\mathcal{D}(f),$$

а, з іншого боку,

$$\mathcal{D}(f_{\downarrow 1}) = |F| = |AFA^T| = |A|^2|F| = |A|^2\mathcal{D}(f_{\downarrow 1}),$$

звідки

$$\frac{\mathcal{D}(\bar{f})}{\mathcal{D}(\bar{f}_{\downarrow 1})} = \frac{\mathcal{D}(f)}{\mathcal{D}(f_{\downarrow 1})}$$

і твердження, яке доводиться, випливає тепер з теореми 2.7.

Зауважимо, що ця теорема справедлива і для s-стабільності, яка (за означенням) відрізняється від s-стабільності тільки знаком діагонального елемента в s-му стовпці матриці A.

Література:

1. *В. М. Бондаренко, В. В. Бондаренко, Ю. Н. Перегуда* Локальные деформации положительно определенных квадратичных форм //Укр. мат. журнал. 2012. №7.–С. 892-907.

2. *V. M. Bondarenko, Yu. M. Pereguda.* On *P*-numbers of quadratic forms // Геометрія, топологія та їх застосування: Зб. праць ін.-ту математики НАН України.– 2009. — **6**,№2. — С. 474–477.

References:

1. *V. M. Bondarenko, V. V. Bondarenko, Yu. N. Pereguda* Lokalnyie deformatsii polozhitelno opredelennyih kvadratichnyih form //Ukr. mat. zhurnal. 2012. №7.–S. 892-907.

2. *M. Bondarenko, Yu. M. Pereguda.* On *P*-numbers of quadratic forms // Heometrija, topolohija ta пch zastosuvannja: Zb. prac in.-tu matematyky NAN Ukraпny.– 2009. — 6, №2. — S. 474–477.