УДК 539.382.2

Ластівка Іван Олексійович
доктор технічних наук, професор,
завідувач кафедри вищої математики
Національний авіаційний університет
Ластивка Иван Алексеевич
доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой высшей математики
Национальный авиационный университет
Lastivka Ivan
Doctor of Technical Sciences, Professor,
Head of the Department of Higher Mathematics
National Aviation University

Богатирчук Анатолій Степанович
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри вищої математики
Національний авіаційний університет
Богатырчук Анатолий Степанович
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры высшей математики
Национальный авиационный университет
Bogatyrchuk Anatoliy
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
Associate Professor of the Department of Higher Mathematics
National Aviation University

РОЗРАХУНОК КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ У ЦИЛІНДРИЧНИХ КОМПОЗИТНИХ ОБОЛОНКАХ З ОТВОРАМИ

РАСЧЕТ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧКАХ С ОТВЕРСТИЯМИ

CALCULATION OF CONCENTRATION OF TENSIONS IN CYLINDRICAL COMPOSITE SHELLS WITH HOLES

Анотація. *Подано методику визначення напружено-деформованого стану циліндричної композитної оболонки з отворами. Використано модель оболонок типу Тимошенка. Застосовано метод скінченних елементів. Досліджено розподіл напружень навколо отворів.*

Ключові слова: *оболонка, круговий отвір, композитний матеріал, метод скінченних елементів, гіпотеза Тимошенка, напружено-деформований стан.*

Аннотация. *Представлена методика определения напряженно-деформированного состояния цилиндрической композитной оболочки с отверстиями. Использована модель оболочек типа Тимошенко. Применен метод конечных элементов. Исследовано распределение напряжений вокруг отверстий.*

Ключевые слова: *Оболочка, круговое отверстие, композитный материал, метод конечных элементов, гипотеза Тимошенко, напряженно-деформированное состояние.*

Summary. *The method of determination of the tensely-deformed state of cylindrical composite shell with holes is proposed. The shells model of Timoshenko is used. The method of finite elements is used. Distribution of tensions around the holes is investigated.*
Key words: *Shell, circular hole, composite material, finite elements method, hypothesis of Timoshenko, tensely-deformed state.*

Вступ. У техніці та різних областях промисловості у якості елементів конструкцій часто використовуються оболонки з отворами, виготовлені з композитних матеріалів. Проблема концентрації механічних напружень навколо отворів зумовлює необхідність постійного вдосконалення та розробки нових методів дослідження напружено-деформованого стану композитних оболонок.

Основні результати розрахунку напружено-деформованого стану циліндричних композитних оболонок з отворами відображені в [1, с. 359].

Метою даної роботи є дослідження напружено-деформованого стану в композитній циліндричній оболонці з двома отворами під дією внутрішнього тиску.

Постановка задачі та методи дослідження. Розглянемо напружено-деформований стан циліндричної оболонки товщиною h із композитного матеріалу, послабленої двома круговими отворами однакового радіуса r_0, розташованими вздовж твірної. Оболонка знаходиться під дією внутрішнього тиску інтенсивності p_0. Криволінійна система координат (α,β) вибиралась так, що вісь α проходить через центри отворів, а вісь β проходить через середину лінії центрів отворів.

Виділимо в оболонці окіл Ω, що містить отвори. Як відомо [1, с. 325], зони концентрації напружень навколо отворів мають локальний характер і практично затухають на відстані одного-двох діаметрів цих отворів. Тому припускаємо, що границя Γ околу Ω настільки віддалена від контурів отворів Γ_0, що зовні неї збурення напружень, спричинених наявністю отворів, практично затухають.

Віднесемо серединну поверхню оболонки до системи криволінійних ортогональних координат (α,β). Надалі виходимо з варіаційного рівняння Лагранжа, записаного для околу Ω:

$$\iint_{\Omega}\left\{\delta V_0-\left(p_1\delta u_1+p_2\delta u_2+p_n\delta w+m_1\delta\gamma_1+m_2\delta\gamma_2\right)\right\}A_1A_2\,d\alpha d\beta-$$
$$-\int_{\Gamma_1}\left(T_{tt}^0\delta u_t+T_{ts}^0\delta u_s+T_{th}^0\delta w+G_{tt}^0\delta\gamma_t+G_{ts}^0\delta\gamma_s\right)d\Gamma=0, \quad (1)$$

$$\delta V=T_1\delta\varepsilon_1+T_2\delta\varepsilon_2+S_{12}\delta\varepsilon_{12}+G_1\delta k_1+G_2\delta k_2+$$
$$+2H_{12}\delta k_{12}+Q_1\delta\varepsilon_{13}+Q_2\delta\varepsilon_{23}$$

де V_0 — питома енергія деформації;

A_1, A_2 — коефіцієнти квадратичної форми серединної поверхні оболонки;

p_1, p_2, p_n, m_1, m_2 — система зовнішніх сил і моментів, заданих на поверхні оболонки;

$T_{tt}^0, T_{ts}^0, T_{th}^0, G_{tt}^0, G_{ts}^0$ — система зовнішніх сил і моментів, заданих на границі області Ω;

$T_1, T_2, S_{12}, Q_1, Q_2$ — нормальні, зсувні і поперечні зусилля в оболонці;

G_1, G_2, H_{12} — згинні та закручуючий момент;

k_1, k_2, k_{12} — нормальні кривизни та геодезичне кручення серединної поверхні;

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$ — компоненти деформацій.

$u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2$ — узагальнені переміщення серединної поверхні оболонки, через які виражається поле переміщень

$$U_1=u_1(\alpha,\beta)+z\gamma_1(\alpha,\beta),$$

$$U_2=u_2(\alpha,\beta)+z\gamma_2(\alpha,\beta), \quad \left(-\frac{h}{2}\le z\le\frac{h}{2}\right), \quad W=w(\alpha,\beta). \quad (2)$$

Геометричні співвідношення між компонентами деформацій і узагальненими переміщеннями мають вигляд:

$$\varepsilon_1=\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}+k_\alpha w, \quad \varepsilon_2=\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{u}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+k_\beta w,$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right)+\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right)-2k_{\alpha\beta}w, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{13}=\gamma_1+\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\delta\left(-k_\alpha u+k_{\alpha\beta}v\right),$$

$$\varepsilon_{23}=\gamma_2+\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}+\delta\left(-k_\beta v+k_{\alpha\beta}u\right),$$

$$\chi_1=\frac{1}{A}\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha}+\frac{\gamma_2}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}, \quad \chi_2=\frac{1}{B}\frac{\partial\gamma_2}{\partial\beta}+\frac{\gamma_1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha},$$

$$2\chi_{12}=\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\gamma_1}{A}\right)+\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\gamma_2}{B}\right),$$

де головні кривизни $k_1=0$, $k_2=1/R$, коефіцієнти Ляме $A=B=1$.

Співвідношення пружності для трансверсально-ізотропної оболонки виражаються формулами:

$$T_1=B(\varepsilon_1+\nu\varepsilon_2), \; T_2=B(\varepsilon_2+\nu\varepsilon_1), \; S_{12}=\frac{B(1-\nu)}{2}\varepsilon_{12},$$

$$G_1=D(\chi_1+\nu\chi_2), \; G_2=D(\chi_2+\nu\chi_1),$$

$$H_{12}=\frac{D(1-\nu)}{2}2\chi_{12}, \; Q_1=K_1\varepsilon_{13}, \; Q_2=K_2\varepsilon_{23}, \quad (4)$$

де

$$B = \frac{Eh}{1-\nu^2},\ D_{ij} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},\ K = \frac{5}{6}hG.$$

Граничні умови на контурах отворів в полярних координатах, що зв'язані з центрами отворів запишуться у вигляді:

$$T_\rho = -\frac{p_0 R}{4}(3-\cos 2\theta),\ \ Q_\rho = -\frac{p_0 r_0}{2}, \qquad S_{\rho\theta} = -\frac{p_0 R}{4}\sin 2\theta,\ \ G_\rho = H_{\rho\theta} = 0. \tag{5}$$

Підставивши (3) в (4), а останнє — в (1) з урахуванням (5), отримаємо варіаційне рівняння відносно змінних $u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2$:

$$I\left(u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2\right) = 0.$$

Для розв'язання задачі застосуємо метод скінченних елементів [3, с. 31]. Розбиваємо область на квадратичні ізопараметричні елементи, що мають по вісім вузлів. На кожному з цих елементів вводимо локальну систему координат (ξ, η) таку, що $|\xi| \le 1,\ \ |\eta| \le 1$. При цьому перетворення від локальних координат до глобальних здійснюється за допомогою функцій форми

$$\varphi_i = \frac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(\xi+\eta_0-1),\ (i=1,3,5,7);$$
$$\varphi_i = \frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1+\eta_0),\ (i=2,6); \tag{6}$$
$$\varphi_i = \frac{1}{2}(1+\xi_0)\left(1-\eta^2\right),\ (i=4,8)$$

співвідношеннями

$$\alpha = \sum_{i=1}^{8} \alpha^i \varphi_i,\quad \beta = \sum_{i=1}^{8} \beta^i \varphi_i, \tag{7}$$

де $\xi_0 = \xi\xi_i,\ \ \eta_0 = \eta\eta_i,\ \ (\xi_i, \eta_i), \left(\alpha^i, \beta^i\right)$ — координати i-го вузла відповідно в локальній і глобальній системах координат.

Зв'язок з глобальною системою координат (α, β) здійснюється за допомогою співвідношень

$$\alpha = \sum_{i=1}^{8} \alpha^i \varphi_i(\xi, \eta),\quad \beta = \sum_{i=1}^{8} \beta^i \varphi_i(\xi, \eta)\ .$$

Якщо потрібно розглядати криволінійний відрізок в локальній системі координат, що збігається, наприклад, зі стороною елемента $\eta = -1$, то в такому випадку цей відрізок кривої буде задано співвідношеннями

$$\alpha = \sum_{i=1}^{3} \alpha^i \varphi_i(\xi),\ \beta = \sum_{i=1}^{3} \beta^i \varphi_i(\xi, \eta),\ (-1 \le \xi \le 1)\,,$$

а елемент дуги матиме вигляд [2, с. 231]:

$$d\Gamma = \left\{ \left(\sum_{i=1}^{3} \alpha^i \varphi_i'(\xi)\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{3} \beta^i \varphi_i'(\xi)\right)^2 \right\}^{1/2} d\xi\ .$$

Переміщення на кожному з елементів інтерполюються поліномами

$$u_1 = \sum_{i=1}^{8} u_1^i \varphi_i, \ldots, \gamma_2 = \sum_{i=1}^{8} \gamma_2^i \varphi_i, \tag{8}$$

де $u_1^i, \ldots, \gamma_2^i$ — шукані переміщення в i-му вузлі.

Для заміни варіаційного рівняння його дискретним аналогом необхідні вирази похідних від переміщень $u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2$ за змінними α, β. Для цього використаємо відомі формули зв'язку похідних у двох різних системах координат $\delta = J\mu$, де

$$\delta = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}, \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^T,\ \ \mu = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)^T,$$

$$\Delta = \left(\sum_{i=1}^{8} \alpha^i \frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi}\right)\left(\sum_{i=1}^{8} \beta^i \frac{\partial\varphi_i}{\partial\eta}\right) - \left(\sum_{i=1}^{8} \alpha^i \frac{\partial\varphi_i}{\partial\eta}\right)\left(\sum_{i=1}^{8} \beta^i \frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi}\right),$$

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\alpha}{\partial\xi} & \dfrac{\partial\beta}{\partial\xi} \\ \dfrac{\partial\alpha}{\partial\eta} & \dfrac{\partial\beta}{\partial\eta} \end{pmatrix}$$ — матриця Якобі, і розв'язуючи їх відносно μ, що у даному випадку можливо завдяки невиродженості перетворення, отримаємо

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = \left(\frac{\partial\beta}{\partial\eta}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - \frac{\partial\beta}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)\Big/ \det J,\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} = \left(-\frac{\partial\alpha}{\partial\eta}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \frac{\partial\alpha}{\partial\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)\Big/ \det J\ .$$

Тоді шукані похідні від переміщень з урахуванням відповідних формул матимуть вигляд

$$\frac{\partial u_1}{\partial\alpha} = \sum_{i=1}^{8} u_1^i \left\{ \left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi} \sum_{j=1}^{8} \beta^j \frac{\partial\varphi_j}{\partial\eta} - \frac{\partial\varphi_i}{\partial\eta} \sum_{j=1}^{8} \beta^j \frac{\partial\varphi_j}{\partial\xi} \right) \Big/ \Delta \right\},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial\beta} = \sum_{i=1}^{8} u_1^i \left\{ \left(-\frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi} \sum_{j=1}^{8} \alpha^j \frac{\partial\varphi_j}{\partial\eta} + \frac{\partial\varphi_i}{\partial\eta} \sum_{j=1}^{8} \alpha^j \frac{\partial\varphi_j}{\partial\xi} \right) \Big/ \Delta \right\},$$

$$\Delta = \left(\sum_{i=1}^{8} \alpha^i \frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi}\right)\left(\sum_{i=1}^{8} \beta^i \frac{\partial\varphi_i}{\partial\eta}\right) - \left(\sum_{i=1}^{8} \alpha^i \frac{\partial\varphi_i}{\partial\eta}\right)\left(\sum_{i=1}^{8} \beta^i \frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi}\right).$$

Похідні від інших узагальнених переміщень $u_2, w, \gamma_1, \gamma_2$ мають такі ж вирази заміною символу u_1 відповідно на u_2 і т.д. Далі співвідношення підставляємо у варіаційне рівняння, у яке попередньо підставлені граничні умови, а змінні $u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2$ виражені через $u_1^{\,i}, u_2^{\,i}, w^i, \gamma_1^{\,i}, \gamma_2^{\,i}$. Потім прирівнюємо коефіцієнти при однакових варіаціях $\delta u_1, \delta u_2, \delta w, \delta\gamma_1, \delta\gamma_2$, враховуємо їх незалежність і отримуємо вирази для обчислення коефіцієнтів матриці системи алгебраїчних рівнянь. Для обчислення вкладів у величину коефіцієнтів цієї системи рівнянь, що відповідають фіксованому вузлу за елементом Е, який містить цей вузол, необхідно проінтегрувати отримані вирази за цим елементом. Для цього використаємо квадратурні формули Гауса, що мають по два вузли за кожною змінною:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} G(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \approx \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} W_i W_j G(\xi_i, \eta_j)\,.$$

Таблиця 1

Коефіцієнти концентрації кільцевих зусиль та кільцевих моментів

К-ть вузлів (елементів)	θ					
	0		$\pi/2$		π	
	$k_{1\theta}$	$k_{2\theta}$	$k_{1\theta}$	$k_{2\theta}$	$k_{1\theta}$	$k_{2\theta}$
67(16)	5,23	1,21	0,60	1,16	6,24	2,78
275(78)	5,07	0,90	0,09	1,70	6,05	2,59
533(156)	5,04	0,83	0,03	1,65	5,93	2,45

Джерело: подана таблиця є розробкою авторів

Отже, таким чином інтегруємо за кожним елементом E, потім складаємо вклади при однакових варіаціях у вузлі, що вносять усі елементи, і які містять цей вузол. У результаті отримуємо алгоритм формування матриці системи, яка має вигляд

$$\sum_{n=1}^{N}\left(A_i^{1,n}u_1^n + A_i^{2,n}u_2^n + A_i^{3,n}w^n + A_i^{4,n}\gamma_1^n + A_i^{5,n}\gamma_2^n\right) = B_i\,,$$

$$(i = 1,2,3,\ldots,5N)\,,$$

де N — число вузлів сітки, $u_1^n,\ldots,\gamma_2^n$ — шукані переміщення в n-му вузлі області оболонки. Величини $A_i^{k,n}$ визначають матрицю жорсткості. Матриця симетрична і має стрічкову структуру. Ширина стрічки залежить від способу нумерації вузлів. Розбиття області Ω на елементи, інтегрування, формування матриці системи рівнянь і її розв'язування виконуються на комп'ютері за допомогою програми, складеної на мові C++ [4, с. 71].

Результати обчислень. Проведено обчислення для циліндричної оболонки, послабленої двома круговими отворами однакового радіуса з такими параметрами:

$$r_0/R = 0.2,\ h/r_0 = 0.2,\ l/r_0 = 2.5,\ \nu = 0.3,\ E/G = 100.$$

Унаслідок симетрії відносно осей координат розрахунки проводились для чверті оболонки: визначався напружено-деформований стан оболонки, обчислювались коефіцієнти концентрації кільцевих зусиль $k_{1\theta} = T_\theta/p$ і максимальних за товщиною оболонки кільцевих моментів $k_{2\theta} = 6G_\theta/ph$ по контуру отвору, де $p = p_0 R$ — максимальне зусилля в оболонці без отвору (спільна точка контура отвору та перемички має координату $\theta = \pi$).

У табл. 1. наведено значення $k_{1\theta}$, $k_{2\theta}$ у залежності від кількості вузлів (елементів).

Висновки

У результаті проведених досліджень:

1) розроблено алгоритм знаходження напружено-деформованого стану у циліндричних оболонках з отворами, виготовлених з композитного матеріалу;
2) виведено співвідношення коефіцієнтів для формування матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь, до яких звелась задача;
3) складено програму на алгоритмічній мові C++, у результаті застосування якої отримано конкретні числові результати.

Розроблена методика дозволяє обчислювати напружено-деформований стан у довільній точці циліндричної композитної оболонки з отворами і може бути застосована при проектуванні та розрахунках елементів конструкцій відповідної форми.

Література

1. Методы расчета оболочек. Т. 1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / [А. Н. Гузь, И. С. Чернышенко, Вал.Н. Чехов, Вик.Н. Чехов, К. И. Шнеренко]. К.: Наук.думка, 1980. 636 с.

2. Пелех Б. Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б. Л. Пелех, В. А. Лазько. К.: Наук. думка, 1982. 296 с.

3. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация: пер. с англ. / О. Зенкевич, К. Морган. М.: Мир, 1986. 318 с.

4. Глинський Я. М. C++ і C++ Builder / Я. М. Глинський, В. Є. Анохін, В. А. Ряжська. Львів: Деол, 2003. 192 с.