УДК 62-50

©2014. **В.Ф. Щербак**

НЕЛИНЕЙНЫЙ НАБЛЮДАТЕЛЬ В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КООРДИНАТ ТОЧКИ

Рассмотрена задача определения пространственных координат движущейся точки по ее плоскому изображению. В предположении, что закон движения точки задан, построен нелинейный наблюдатель, обеспечивающий экспоненциальную оценку неизвестных координат. Использован метод управляемого синтеза инвариантных соотношений в задачах наблюдения динамических систем. Уравнения движения точки относительно камеры дополнены дифференциальными уравнениями наблюдателя, содержащими управления. Решена задача синтеза управлений, обеспечивающих существование инвариантного соотношения, связывающего известные и неизвестные компоненты математической модели.

Ключевые слова: *нелинейный наблюдатель, инвариантные соотношения, фотограмметрия.*

1. Постановка задачи наблюдения. Задача нахождения пространственных координат точки по данным видеорегистрации ее движения является актуальной при разработке систем управления и навигации с использованием систем обработки изображений. В фотограмметрии [1] метод ее решения связан с получением двух или более плоских изображений точки. Метод основан на модели перспективной проекции, при которой пространственные координаты точки $M(X, Y, Z)$, заданные в некоторой системе координат, а также координаты ее изображения – точки $m(y_1, y_2)$ в картинной плоскости – связаны дробно-линейным отображением

$$y_1 = \frac{c_{11}X + c_{12}Y + c_{13}Z + c_{14}}{c_{31}X + c_{32}Y + c_{33}Z + c_{34}}, \quad y_2 = \frac{c_{21}X + c_{22}Y + c_{23}Z + c_{24}}{c_{31}X + c_{32}Y + c_{33}Z + c_{34}}. \qquad (1)$$

Соотношения (1) зависят от 12 параметров $c_{ij},\ i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4$, которые характеризуют ориентацию, положение и характеристики фотокамеры, такие как фокусное расстояние, параметры внутренней и внешней калибровки.

В основной задаче фотограмметрии пространственные координаты точки $M(X, Y, Z)$ подлежат определению по информации об y_1, y_2. Поскольку в модели перспективной проекции три величины X, Y, Z связаны лишь двумя алгебраическими равенствами (1), то неизвестные X, Y, Z определяются путем измерений, выполняемых по двум или более фотографиям, снятым из разных положений.

В то же время, если координаты точки M меняются со временем и закон изменения $X(t), Y(t), Z(t)$ описывается известной системой дифференциальных уравнений, то такого рода дополнительная информация в ряде задач управления позволяет не привлекать данные о дополнительных изображениях. В частности, в теории визуального управления [2] использование динамических уравнений для функций $y_1(t), y_2(t)$ позволяет решать задачи определения комплекса параметров космического аппарата, снабженного видеокамерой. В терминах теории управления, если точка M характеризует состояние некоторой динамической системы, то задача нахождения ее пространственных координат может быть рассмотрена как задача наблюдения переменных X, Y, Z по видеоинформации от одной камеры [3].

Задача 1. Пусть закон движения точки $M(X, Y, Z)$ задан в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а значения $y_1(t)$, $y_2(t)$ доступны измерению. Требуется по этой информации определить величины $X(t), Y(t), Z(t)$.

Если величины c_{ij}, $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$, известны, то соотношения (1) могут быть преобразованы к виду [1]

$$y_1 = f\frac{X}{Z}, \quad y_2 = f\frac{Y}{Z}, \tag{2}$$

где f — фокусное расстояние объектива камеры. Предположим, что движение точки $M(X, Y, Z)$ относительно камеры также известно: а именно, она участвует во вращательном движении относительно начала координат с угловой скоростью $\omega(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$ и перемещается с переносной линейной скоростью $v(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$. Тогда скорость точки $M(X, Y, Z)$ в инерциальной системе координат удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= \omega_2 Z - \omega_3 Y + v_1, \\ \dot{Y}_2 &= \omega_3 X - \omega_1 Z + v_2, \\ \dot{Z}_3 &= \omega_1 Y - \omega_2 X + v_3. \end{aligned} \tag{3}$$

Выходом системы (3) являются функции (2) – координаты изображения точки M.

Предположение. Естественно предполагать, что $\omega(t), v(t)$ являются ограниченными функциями времени, а движение материальной точки M в течение всего процесса наблюдения происходит в некоторой ограниченной области $D \subset R^3$ с известными границами. Поэтому далее будем считать, что $\forall t > 0 : |X(t)| \le X_{\max}$, $|Y(t)| \le Y_{\max}$, $|Z(t)| \le Z_{\max}$. Кроме того, переменная $Z(t)$, характеризующая расстояние точки M до фокальной плоскости, всегда больше нуля: $Z(t) \ge Z_0 > 0$.

Перейдем в системе (3) к переменным y_1, y_2, y_3, где $y_3 = f\frac{1}{Z}$. Положим, не ограничивая общности, $f = 1$. Тогда уравнения (3) примут вид

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\omega_3 y_2 + y_3(v_1 - v_3 y_1) - \omega_1 y_1 y_2 + \omega_2(1 + y_1^2), \\ \dot{y}_2 &= \omega_3 y_1 + y_3(v_2 - v_3 y_2) + \omega_2 y_1 y_2 - \omega_1(1 + y_2^2), \\ \dot{y}_3 &= (\omega_2 y_1 - \omega_1 y_2) y_3 - v_3 y_3^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Переменные X, Y, Z и y_1, y_2, y_3 связаны соотношениями, которые, в условиях сделанного предположения, являются взаимно-однозначными. Следовательно, исходная задача 1 равносильна задаче наблюдения динамической системы (4). Использование асимптотических схем решения задачи наблюдения приводит к следующей постановке.

Задача 2. По информации о значениях выхода системы (4) – фазовых переменных $y_1(t), y_2(t)$ – требуется асимптотически точно оценить значения переменной $y_3(t)$.

2. Синтез семейства инвариантных соотношений. Для решения задачи 2 воспользуемся методом получения асимптотических оценок неизвестных компонент фазового вектора [4, 5]. Метод основан на синтезе семейства инвариантных соотношений, выражающих искомые переменные как функции от известных величин.

Согласно этому методу построим вспомогательную систему дифференциальных уравнений с фазовым вектором $p = (p_1, p_2, p_3)$, которая имеет ту же структуру, что и (4):

$$\begin{aligned}
\dot{p}_1 &= -\omega_3 y_2 + p_3(v_1 - v_3 y_1) - \omega_1 y_1 y_2 + \omega_2(1 + y_1^2) + u_1(y_1, y_2, p),\\
\dot{p}_2 &= \omega_3 y_1 + p_3(v_2 - v_3 y_2) + \omega_2 y_1 y_2 - \omega_1(1 + y_2^2) + u_2(y_1, y_2, p),\\
\dot{p}_3 &= (\omega_2 y_1 - \omega_1 y_2)p_3 - v_3 p_3^2 + u_3(y_1, y_2, p).
\end{aligned} \tag{5}$$

Переменные p_1, p_2 в правых частях (5) заменены на известные функции $y_1(t), y_2(t)$. Кроме того, вспомогательная система является управляемой, так как включает аддитивные управляющие воздействия $u = (u_1, u_2, u_3)$. Отметим, что если выбрано какое-либо начальное условие $p(0)$ и зафиксировано управление $u(y_1, y_2, p)$, то значения $p(t)$ могут быть найдены в результате решения задачи Коши для системы (5). Это обстоятельство позволяет отнести вектор $p(t)$ к классу известных величин, посредством которых далее будут построены оценки $y_3(t)$.

Введем обозначения для отклонений решения системы (5) от решений системы (4): $e_i = p_i - y_i$, $i = 1, 2, 3$. Вычитая из (5) уравнения (4), получаем систему дифференциальных уравнений в отклонениях

$$\begin{aligned}
\dot{e}_1 &= (v_1 - v_3 y_1)e_3 + u_1(y_1, y_2, p),\\
\dot{e}_2 &= (v_2 - v_3 y_2)e_3 + u_2(y_1, y_2, p),\\
\dot{e}_3 &= (\omega_2 y_1 - \omega_1 y_2)e_3 - v_3(2p_3 - e_3)e_3 + u_3(y_1, y_2, p).
\end{aligned} \tag{6}$$

Поскольку $y_3(t) = p_3(t) - e_3(t)$, то получение асимптотической оценки переменной $e_3(t)$ равносильно решению задачи 2.

На первом этапе подберем управления таким образом, чтобы переменная $e_3(t)$ на решениях системы дифференциальных уравнений (6) могла быть представлена в виде некоторой функции от известных величин $y_1(t), y_2(t), e_1(t), e_2(t), p(t)$.

Обозначим $F_x = \partial F/\partial x$ – частную производную функции F по соответствующему аргументу.

Утверждение 1. Для любой дифференцируемой по своим аргументам функции $\Phi(e_1, e_2, p_3)$ такой, что

$$\forall t > 0: \;\; \Phi_{p_3}(e_1, e_2, p_3) \neq 1,$$

существует управление $u = (u_1, u_2, u_3)$, при котором некоторое семейство решений системы дифференциальных уравнений (6) удовлетворяет скалярному инвариантному соотношению

$$e_3 = \Phi(e_1, e_2, p_3). \tag{7}$$

Действительно, пусть $\Phi(e_1, e_2, p_3)$ – некоторая функция, удовлетворяющая условиям утверждения 1. Соотношение (7) описывает в фазовом пространстве расширенной системы (4), (6) многообразие. Введем переменную η, характеризующую отклонение решений системы от этого многообразия

$$\eta = e_3 - \Phi(e_1, e_2, p_3). \tag{8}$$

В качестве первых двух компонент вектора управления возьмем функции

$$u_1 = (v_3 y_1 - v_1)\Phi, \quad u_2 = (v_3 y_2 - v_2)\Phi. \tag{9}$$

Обозначим $\alpha_1 = v_1 - v_3 y_1$, $\alpha_2 = v_2 - v_3 y_2$, $w = \omega_2 y_1 - \omega_1 y_2$ и перейдем в уравнениях (6) к переменным e_1, e_2, η. В результате имеем

$$\begin{aligned} \dot e_1 &= \alpha_1 \eta, \\ \dot e_2 &= \alpha_2 \eta, \\ \dot \eta &= [w + 2v_3(\Phi - p_3) - \alpha_1 \Phi_{e_1} - \alpha_2 \Phi_{e_2}]\eta + v_3 \eta^2 + \Psi(u_3, \Phi, \Phi_{p_3}), \end{aligned} \tag{10}$$

где $\Psi(u_3, \Phi, \Phi_{p_3}) = (1 - \Phi_{p_3})u_3 - \Phi_{p_3}(w p_3 - v_3 {p_3}^2) + (w + v_3\Phi - 2v_3 p_3)\Phi$.

Утверждение 1 будет доказано, если удастся подобрать остающееся пока свободным управление u_3 так, что система (10) будет иметь решения вида

$$e_1 = C_1, \quad e_2 = C_2, \quad \eta = 0, \quad C_1, C_2 - \mathrm{const}.$$

Из вида (10) следует, что для этого достаточно обеспечить выполнение равенства $\Psi(u_3, \Phi, \Phi_{p_3}) \equiv 0$. Тогда соответствующее управление равно

$$u_3 = \frac{\Phi_{p_3}(w p_3 - v_3 {p_3}^2) - (w + v_3 \Phi - 2 v_3 p_3)\Phi}{1 - \Phi_{p_3}}, \tag{11}$$

а уравнения (10) упрощаются:

$$\begin{aligned} \dot e_1 &= \alpha_1 \eta, \\ \dot e_2 &= \alpha_2 \eta, \\ \dot \eta &= [w + 2v_3(\Phi - p_3) - \alpha_1 \Phi_{e_1} - \alpha_2 \Phi_{e_2}]\eta + v_3 \eta^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Последняя система допускает семейство решений $e_1 = C_1$, $e_2 = C_2$, $\eta = 0$, что означает существование инвариантного соотношения (7). Утверждение доказано.

С учетом проделанных построений на любых решениях расширенной системы дифференциальных уравнений (4), (5) неизвестная компонента $y_3(t)$ может быть представлена в виде

$$y_3(t) = p_3(t) - \Phi(p_1(t) - y_1(t), \qquad p_2(t) - y_2(t), p_3(t)) - \eta(t). \tag{13}$$

3. Асимптотическое оценивание. Второй этап решения задачи наблюдения связан с использованием формулы (13) для получения асимптотической оценки значений функции $y_3(t)$. Наличие у системы (12) инвариантного соотношения (7) означает, что если начальные условия для решений вспомогательной системы (5) с управлениями (9), (11) выбраны из условия $y_3 = p_3 - \Phi(p_1 - y_1, p_2 - y_2, p_3)$, то $\eta(t) \equiv 0$ и формула (13) дает точное решение задачи наблюдения. Но, так как значения $y_3(t)$ неизвестны ни для какого момента времени, то, в общем случае, подобрать соответствующие начальные условия в задаче Коши для системы (5) не представляется возможным.

Чтобы использовать равенство (13) для оценки компоненты $y_3(t)$ на любом решении системы дифференциальных уравнений (5) требуется, чтобы $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t) = 0$, т. е. решения системы (12) должны обладать свойством асимптотической устойчивости относительно части переменных – переменной η. Так как вид управлений уже фиксирован формулами (9), (11), то для выполнения этого требования в нашем распоряжении остается выбор функции $\Phi(e_1, e_2, p_3)$. Выберем ее так, чтобы коэффициент при переменной η в последнем уравнении системы (12) был равен λ, где λ – некоторая отрицательная постоянная:

$$\omega_2 y_1 - \omega_1 y_2 + 2v_3(\Phi - p_3) - (v_1 - v_3 y_1)\Phi_{e_1} - (v_2 - v_3 y_2)\Phi_{e_2} = \lambda\,. \tag{14}$$

Равенство (14) можем рассматривать как уравнение в частных производных первого порядка относительно функции $\Phi(e_1, e_2, p_3)$. Одно из его частных решений имеет вид

$$\Phi(e_1, e_2, p_3) = p_3 \left[1 + \exp\left(\frac{2v_3 e_1}{v_3 y_1 - v_1}\right)\right] + \frac{\lambda - \omega_2 y_1 + \omega_1 y_2}{2v_3}. \tag{15}$$

Так как $\Phi_{p_3} = 1 + \exp(\dfrac{2v_3 e_1}{v_3 y_1 - v_1}) \neq 1$, то условие утверждения 1 выполнено, функция $\Phi(e_1, e_2, p_3)$ является допустимой и окончательно система дифференциальных уравнений (12) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot e_1 &= \alpha_1 \eta, \\ \dot e_2 &= \alpha_2 \eta, \\ \dot\eta &= \lambda\eta + v_3 \eta^2. \end{aligned} \tag{16}$$

Последнее уравнение системы (16) является уравнением Бернулли. Его общее решение имеет вид

$$\eta(t) = \frac{\eta_0 e^{\lambda t}}{1 - \eta_0 \int\limits_0^t v_3(\tau) e^{\lambda\tau}\, d\tau}. \tag{17}$$

Чтобы обеспечить $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t) = 0$, выберем $\lambda < 0$ из условия: знаменатель (17) должен быть отделен от нуля, например, быть больше некоторой постоянной γ, где $0 < \gamma < 1$. Для этого достаточно выполнения неравенства

$\eta_0 \int\limits_0^t v_3(\tau) e^{\lambda\tau} d\tau < 1-\gamma$. В силу сделанного предположения об ограниченности функции $v(t)$ и области, в которой происходит движение, начальное значение $\eta_0 < \eta_0^{\max}$ и $v_3(t) < v_3^{\max}$. Здесь $v_3^{\max}$ известна, а оценка величины $\eta_0^{\max}$ может быть получена из соотношения (13) при конкретном значении функции $\Phi(p_1(t)-y_1(t), p_2(t)-y_2(t), p_3(t))$. С учетом отрицательности λ имеет место неравенство

$$\eta_0 \int\limits_0^t v_3(\tau) e^{\lambda\tau} d\tau \le \left|\frac{\eta_0^{\max} v_3^{\max}}{\lambda}\right| \left|e^{\lambda t}-1\right| \le \left|\frac{\eta_0^{\max} v_3^{\max}}{\lambda}\right|. \tag{18}$$

Пусть параметр λ выбран из условия $\lambda < -\dfrac{|\eta_0^{\max} v_3^{\max}|}{1-\gamma}$, тогда для переменной $\eta(t)$ справедлива оценка

$$\eta(t) = \frac{\eta_0 e^{\lambda t}}{1-\eta_0 \int\limits_0^t v_3(\tau) e^{\lambda\tau} d\tau} < \gamma e^{\lambda t}. \tag{19}$$

Используя формулу (15) для функции $\Phi(p_1(t)-y_1(t), p_2(t)-y_2(t), p_3(t))$ и равенство (13) для оценки $y_3(t)$, окончательно получаем

Утверждение 2. Пусть компоненты $y_1(t), y_2(t)$ фазового вектора системы (4) являются известными функциями времени. Тогда для всякого решения вспомогательной системы дифференциальных уравнений (5), замкнутой управлениями (9), (11), и достаточно большой по модулю отрицательной постоянной λ, значения переменной $y_3(t)$ могут быть оценены по формуле

$$y_3 = \frac{\omega_2 y_1 - \omega_1 y_2 - \lambda}{2v_3} - p_3 \exp\left(2v_3 \frac{p_1-y_1}{v_3 y_1 - v_1}\right). \tag{20}$$

Указанная оценка является экспоненциальной и имеет постоянный показатель затухания, равный $|\lambda|$.

Заключение. В работе метод синтеза инвариантных соотношений в задачах наблюдения использован для определения пространственных координат движущейся точки по ее изображению. Согласно этому методу, уравнения исходной динамической системы (4) дополнены дифференциальными уравнениями наблюдателя (5), которые зависят от управлений. Для полученной расширенной системы решена задача синтеза управлений, при которых любое конечное соотношение из некоторого семейства, связывающего искомую компоненту фазового вектора и известные величины, становится инвариантным соотношением для расширенной системы дифференциальных уравнений. Всякое такое соотношение может быть рассмотрено как дополнительная информация о неизвестной компоненте фазового вектора. Применяемый подход сводит задачу наблюдения к выбору таких функций Φ из полученного семейства, которые гарантируют асимптотическое стремление к нулю отклонений от построенного инвариантного соотношения.

1. *Бобир Н.Я., Лобанов А.Н., Федорук Г.Д.* Фотограмметрия. – М.: Недра, 1974. – 471 с.
2. *Лебедев Д.В. Ткаченко А.Н.* Навигация и управление ориентацией малых космических аппаратов. – Киев: Наук. думка, 2006. – 298 с.
3. *Dixon W.* Range identification for perspective vision system // IEEE Trans. Automatic Control. – 2003. – **47**, № 12. – P. 2232–2238.
4. *Щербак В.Ф.* Синтез дополнительных соотношений в задаче наблюдения // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2003. – **8**. – С. 229–235.
5. *Shcherbak V.F.* Synthesis of virtual measurements in nonlinear observation problem // Proc. Appl. Math. and Mech. (PAMM). – 2004. – **4**. – Issue 1. – P. 139–140.

V.F. Shcherbak

Nonlinear observer in the problem of a point $3-D$ coordinates determination

In this paper, the method of synthesis of invariant relations in observation theory is developed to determine the three-dimensional coordinates of a point moving with known motion dynamics by the data from a single camera. The method consists in the expansion of the original dynamical system by equations of its controlled prototype. Controls in the additional system are used for the synthesis of some invariant relation for the extended system. Such relation is considered in observation problems as additional equation for unknown component of the mathematical model.

Keywords: *nonlinear observer, invariant relations, photogrammetry.*

В.Ф. Щербак

Нелінійний спостерігач у задачі визначення просторових координат точки

У роботі метод синтезу інваріантних співвідношень в задачах управління використано для побудови узагальненого спостерігача в задачі фотограмметрії, яка пов'язана з відновленням просторових координат точки за її зображенням. Згідно цього методу, рівняння руху точки відносно камери доповнено рівняннями спостерігача, що містять управління. Основна ідея методу – синтез управлінь з метою побудови інваріантного співвідношення, яке зв'язує на траєкторіях розглянутих систем відомі і невідомі компоненти математичної моделі.

Ключові слова: *нелінійний спостерігач, інваріантні співвідношення, фотограмметрія.*

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
shvf@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 21.01.14